

Pedro Luis y Luis

TRANSMISION DEL CALOR POR CONDUCCION

TRANSMISION DEL CALOR POR CONDUCCION

Por P. LUIS Y LUIS

- *Profesor del Departamento de Físico Química de los Procesos Industriales. Facultad de Ciencias Químicas. Universidad Complutense de Madrid.*
- *Miembro de la Junta de Energía Nuclear.*
- *Presidente de la Sección Técnica de Energía de la Asociación Nacional de Químicos de España (ANQUE) Delegación Centro.*

Es propiedad del autor
Queda hecho el depósito
que marca la ley.

Impreso en V A R I C O P - Madera, 17 - Madrid - 13
I.S.B.N. 84-300-9693-0 - D.Legal M-28.725-83

PROLOGO

Estimado lector:

Este libro es fruto de las actividades docentes, investigadoras y profesionales del autor en el Departamento de Físico Química de los Procesos Industriales de la Facultad de Ciencias Químicas de la Universidad Complutense de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas de Madrid y Junta de Energía Nuclear y por su contenido parece adecuado para los alumnos de los últimos cursos de las Universidades, Centros de Investigación y Profesionales del campo de la energía.

Como es bien conocido, los primeros trabajos sobre Transmisión del calor aparecieron en los albores del desarrollo industrial, siguiendo las líneas trazadas inicialmente por Newton. En 1822 aparece el libro de P.B.J. Fourier *La Theorie Analytique de la Chaleur* que indicaba el camino de desarrollos más profundos. Durante el siglo XIX científicos de la talla de Biot, Riemann, Bessel, Stefan, Boltzman, Poisson, Peclet, Boussinesq, Poincaré, Maxwell, W. Thomson, entre otros muchos, desarrollaron estudios térmicos que se asentaron definitivamente como una rama de la ciencia con los trabajos de M. Plank sobre las radiaciones. Sin duda alguna los temas de la energía habían atraído la atención de las mentes más claras de la ciencia. Durante la primera mitad del siglo XX los distintos procesos industriales exigían nuevos materiales y mayores flujos térmicos dando origen a estudios específicos. Los temas térmicos se trataron con mayor número de aplicaciones y son bien conocidos los trabajos de: McAdams, Jakob, Blasius, Boelter, Nusselt, Carslaw, Jaeger, von Karman, Chapman, Colburn, Drew, Eckert, Erk, Gröeber, Veron, Grigull, Ingersoll, Kirchhoff, Prandtl, etc.

En la época actual los fenómenos térmicos ocupan un espectro amplio de aplicaciones, se buscan normalmente cinéticas térmicas muy elevadas, o muy bajas. Las primeras para extraer o aportar potencias con las necesidades que requieren los procesos industriales y las segundas para lograr que los materiales que constituyen los equipos o máquinas no se alteren por las condiciones de funcionamiento, normales o anormales.

En la preparación del texto se ha procurado mantener los criterios del método científico, sin olvidar que las aplicaciones, son el objetivo primario para los lectores a los que va dirigido. El planteamiento de que los focos térmicos imponen un campo de temperaturas según sea; la forma geométrica, los materiales y los medios de cada caso particular, simplifica el problema global, pero aumenta el número de ramas de la Ciencia y Tecnología en las cuales intervienen aspectos térmicos. Los focos térmicos provienen de transformaciones físicas, reacciones químicas o reacciones nucleares de fisión y fusión incluyéndose en ellas la interacción de partículas y radiaciones con la materia. Por otra parte, el gran número de aplicaciones y la profundidad mínima del texto para que sea de la utilidad que se pretende, han determinado el tratar solamente la Transmisión de calor por conducción, si bien se han considerado en los dos primeros capítulos, aspectos elementales de los modos de convección y radiación.

En el capítulo 3° se tratan los fenómenos en régimen estacionario incluyéndose: interpretación de las propiedades térmicas, aislamientos térmicos, superficies extendidas, tratamientos de formas geométricas, simples y compuestas con métodos analíticos que incluyen las transformaciones conformes y métodos gráficos, numéricos, analógicos y aproximados.

En el capítulo 4° se tratan los fenómenos de ge

neración de calor con distintas leyes de producción de energía térmica así como descripción de fenómenos tales como resistencias eléctricas, reactores nucleares, arcos eléctricos, reacciones químicas, calentamiento por inducción y por medios dieléctricos que familiarizan al lector en la importancia de conocer la distribución de los focos térmicos.

En los capítulos 5°, 6° y 7°, y cuando el lector está familiarizado con los métodos de cálculo, se incluyen los regímenes transitorios con y sin generación de calor, para cubrir los aspectos térmicos relacionados con accidentes, puesta en marcha o cambios normales y anormales de las condiciones de funcionamiento y que tienen repercusión en las respuestas exigibles a la instrumentación y control.

En el capítulo 8° se abordan los problemas relacionados con focos térmicos y cuerpos en movimiento en regímenes transitorios y estacionarios cubriendo el tratamiento de los denominados puntos calientes, que en muchos casos conducen a rebajar las temperaturas de operación con disminución del rendimiento de los equipos térmicos. Con los métodos utilizados en este capítulo, se tratan algunos problemas simples de los cambios de estado.

En la preparación de los distintos capítulos se ha seguido un orden secuencial y sistemático, primero fenomenológico y posteriormente con el tratamiento matemático adecuado, haciendo hincapié en que cada caso, es un pequeño modelo, para el cual, las condiciones de contorno deben ser precisas, responder a una situación cuasi real, y que los resultados sean numéricos, en respuesta a los objetivos que se buscan. Los ejemplos que se incluyen en los distintos capítulos, familiarizan al lector a plantearse la solución de otros problemas específicos que incluyen las analogías con el campo de concentraciones. Se ha evitado en lo posible los tratamien

tos no lineales con objeto de no perder las ventajas del método de superposición. Con las máquinas de calcular se consiguen pequeños programas que resuelven casos más complicados.

En el Apéndice I se incluyen las herramientas matemáticas utilizadas en el texto y el lector apreciará la fecundidad de las transformadas de Fourier, Hankel y Laplace que para casos más complicados pueden extenderse a las de Mehler-Fock, Mellin o Kontorovich-Lebedev, entre otras.

En el Apéndice II se incluyen algunas tablas de propiedades de materiales más frecuentes que han sido reconsideradas para valores medios y situaciones más comunes. El sistema de unidades utilizado en los ejemplos es el denominado ingenieril, quizás hubiese sido más adecuado el sistema internacional, pero se ha deseado considerar razones de familiaridad y prácticas.

Finalmente hay un capítulo importante que no figura en el texto, las discusiones y comentarios de compañeros de profesión en la preparación de los distintos capítulos. En especial quiero agradecer al Profesor L.Gutierrez Jodra y a los componentes de su escuela en el Departamento de Físico Química de los Procesos Industriales el apoyo científico y humano que me han prestado. Un día de verano admirando la belleza y magnitud de la puesta de sol, y dejando a un lado rubores intelectuales, decidí publicar éste libro.

El autor

Madrid, Agosto 1983.

A mi esposa
María Angeles

I N D I C E

Página

CAPITULO 1

MECANISMOS DE TRANSMISION DE CALOR

| | |
|---|----|
| Introducción | 1 |
| 1.1. Modos de transmisión de calor | 2 |
| 1.2. Conducción | 3 |
| 1.3. Convección | 6 |
| 1.4. Radiación | 11 |
| 1.5. Acoplamientos de resistencias térmicas en serie y paralelo | 38 |
| Bibliografía | 43 |

CAPITULO 2

ECUACIONES GENERALES DE TRANSMISION DE CALOR Y PROPIEDADES TERMICAS

| | |
|---|-----|
| Introducción | 45 |
| 2.1. Sólidos | 46 |
| 2.2. Fluidos | 58 |
| 2.3. Tensiones térmicas | 66 |
| 2.4. Ecuaciones y grupos adimensionales en transmisión de calor | 72 |
| 2.5. Ecuaciones analógicas y analogías | 80 |
| 2.6. Organización del estudio de los fenómenos de transmisión de calor por conducción | 84 |
| 2.7. Conductividad térmica de gases, líquidos y sólidos | 86 |
| Bibliografía | 106 |

CAPITULO 3

TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION Y REGIMEN ESTACIONARIO

| | |
|---|-----|
| Introducción | 109 |
| 3.1. Paredes, cilindros, tubos, esferas; aislamientos | 110 |
| 3.2. Superficies extendidas o aletas; rectangulares, triangulares, hiperbólicas, cóncavas, convexas; protuberancias | 148 |
| 3.3. Transmisión de calor en dos dimensiones. Rectángulos. Estudio por campos complejos y transformaciones conformes. Cilindros, tubos, paralelepípedos. Métodos numéricos. Métodos aproximados | 204 |
| Bibliografía | 293 |

CAPITULO 4

TRANSMISION DE CALOR EN REGIMEN ESTACIONARIO CON GENERACION DE CALOR

| | |
|--|-----|
| Introducción | 295 |
| Fisión nuclear. Fenómenos eléctricos y magnéticos; resistencias eléctricas, arcos eléctricos, calentamiento por inducción y dieléctrico, reacciones químicas | 296 |
| 4.1. Paredes planas | 324 |
| 4.2. Rectángulos | 335 |
| 4.3. Paralelepípedos | 351 |

| | <u>Página</u> |
|--------------------------|---------------|
| 4.4. Cilindros | 356 |
| 4.6. Tubos | 388 |
| 4.8. Esferas | 399 |
| Bibliografía | 410 |

CAPÍTULO 5

TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION EN REGIMEN

TRANSITORIO

| | |
|---|-----|
| Introducción | 413 |
| 5.1. Sólidos con resistencia térmica superficial controlante | 415 |
| 5.1. Cuerpos semiinfinitos con y sin convección . . | 418 |
| 5.1. Paredes planas con y sin convección | 427 |
| 5.3. Paralelepípedos con y sin convección | 440 |
| 5.4. Cilindros con y sin convección | 446 |
| 5.6. Tubos con y sin convección | 460 |
| 5.6. Esferas con y sin convección | 464 |
| Bibliografía | 468 |

CAPITULO 6

TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION CON GENERACION

DE CALOR EN REGIMEN TRANSITORIO

| | |
|---|-----|
| Introducción | 471 |
| 6.1. Cuerpos semiinfinitos | 472 |
| 6.2. Paredes con y sin convección | 476 |
| 6.3. Rectángulos con y sin convección | 481 |
| 6.4. Paralelepípedos con y sin convección | 487 |
| 6.5. Cilindros con y sin convección | 492 |

| | <u>Página</u> |
|--|---------------|
| 6.7. Tubos con y sin convección | 502 |
| 6.8. Esferas con y sin convección | 508 |
| Bibliografía | 512 |
| CAPITULO 7 | |
| TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION EN REGIMEN | |
| TRANSITORIO CON TEMPERATURAS SUPERFICIALES FUNCION | |
| DEL TIEMPO | |
| Introducción | 514 |
| 7.1. Cuerpos semiinfinitos con y sin convección . . | 515 |
| 7.2. Paredes con y sin convección | 529 |
| 7.3. Rectángulos con y sin convección | 544 |
| 7.4. Paralelepípedos con y sin convección | 552 |
| 7.5. Cilindros con y sin convección | 557 |
| 7.7. Tubos con y sin convección | 575 |
| 7.9. Esferas con y sin convección | 582 |
| Bibliografía | 586 |
| CAPITULO 8 | |
| TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION CON FOCOS Y CUER | |
| POS EN MOVIMIENTO EN REGIMENES ESTACIONARIO Y TRANSI | |
| TORIO | |
| Introducción | 589 |
| 8.1. Manantiales puntuales instantáneos y continuos. | 592 |
| 8.2. Paredes planas con y sin convección | 605 |
| 8.3. Rectángulos con y sin convección | 611 |
| 8.4. Paralelepípedos con y sin convección | 618 |
| 8.5. Cilindros con y sin convección | 625 |

Página

| | |
|--|-----|
| 8.7. Esferas con y sin convección | 641 |
| 8.8. Manantiales generadores de calor, en movimiento con y sin convección | 645 |
| 8.9. Cuerpos en movimiento con y sin convección . . | 657 |
| 8.10. Cuerpos en movimiento con cambios de estado . . | 661 |
| Bibliografía | 666 |
| APENDICE I | 671 |
| APENDICE II | 747 |
| INDICE DE MATERIAS | 781 |

CAPITULO 1

MECANISMOS DE TRANSMISION DE CALOR

INTRODUCCION

Los fenómenos térmicos están ligados a todas las transformaciones de la materia incluyendo desde los cambios de las dimensiones de un cuerpo en estado de reposo o movimiento hasta las transformaciones en que parte de la materia se convierte en energía como sucede en las reacciones nucleares de fisión o fusión. Como consecuencia de esta generalidad resulta difícil encontrar procesos donde no exista intercambio de calor, tanto a escala del Universo, como a escala de los procesos más elementales del reino animal o vegetal.

La termodinámica da la cantidad de energía y la composición de equilibrio de los procesos físicos o químicos. La naturaleza de la energía absorbida o desprendida depende del tipo de proceso; en unos casos es energía en forma de trabajo mecánico, como sucede en la expansión de un gas al desplazar un émbolo, en otros, energía eléctrica como sucede en las pilas electrolíticas, pero en cualquier caso, también se desprende calor en mayor o menor proporción.

El calor o energía térmica, es la menos noble de todas las formas de energías. Las transformaciones de una a otra forma de energía van acompañadas de desprendimiento de calor correspondiente a la irreversibilidad del proceso, dada por el término $T\Delta S$, donde ΔS representa la variación de entropía. La entropía es una propiedad extensiva que depende de la cantidad de materia del proceso. La transformación de calor en otras formas de energía va acompañada de una irreversibilidad mayor que la de cualquier otra energía. El criterio de equilibrio en el intercambio de calor está de-

terminado por la igualdad de temperaturas entre los focos caliente y frío. La temperatura es una propiedad intensiva que no depende de la cantidad de materia y el calor se transmite en el sentido de las temperaturas más altas a las más bajas.

Los procesos reales de intercambio de calor tienen lugar en un tiempo finito, y por lo tanto, interviene la cinética que, normalmente se expresa por la cantidad de calor que se extrae o aporta en la unidad de tiempo. Cuando se trate de aislamiento térmico, interesa una cinética baja, es decir que la cantidad de calor que se pierda al exterior sea pequeña, por el contrario, cuando por ejemplo, se necesita refrigerar un foco térmico, se busca una cinética elevada. En muchos procesos industriales, es necesario alcanzar una cinética alta con un salto pequeño de temperaturas entre los focos caliente y frío, para lograr un buen rendimiento en el ciclo termodinámico o poder realizar ciclos termodinámicos sucesivos con un sólo foco caliente. En la mayoría de los problemas de transmisión de calor se plantea una situación de compromiso entre, la cinética, salto de temperaturas, y superficie de equipo necesario para realizar un determinado proceso, que hay que resolver teniendo en cuenta aspectos prácticos o industriales.

1.1. Modos de transmisión del calor

Es un hecho experimental bien conocido que cuando dos sóli-dos a distintas temperaturas T_1 y T_2 se ponen en contacto el cuerpo caliente cede calor al cuerpo frío hasta que sus temperaturas se igualan y se obtiene la condición de equilibrio térmico. Este fenómeno se repite en forma análoga cuando uno de los cuerpos es gas o líquido. Finalmente, existe también intercambio de calor cuando los dos cuerpos se separan aún en el caso de que entre ellos exista el vacío. El estudio de estos tres fenómenos lleva a la conclusión de que existen tres modos de intercambio de calor conocidos como *conducción*, *convección* y *radiación* respectivamente.

1.2. Conducción

Se denomina conducción al conjunto de mecanismos que intervienen en la transmisión de calor a través de la materia considerada en reposo desde el punto de vista macroscópico. En la zona caliente, los electrones, átomos o moléculas, se mueven dentro de sus espacios limitados a mayor velocidad que sus vecinos más fríos transmitiéndoles energía sin que exista movimiento de masa del material. Los fenómenos de conducción se dan en todos los estados de agregación, es decir, sólido, líquido, gaseoso y plasma, considerando éste último como un cuarto estado de la materia, constituido por un conjunto de cargas eléctricas libres, iones y electrones, donde la carga global es nula y los movimientos de las partículas se rigen por la teoría de los gases.

En el caso de los metales, los mecanismos de conducción son debidos a los electrones libres y como, por otra parte, los electrones libres son a la vez portadores de carga eléctrica, resulta natural que los buenos conductores de la corriente eléctrica sean también buenos conductores del calor. La relación entre la conductividad térmica k y la conductividad eléctrica en los metales σ_e viene dada por la ecuación de Wiedermann-Frank

$$\frac{k}{\sigma_e T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right) = 2,45 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\text{volt}^2}{\text{oc}^2} \right) \quad (1)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ (J/}^\circ\text{K)}$, e , car del electrón $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

La ecuación anterior, no se cumple para todos los metales, debido a que en los mecanismos de conducción de calor intervienen también las vibraciones de los elementos de la red cristalina del sólido. En el caso de gases, la conducción se verifica por choques de las moléculas, y cuando se trata de líquidos, la situación es intermedia entre sólidos y gases. En el Capítulo 2 se tratan estos aspectos con mayor amplitud.

La doble función de los electrones libres en los metales, como portadores de cargas eléctricas, y de calor, establece una analogía formal entre los campos eléctricos y térmicos. Cuando en

un conductor eléctrico se mantiene un campo eléctrico constante, se origina una corriente I dada por

$$I = C_e \frac{\Delta V}{l} A \quad (2)$$

donde ΔV es la diferencia de potencial, $l(m)$, y $A(m^2)$, son la longitud y sección recta del conductor, respectivamente. Si σ_e es constante y $\Delta V/l$ también, resulta la conocida ley de Ohm

$$I = \frac{\Delta V}{R_e} \quad (3)$$

Análogamente, cuando en un conductor térmico de longitud $l(m)$ y sección recta $A(m^2)$ se mantiene una diferencia de temperatura ΔT entre los extremos del conductor, con un gradiente $\Delta T/l$, la cantidad de calor $q(kcal/h)$ que atraviesa el conductor en el sentido de las temperaturas decreciente es:

$$q = k A \frac{\Delta T}{l} \quad (4)$$

conocida como ecuación de Fourier de conducción del calor, donde la conductividad térmica k está expresada en $(Kcal/h^\circ C m^2/m)$. La ecuación (4) puede escribirse,

$$q = \frac{\Delta T}{R_{Tc}} \quad (5)$$

donde R_{Tc} es la resistencia térmica al paso de calor, expresada en $(^\circ C.h/Kcal)$. Las ecuaciones (4) y (5) pueden considerarse como generales para la transmisión de calor por conducción a través de gases, líquidos o sólidos.

Ejemplo 1,2-(1)

Una pared plana de 1 cm de espesor tiene en sus caras temperaturas de $250^\circ C$ y $125^\circ C$ respectivamente. Calcular:

- a) La cantidad de calor $(Kcal/h.m^2)$ que se transmite por conducción si la pared es de los siguientes materiales:

Cobre ; acero ; alúmina ; ladrillos de tierra de diatomeas.

- b) Las resistencias térmicas ($^{\circ}\text{C h/Kcal}$) para los materiales anteriores.
- c) Los gradientes de temperaturas dentro de los citados materiales.
- d) Tomando como referencia la cantidad de calor (Kcal/h) que se transmite a través del cobre hallar los espesores de los restantes materiales.

Solución: Las conductividades térmicas medias entre $250-125^{\circ}\text{C}$ en

$$\frac{\text{Kcal}}{\text{h m } ^{\circ}\text{C}}$$

son

$$k_{\text{Cu}} = 326$$

$$k_{\text{a (acero)}} = 45$$

$$k_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 8$$

$$k_{\text{d}} = 0,060$$

a)

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{\text{Cu}} = 4,07 \cdot 10^6; \quad \left(\frac{q}{S}\right)_{\text{a}} = 5,62 \cdot 10^5; \quad \left(\frac{q}{S}\right)_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 10^5 \quad \left(\frac{q}{S}\right)_{\text{d}} = 750$$

$$\frac{q}{S} = k \frac{\Delta T}{\Delta x} = 1,25 \cdot 10^4 \text{ k } \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2}\right)$$

b)

$$R_{T_c} = \frac{\Delta x}{k} \left(\frac{^{\circ}\text{C} \cdot \text{h}}{\text{Kcal}}\right) = \frac{10^{-2}}{k}$$

$$(R_{T_c})_{\text{Cu}} = 3,06 \cdot 10^{-5} \quad ; \quad (R_{T_c})_{\text{a}} = 2,22 \cdot 10^{-4} \quad ; \quad (R_{T_c})_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 1,25 \cdot 10^{-3} \quad ; \quad (R_{T_c})_{\text{d}} = 0,16$$

c)

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right) = \frac{q}{S} \frac{1}{k} \left(\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{m}}\right)$$

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\text{Cu}} = \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\text{a}} = \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\text{Al}_2\text{O}_3} = \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{\text{d}} = 1,25 \cdot 10^4 \left(\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{m}}\right)$$

d)

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{cu} = k_{cu} \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right)_{cu} ; \quad \frac{\Delta x_{cu}}{\Delta x_a} = \frac{k_a}{k_{cu}}$$

$$\Delta x_a = 0,138 \text{ cm.}$$

$$\Delta x_{\text{Al}_2\text{O}_3} = 0,024 \text{ cm.}$$

$$\Delta x_d = 1,84 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

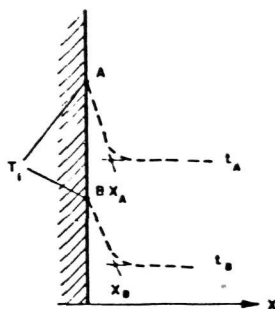
1.3. Convección

La transmisión de calor por convección tiene lugar cuando entre focos calientes y fríos existe transporte de materia a escala macroscópica, es decir a distancias superiores a las correspondientes a una posición de equilibrio de los elementos constituyentes de la materia. El mecanismo del intercambio térmico por convección se origina en las zonas de mayor temperatura por cambios de densidad respecto a las zonas de menor temperatura. La diferencia de densidades produce un gradiente de presión y el fluido se desplaza intercambiando calor y cantidad de movimiento con la masa que le rodea. El desplazamiento está relacionado con la naturaleza del fluido, por las fuerzas de fricción, y el campo de velocidades que acompaña al movimiento, y se conoce como *longitud de mezcla*. Aunque los fenómenos de intercambio de calor por convección clásicamente se asocian con los estados de agregación; gaseoso y líquido, pueden considerarse igualmente aplicables, a otros estados que cumplan las condiciones de desplazamiento macroscópico de materia por la existencia de focos térmicos a distinta temperatura dentro del sistema.

Las corrientes de convección por efectos térmicos son a veces intuitivas y visibles, por ejemplo, en el humo que produce un cigarrillo al quemarse o la sensación de calor y frío que se siente en una corriente de aire. Cuando el movimiento de un fluido es debido solamente a efectos térmicos se denomina *convección natural*, mientras que, si además de convección térmica, el fluido se mueve por agentes externos, tales como bombas de circulación, se denomina *convección forzada*. Con independencia del agente que mueve el fluido, éste puede moverse en *régimen laminar*, cuando no existen componentes de la velocidad perpendiculares a la dirección principal del movimiento, o en *régimen turbulento*, cuando existen estas componen-

tes; el paso de uno a otro régimen se denomina de *transición*.

Para conocer la cantidad de calor que se transmite por convección se puede considerar un sistema simple: el calentamiento de una masa gaseosa que se mueve sobre una pared vertical en sentido ascendente, Fig. 1.3(a). La superficie de la pared se supone a temperatura constante T_1 , y el fluido se mueve con un caudal másico (Kg/h) tal que su temperatura media en dos posiciones de la pared valen t_A y t_B respectivamente. Si se miden las temperaturas cerca de la pared por medio de un interferómetro u otro instrumento que no perturbe el fenómeno, la distribución de temperaturas en función de la distancia normal a la superficie, tiene la forma que se indica en la figura. El gradiente de temperatura $T_1 - t / \Delta x$, es elevado y constante en las proximidades de la superficie, y baja a partir de una cierta distancia x_A , pasando por una zona de transición. Todo sucede como si existiese una película de gas adherido a la pared de espesor x_A a través de la cual pasa el calor por conducción y donde se presenta la mayor proporción de la resistencia térmica total. La existencia de la película quieta se pone en evidencia con el interferómetro, y se corresponde con la idea de que la velocidad del fluido en la superficie de la pared debe ser nula.



Si el gradiente de temperaturas es constante en el espesor x_A , puede escribirse para la cantidad de calor transmitida por conducción,

$$q_A = k S \left(\frac{T_1 - t_A}{x_A} \right) \quad q_B = k S \left(\frac{T_1 - t_B}{x_B} \right) \quad (1)$$

y si $t_B \approx t_A$ y $x_A \approx x_B = \Delta x$ $q = k S \left(\frac{T_1 - t}{\Delta x} \right)$

La sencillez del caso tratado, se complica porque la diferencia $(T-t)$ no permanece constante y, por otra parte, el espesor de la película ΔX corresponde a un sistema dinámico donde intervienen aspectos térmicos, conjugados con el campo de velocidades del fluido en movimiento, y la solución, hay que buscarla en el conocimiento del perfil de velocidades y de su correspondiente perfil de temperaturas, para obtener por integración, la cantidad de calor transmitida.

Por otra parte, los fenómenos de convección se han venido estudiando tradicionalmente a partir de la ley de enfriamiento de Newton

$$q = h S (T-t)_m \quad (3)$$

donde $h(\text{Kcal/hm}^2\text{°C})$ es el coeficiente de transmisión de calor por convección; $S(\text{m}^2)$ la superficie de intercambio de calor y $(T-t)_m$ el valor medio de las diferencias de temperaturas entre la superficie S y el fluido, utilizándose usualmente la media logarítmica dada por

$$(T-t)_m = \frac{(T-t_1) - (T-t_2)}{\ln \left(\frac{T-t_1}{T-t_2} \right)} \quad (4)$$

La comparación de las ecuación (2) y (3) da la relación

$$h = \frac{k}{\Delta x} \quad (5)$$

Poniendo de manifiesto una analogía entre los fenómenos de conducción y convección, y por ello, es frecuente que en la bibliografía h sea denominado coeficiente de película.

Extendiendo la analogía con los fenómenos eléctricos se puede escribir

$$q = \frac{T-t}{\frac{1}{hS}} = \frac{T-t}{R_{Tcm}} \quad (6)$$

donde R_{Tcn} es la resistencia térmica al paso de calor por convección.

La ecuación (3) aparentemente simple contiene en la variable h la complicación de los fenómenos térmicos y de movimientos fluidos apuntada anteriormente. Normalmente los valores de h en distintos casos se obtienen: a partir de datos experimentales acoplados por medio del análisis dimensional en grupos adimensionales con exponentes determinados, o por métodos analíticos, teniendo en cuenta, los campos de distribución de temperaturas y velocidades, relacionados por las ecuaciones de balances energéticos.

1.3.1. Convección con cambios de estado.

Los cambios de estructura de materia en general, van acompañados de absorción o desprendimiento de calor, que cuando se trata de cambios de estado, se denomina calor latente. Son fenómenos de este tipo: *ebullición, condensación, fusión, solidificación y sublimación*. Si bien todos ellos son importantes, la *ebullición* y *condensación* tienen mayor significación por la gran cantidad de procesos industriales en que se utilizan. Un ejemplo clásico es el caso de una caldera de vapor de tubos de agua. En el hogar destinado a la combustión de gases, fuel-oil o carbón, se genera calor. Parte de éste calor se va con los gases que salen por la chimenea, y parte, se transmite al agua que circula por el interior de los tubos. Si la temperatura de *ebullición* del agua es inferior a la temperatura de la superficie interior de los tubos, tiene lugar el cambio de estado de líquido a vapor o *ebullición*. Si el calor latente es elevado, como es el caso del agua, se puede extraer mucho calor con una pequeña cantidad de líquido.

Los cambios de estado pueden tener lugar: en el seno de materia más o menos homogénea, o en las proximidades de la superficie de separación de dos o más estados de agregación, como en el ejemplo anterior de una caldera de vapor. Los mecanismos de transmisión de calor en estos casos son complicados, y se engloban en el coeficiente h de la ecuación 1,3-(3).

Cuando la ebullición tiene lugar en las proximidades de un sólido, generalmente un metal o buen conductor térmico, aparecen puntos activos en la superficie del cuerpo, que actúan como generadores de burbujas, con diámetros del orden de 10^{-6} m . Estas burbujas crecen y se mueven a gran velocidad produciendo una agitación intensa en el líquido que las rodea. Colapsan si la masa de líquido está por debajo del punto de ebullición. Los valores de h pueden ser del orden de 15.000-20.000 (Kcal/h m²°C) y dependen de las características geométricas y estructurales de la superficie y de las propiedades físicas y dinámicas del fluido en movimiento. Las ventajas de la transmisión de calor con ebullición, radican en el valor elevado de h , lo que permite construir equipos compactos con pequeños saltos de temperatura. Pueden obtenerse valores de h de 100.000 (Kcal/hm²°C) , pero para estos valores el fenómeno de ebullición es inestable. En efecto, consideramos el caso de un flujo térmico, (q/s) , de 5×10^6 (Kcal/hm²) con una diferencia de 50°C entre la superficie y la zona de ebullición. Las burbujas, se forman y mueven rápidamente, y la visión pictórica, se corresponde con pequeños chorros de vapor que se introducen en el líquido en cadencia variable. Si en algún momento, una zona de la superficie se cubre de una capa de vapor, la transmisión de calor se ve dificultada y, si el foco térmico continúa imponiendo su flujo térmico, que es muy elevado, la zona afectada eleva rápidamente su temperatura fundiendo el material por *abrasamiento* o *quemado*. Cuando el foco caliente lo forma una masa a temperatura fija, los flujos térmicos no son tan elevados, el quemado no se produce si el material de la pared tiene punto de fusión superior a la temperatura del foco caliente, y la ebullición se autocontrola por la aparición del fenómeno L de ebullición en película.

En los fenómenos de condensación en ausencia de gases incondensables los valores de h , son también elevados, del orden de 15.000 (Kcal/h m²°C) . El mecanismo de condensación es la formación de una película líquida junto a la superficie metálica; el vapor condensante cede el calor latente que se transmite a través de la película, y de la pared del material, para ser eliminado finalmente por el foco frío. La presencia de gases incondensables hace que se forme una película de gas junto a la película líquida, aumentando notablemente la resistencia térmica y disminuyendo el valor de h .

Un fenómeno análogo se presenta cuando la condensación tiene lugar con solidificación, como sucede con las capas de hielo, que tienen estructura porosa, y presentan una resistencia térmica elevada. Cuando la condensación tiene lugar sobre superficies metálicas muy limpias; oro, plata cromo y cobre, como ejemplos característicos del fenómeno, se produce condensación en gotas, obteniéndose coeficientes h de hasta cinco veces superiores a los obtenidos en la condensación en película líquida. El mecanismo no está bien aclarado, y el fenómeno se presenta, con gotas diminutas que se forman en la superficie, aumentan de tamaño a gran velocidad y se desprenden finalmente como tales gotas. Efectos análogos pero en menor extensión los producen promotores del tipo de aceites, ácidos grasos y mercaptanos, entre otros.

1.4. Radiación

Desde un punto de vista clásico, la transmisión de calor por radiación tiene lugar entre cuerpos a distinta temperatura y separa dos físicamente. Son ejemplos típicos, la sensación de calor que se percibe cuando nos colocamos frente a una resistencia eléctrica al rojo, o la fusión de metales por medio de hornos solares. Como es conocido los fenómenos de intercambio de calor por radiación tienen lugar a la velocidad de la luz, y sin intervención del medio que se para los cuerpos, siempre y cuando éstos se vean entre sí.

Los mecanismos que intervienen en la generación de calor por radiación son complejos, porque están ligados a las transformaciones más íntimas de la materia, y su descripción y desarrollo, se ha ce teniendo en cuenta, las leyes de la mecánica cuántica y mecánica ondulatoria. Las partículas elementales, describen movimientos ondu latorios, equivalentes a un grupo de ondas ligeramente heterocromáticas y divergentes, caracterizadas; por su frecuencia ν , velocidad de fase C y velocidad de grupo u . Los movimientos están cuantizados, es decir, sólo admiten o desprenden cantidades discretas de energía, conocidas como *quantos*, dados por la ecuación de Plank,

$$E = h \nu$$

(1)

donde h_f ($6,625 \times 10^{-27}$ erg.s) es la constante universal de Plank y ν , la frecuencia de onda asociada. Si se considera un grupo de ondas hay que hablar de una cierta variación de $d\nu$, mucho menor que ν . Cuanto menor sea $d\nu$, mejor está localizada la energía, y por tanto, la partícula, y cuanto mayor sea la dispersión, tanto peor está determinada la velocidad de fase, y por tanto, la de la partícula.

De las consideraciones anteriores se desprende; la generalidad del término *radiación*, y los mecanismos de su generación y propagación.

En efecto, la perturbación de una partícula se corresponde con un desprendimiento de energía $h_f\nu$ que queda asociada a unas radiaciones conocidas como *fotones*, es decir, corpúsculos de masa nula, cantidad de movimiento $h_f\nu/C_0$, velocidad de propagación C_0 , igual a la de la luz, y que responden a las leyes de la óptica geométrica. La naturaleza electromagnética de las radiaciones fue prevista por Dirac y, demostrada posteriormente, al admitir la existencia de electrones positivos y negativos que en un proceso de aniquilación se transforman en radiaciones. En la Fig. 1,4-(a) se indican los valores correspondientes entre la energía de los fotones y las longitudes de onda de las radiaciones.

En el estudio de las radiaciones resulta conveniente precisar el significado de algunos términos que se utilizan con distintos nombres en la bibliografía.

La energía de las radiaciones se propaga en haces de ondas divergentes, y la energía correspondiente a un rayo, no tiene sentido, dado que, sólo podemos determinar un cierto entorno de frecuencias, y por ello, cuando se habla de radiación monocromática, se entiende que se trata, de haces con frecuencias comprendidas entre ν y $\nu+d\nu$.

Radiaciones no polarizadas, son aquellas en las que el plano de polarización cambia continuamente, como sucede en casi todos los medios isótropos. Teniendo en cuenta que la intensidad de radiación, es proporcional al cuadrado de la amplitud de las vibra-

ESPECTRO DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS

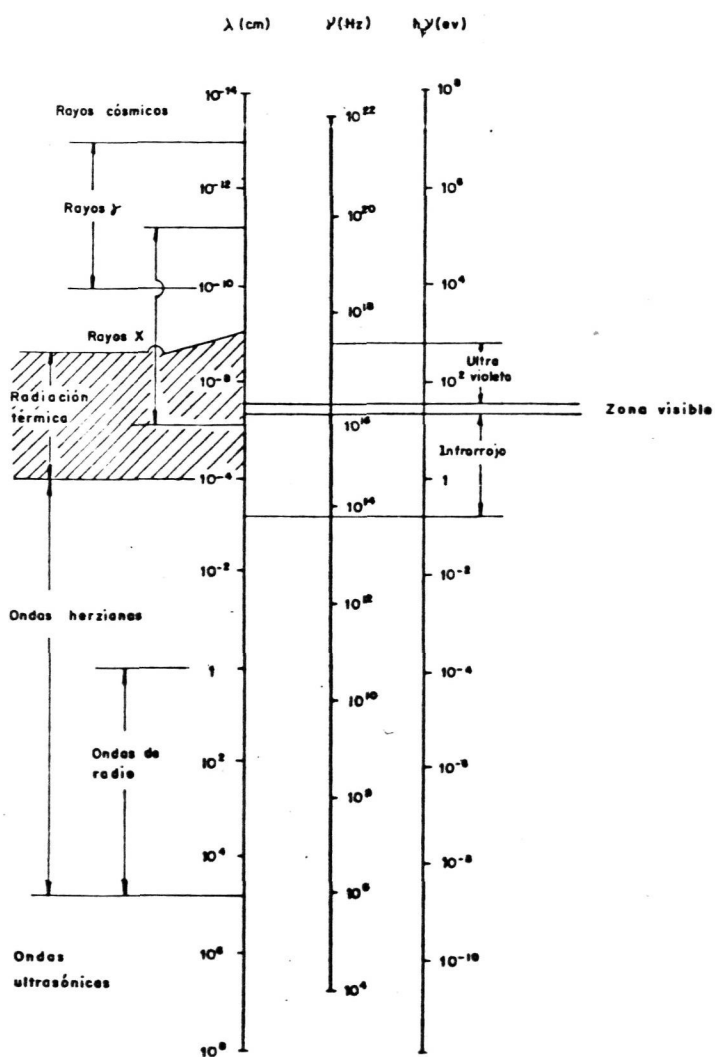


Fig. 1,4-(a)

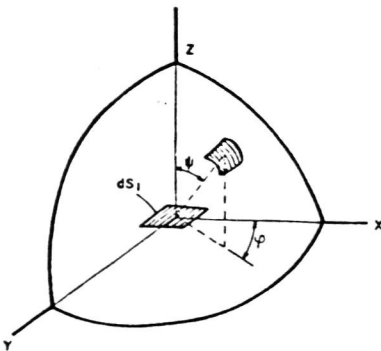
ciones, la intensidad de una radiación polarizada, es la mitad de una radiación no polarizada. Normalmente, en tanto no se especifica, se supone radiaciones no polarizadas.

Radiaciones difusas, son aquellas que tienen las mismas propiedades en todas las direcciones, se dice también, que cumplen la ley de Lambert o del coseno; la energía radiada en cualquier dirección, es proporcional al coseno del ángulo que forme la dirección considerada con la normal al plano de la superficie radiante.

La intensidad específica o intensidad monocromática I_ν de una radiación es la energía radiante por unidad de: tiempo, intervalo de frecuencia, ángulo sólido y superficie normal a la dirección de la radiación.

Si un elemento dS , de superficie, localizado en el centro de una esfera, de la cual se ha representado un octante en la Fig. 1,4(b), radia a todo el espacio semiesférico de un medio isótropo, la potencia emisiva monocromática dq_ν (energía/tiempo) vale

$$dq_\nu = I_\nu \int_0^{\pi/2} \sin \psi \cos \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi = I_\nu dS_1 = W_\nu dS_1 \quad (2)$$



donde $W_\nu \equiv (q_\nu/s)$ es el flujo de energía radiante monocromática (energía/superficie, tiempo).

Si la superficie radiante es finita:

$$q_\nu = W_\nu S_1 \quad (3)$$

Si se tienen en cuenta todas las frecuencias o longitudes de puesto que

$$I \equiv \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} I_{\lambda} d\lambda$$

$$q = S_1 \pi I = S_1 W \quad (4)$$

La energía radiante monocromática, por unidad de volumen de un medio, y unidad de intervalo de frecuencia, se denomina densidad de energía radiante monocromática.

$$u_{\nu} = \frac{1}{c_0} \int_0^{4\pi} I_{\nu} d\Omega = \frac{4\pi}{c_0} w_{\nu} \quad (5)$$

donde, c_0 es la velocidad de la luz y Ω el ángulo sólido. La ecuación anterior se deduce teniendo en cuenta que el volumen recorrido por la radiación correspondiente a una superficie, dS , normal a la dirección del ángulo sólido, $d\Omega$, vale $c_0 \times dS$, y la energía transportada en la unidad de tiempo por radiación $I_{\nu} d\Omega \cdot dS$. Dividiendo ambas expresiones e integrando, se obtiene la ecuación (4).

1,4-1. Radiación de cuerpo negro

Consideremos un cuerpo sólido que se mantiene a una temperatura constante, con un recinto hueco, y vacío, dentro del sólido. Dentro de la masa entre las partículas que se mueven en sus órbitas cuantizadas existe un equilibrio dinámico. Este equilibrio tiene también lugar en las proximidades de la superficie, con la circunstancia, que los intercambios energéticos estadísticos en esta zona se realizan con absorción o formación de fotones, que salen al recinto hueco, o que procedentes de éste, se absorben en la superficie del sólido. En consecuencia, el recinto hueco se llena de gas fotónico o radiaciones, caracterizadas por su energía $h\nu$. Este equilibrio de radiación dentro del recinto hueco a temperatura constante, se conoce como radiación de *cuerpo negro*, para el que se admite: radiaciones difusas que cumplen la ley de Lambert, extendidas

a todo el espectro de frecuencias, y con una potencia emisiva, máxima posible, para cualquier foco térmico a la misma temperatura.

En las condiciones de equilibrio consideradas anteriormente, la distribución de fotones responde a la estadística desarrollada por Bose y Einstein, y teniendo en cuenta, la energía de cada fotón, se obtiene el valor de la intensidad específica monocromática para un cuerpo negro, conocida como ecuación de Plank

$$I_{\nu}(\tau) = \frac{2h_p\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp \frac{h_p\nu}{k_B T} - 1} \quad (1)$$

o en función de la longitud de onda, si $\nu = \frac{c_0}{\lambda}$ y $d\nu = -\frac{c_0}{\lambda^2} d\lambda$

$$\frac{I_{\nu}\lambda}{T^5} = \frac{2h_p c_0^2}{(\lambda T)^5} \frac{1}{\exp \frac{h_p c_0}{\lambda k_B T} - 1} \quad (2)$$

6

$$I_{\nu}\lambda = \frac{C_1}{\pi} \frac{1}{\lambda^5 \left(\exp \frac{C_2}{\lambda T} - 1 \right)}$$

donde C_0 es la velocidad de la luz en el vacío ($2,998 \times 10^8$ m/s) ; h_p , la constante de Plank ($6,625 \times 10^{-34}$ J.s) ; k_B , la constante de Boltzmann ($1,3804 \times 10^{-23}$ J/°K) ; T, temperatura de las radiaciones de cuerpo negro (°K) ; $C_1 = 3,7413 \times 10^4$ (W/cm . λ^4) $C_2 = 14388$ ($\lambda^\circ K$) .

La integración de la ecuación (2) en todo el intervalo de longitudes de onda, y teniendo en cuenta que el flujo de energía ra diante, $W = \pi I$, resulta para el cuerpo negro

$$W_n = 2\pi h_p c_0^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(\exp \frac{h_p c_0}{\lambda k_B T} - 1 \right)} \quad (3)$$

haciendo el cambio de variable $\frac{h_p c_0}{k_B \lambda T} = x$

$$W_n = \frac{2\pi}{c_0} \frac{k_B^4}{h_p^4} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp x - 1} = C_1 \int_0^\infty x^3 (\exp(-x) + \exp(-2x) + \dots) dx = C_1 \frac{\pi^4}{15}$$

6

$$W_n = 40,802 \frac{k_B^4}{C^2 h_p^3} T^4 = \sigma T^4 \quad (4)$$

Expresando las constantes en las unidades indicadas anteriormente,

$$W_n = 5,67 \cdot 10^{-12} T^4 \left(\frac{W}{cm^2 \cdot ^\circ K^4} \right) \quad (5)$$

Como puede observarse, σ es una constante universal, conocida como poder emisorio total del cuerpo negro, hallada, experimentalmente por Stefan, y calculada teóricamente por Boltzmann a partir de consideraciones termodinámicas. El valor de σ en distintos sistemas utilizados en Ingeniería es:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \left(\frac{erg}{s} \frac{1}{cm^2} \frac{1}{^\circ K^4} \right)$$

$$\sigma = 4,88 \cdot 10^{-8} \left(\frac{kcal}{h} \frac{1}{m^2} \frac{1}{^\circ K^4} \right) \quad (6)$$

$$\sigma = 0,173 \cdot 10^{-8} \left(\frac{Btu}{h} \frac{1}{ft^2} \frac{1}{^\circ R^4} \right)$$

En la Fig. 1,4-a, se representan los valores del flujo monocromático de energía radiante para radiación de cuerpo negro W_n , en función del producto λT , y se observa la presencia de valores máximos de W_n , para cada temperatura. Estos valores pueden obtenerse directamente a partir de la ecuación (3). Tablas 1,4-1(a) y 1,4-1(b). Para

$$\frac{dW_n \lambda}{d(\lambda T)} = 0 \quad \text{se cumple} \quad \exp \frac{k_B G}{k_B T \lambda_{mx}} \left(5 - \frac{k_B}{R T_{mx}} \right) = 5$$

y haciendo $a = \frac{k_B G}{k_B T \lambda_{mx}}$ resulta la ecuación $\exp a + \frac{a}{5} = 1$

Tabla 1,4-1(a)

RADIACION DE CUERPO NEGRO

$$\sigma = 4,88 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{m}(\text{°K})^4} \right)$$

| T | $\lambda_{\text{máx}} \cdot 10^6$ | q/S | T | $\lambda_{\text{máx}} \cdot 10^6$ | q/S |
|-----|-----------------------------------|-----------------------------------|------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| °K | m | $\frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^2}$ | °K | m | $\frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^2}$ |
| 100 | 28,96 | 4,88 | 600 | 4,82 | 6324 |
| 200 | 14,48 | 78,08 | 650 | 4,45 | 8711 |
| 273 | 10,60 | 271,1 | 700 | 4,13 | 1,17.10 ⁴ |
| 300 | 9,65 | 395,3 | 800 | 3,62 | 1,99 " |
| 305 | 9,50 | 422,2 | 900 | 3,21 | 3,20 " |
| 310 | 9,32 | 450,7 | 1000 | 2,89 | 4,80 " |
| 315 | 9,20 | 480,4 | 1100 | 2,63 | 7,14 " |
| 320 | 9,05 | 511,7 | 1200 | 2,41 | 1,04.10 ⁵ |
| 325 | | 544,4 | 1300 | 2,22 | 1,29 " |
| 330 | 8,76 | 578,7 | 1400 | 2,06 | 1,87 " |
| 335 | 8,65 | 614 | 1500 | 1,93 | 2,47 " |
| 340 | 8,51 | 652 | 1600 | 1,810 | 3,19 " |
| 345 | 8,40 | 691 | 1700 | 1,704 | 4,07 " |
| 350 | 8,27 | 732 | 1800 | 1,60 | 5,12 " |
| 355 | 8,16 | 775 | 1900 | 1,52 | 6,35 " |
| 360 | 8,04 | 819 | 2000 | 1,448 | 7,80 " |
| 365 | 7,93 | 866 | 2500 | 1,15 | 1,90.10 ⁶ |
| 370 | 7,82 | 914 | 3000 | 0,965 | 3,95 " |
| 375 | 7,72 | 965 | 3500 | 0,826 | 7,32 |
| 380 | 7,62 | 1018 | 4000 | 0,722 | 1,24.10 ⁷ |
| 385 | 7,52 | 1072 | 4500 | 0,644 | 2,00 " |
| 390 | 7,42 | 1128 | 5000 | 0,579 | 3,05 " |
| 395 | 7,33 | 1187 | 5500 | 0,527 | 4,46 " |
| 400 | 7,27 | 1249 | 6000 | 0,483 | 6,32 " |
| 405 | 7,15 | 1312 | | | |
| 410 | 7,05 | 1379 | | | |
| 420 | 6,86 | 1519 | | | |
| 430 | 6,73 | 1668 | | | |
| 440 | 6,56 | 1829 | | | |
| 450 | 6,43 | 2001 | | | |
| 460 | 6,26 | 2185 | | | |
| 470 | 6,16 | 2381 | | | |
| 480 | 6,03 | 2591 | | | |
| 490 | 5,91 | 2813 | | | |
| 500 | 5,79 | 3050 | | | |
| 520 | 5,55 | 3568 | | | |
| 540 | 5,36 | 4150 | | | |
| 560 | 5,16 | 4799 | | | |
| 580 | 4,96 | 5522 | | | |

Tabla 1,4-1(b)

FUNCION DE RADIACION DEL CUERPO NEGRO

$$C_2 = 14388 \text{ (}^\circ\text{K)(m)}$$

| λT $\times 10^6$ (m°K) | $\frac{W_{\lambda T}}{W_{\lambda_{m,T}}}$ | $\frac{\int_0^{\lambda T} W_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} W_{\lambda} d\lambda}$ (acumulado) | λT $\times 10^6$ (m°K) | | $\frac{\int_{\lambda T}^{\infty} W_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} W_{\lambda} d\lambda}$ (acumulado) |
|---------------------------------------|---|---|---------------------------------------|----------------------|--|
| 1000 | 0,0164 | 0,0003207 | 15000 | 0,0237 | 0,9689 |
| 1200 | 0,0725 | 0,002133 | 15500 | 0,0212 | 0,9714 |
| 1400 | 0,1860 | 0,007789 | 16000 | 0,0190 | 0,9737 |
| 1600 | 0,3490 | 0,019717 | 16500 | 0,0170 | 0,9758 |
| 1800 | 0,5199 | 0,039339 | 17000 | 0,0150 | 0,9776 |
| 2000 | 0,6831 | 0,06672 | 17500 | 0,0138 | 0,9793 |
| 2200 | 0,8163 | 0,1008 | 18000 | 0,0125 | 0,9808 |
| 2400 | 0,9125 | 0,1402 | 18500 | 0,0114 | 0,9821 |
| 2600 | 0,9708 | 0,1831 | 19000 | 0,0103 | 0,9834 |
| 2800 | 0,9971 | 0,2778 | 19500 | 0,00945 | 0,9845 |
| 2900 | 1,0000 | 0,2505 | 20000 | 0,00862 | 0,9855 |
| 3000 | 0,9971 | 0,2732 | 20833 | 0,00744 | 0,9870 |
| 3500 | 0,9992 | 0,3829 | 21739 | 0,00638 | 0,9884 |
| 4000 | 0,8002 | 0,4808 | 23256 | 0,00499 | 0,9904 |
| 4500 | 0,6716 | 0,5642 | 24390 | 0,00419 | 0,9916 |
| 5000 | 0,5549 | 0,6337 | 25000 | 0,00382 | 0,9921 |
| 5500 | 0,4556 | 0,6908 | 30303 | 0,00187 | 0,9954 |
| 6000 | 0,3739 | 0,7377 | 35037 | 0,00087 | 0,9974 |
| 6500 | 0,3076 | 0,7763 | 40000 | 0,00065 | 0,9979 |
| 7000 | 0,2540 | 0,8080 | 50000 | 0,00027 | 0,9989 |
| 7500 | 0,2109 | 0,8343 | 62500 | 0,00011 | 0,9994 |
| 8000 | 0,1760 | 0,8562 | 66667 | 0,000091 | 0,9995 |
| 8500 | 0,1478 | 0,8745 | 76923 | $5,2 \cdot 10^{-5}$ | 0,9996 |
| 9000 | 0,1248 | 0,8899 | 90900 | $2,73 \cdot 10^{-5}$ | 0,9998 |
| 9500 | 0,1059 | 0,9030 | 100000 | $1,87 \cdot 10^{-5}$ | 0,99985 |
| 10000 | 0,0904 | 0,9141 | | | |
| 10500 | 0,0776 | 0,9236 | | | |
| 11000 | 0,0669 | 0,9318 | | | |
| 11500 | 0,0579 | 0,9389 | | | |
| 12000 | 0,0504 | 0,9450 | | | |
| 12500 | 0,0440 | 0,9504 | | | |
| 13000 | 0,0386 | 0,9550 | | | |
| 13500 | 0,0340 | 0,9592 | | | |
| 14000 | 0,0301 | 0,9628 | | | |
| 14500 | 0,0267 | 0,9660 | | | |

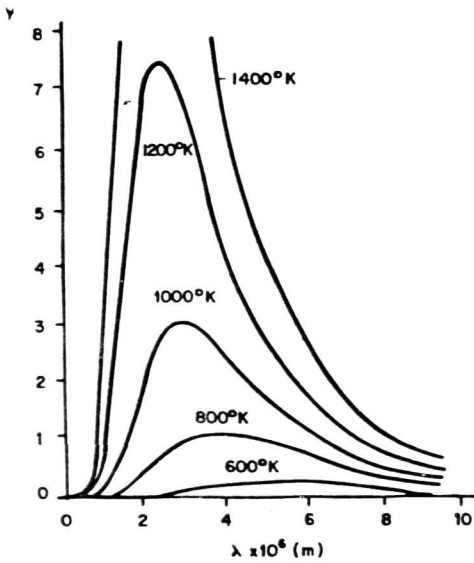


Fig. 1,4(a)

y finalmente $\lambda_{m\lambda} T = 4,9651142317...$ que sustituyendo los valores de las constantes en las unidades dadas anteriormente, se obtiene

$$\lambda_{m\lambda} T = 0,002898 \text{ (m}^\circ\text{K)} \quad (7)$$

La ecuación (7), se conoce como ley de desplazamiento de Wien, permite conocer la temperatura de un cuerpo en función de su flujo máximo y así por ejemplo, el sol tiene su máximo flujo monocromático en una longitud de onda de $5 \times 10^{-7} \text{ m}$, su temperatura considerado como cuerpo negro es de 5796°K , valor que está de acuerdo con los resultados obtenidos por otros métodos.

A partir de la ecuación (7), se obtiene la cantidad de calor por radiación que se intercambia entre los cuerpos negros. Consideremos dos superficies, paralelas a temperaturas, T_1 y T_2 respectivamente con propiedades de cuerpo negro, y separadas por un medio no absorbente de radiaciones. La cantidad de calor por unidad de tiempo emitida del cuerpo 1 al cuerpo 2 vale

$$q_{1 \rightarrow 2} = \sigma S_1 T_1^4 \quad (8)$$

y la del cuerpo 2 al 1

$$q_{2 \rightarrow 1} = \sigma S_2 T_2^4 \quad (9)$$

y el calor que se intercambia entre los dos cuerpos, si $T_1 > T_2$, y $S_1 = S_2 = S$

$$q = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = S \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (10)$$

expresando σ en $(\text{Kcal/h m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^4)$ y con el valor dado en (6)

$$q_f \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h}} \right) = S \text{ (m}^2\text{)} \cdot 4,88 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{K}^4} \right) (T_1^4 - T_2^4) (^\circ\text{K}^4) \quad (11)$$

Cuando las posiciones de las superficies son cualesquiera hay que introducir un factor de forma y posición en la ecuación (10). En efecto, consideremos dos elementos de superficies de cuerpo negro, dS_1 y dS_2 , dispuestas como se indica en la Fig. 1,4-(b). Si $d\Omega_1$ es el ángulo sólido bajo el cual se ve la superficie dS_2 desde dS_1

$$d\Omega_1 = dS_2 \frac{\cos \beta_2}{r^2} \quad (12)$$

y análogamente para el elemento dS_1 desde dS_2 ,

$$d\Omega_2 = dS_1 \frac{\cos \beta_1}{r^2} \quad (13)$$

y la cantidad de calor $dq_{1 \rightarrow 2}$ vale

$$dq_{1 \rightarrow 2} = I_n dS_1 \cos \beta_1 d\Omega_1 = I_n dS_2 dS_1 \cos \beta_1 \frac{\cos \beta_2}{r^2} \quad (14)$$

teniendo en cuenta que para cuerpos negros

$$W_n = \sigma T^4 = \frac{I_n}{\pi}$$

resulta

$$q_{1 \rightarrow 2} = W_n \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2$$

o bien

$$\frac{q_{1 \rightarrow 2}}{W_{n1} S_1} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2 = F_{12} \quad (15)$$

donde F_{12} se conoce como factor de forma de cuerpos negros, que depende únicamente, de la disposición geométrica de las superficies que intercambian calor. Análogamente la cantidad de calor $dq_{2 \rightarrow 1}$ que pasa de la superficie 2 a la superficie 1 vale

$$\frac{q_{2 \rightarrow 1}}{W_{n2} S_2} = \frac{1}{S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2 = F_{21} \quad (16)$$

La comparación de las ecuaciones (15) y (16)

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$$

y el intercambio de calor entre las superficies 1 y 2 vale

$$q = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = F_{12} W_{n1} S_1 - F_{21} W_{n2} S_2 = F_{12} S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (17)$$

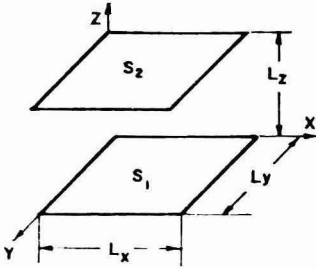
Si una superficie interior, se divide en superficies S_1 , S_2 , $S_3 \dots S_p$, y existe intercambio de calor por radiación de cuerpo negro, los factores de forma cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} F_{11} + F_{12} + F_{13} + \dots + F_{1n} &= 1 \\ &\vdots \\ F_{n1} + F_{n2} + F_{n3} + \dots + F_{nn} &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

donde los factores de forma con subíndices repetidos incluyen la posibilidad de superficies que se vean asimismas.

A continuación se incluyen expresiones analíticas para formas geométricas frecuentes en casos prácticos de radiación:

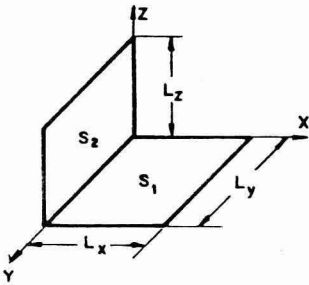
1.- Planos paralelos



$$x = \frac{L_y}{L_z} \quad y = \frac{L_x}{L_z}$$

$$F_{12} = \frac{2}{\pi x y} \left[\ln \left(\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+x^2+y^2} \right)^{1/2} + y \sqrt{1+x^2} \arctg \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} + x \sqrt{1+y^2} \arctg \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} - y \arctg y - x \arctg x \right]$$

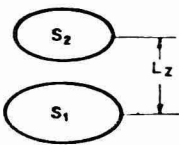
2.- Planos perpendiculares



$$x = \frac{L_z}{L_y} \quad y = \frac{L_x}{L_y}$$

$$F_{12} = \frac{1}{\pi y} \left(y \arctg \frac{1}{y} + x \arctg \frac{1}{x} - \sqrt{x^2+y^2} \arctg \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) + \frac{1}{4} \ln \left[\left(\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+x^2+y^2} \right) \left(\frac{y^2(1+x^2+y^2)}{(1+y^2)(1+x^2)} \right)^{y^2} \left(\frac{x^2(1+x^2+y^2)}{(1+y^2)(1+x^2)} \right)^{x^2} \right]$$

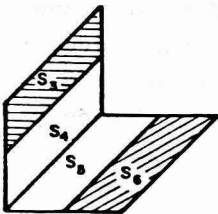
3.- Discos planos paralelos



$$x = \frac{R_2}{L_z} \quad y = \frac{L_z}{R_1}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + (1+x^2)y^2 \right) - \sqrt{1 + (1+x^2)y^2 - 4x^2y^2} \right]$$

4.- Planos en distintas posiciones

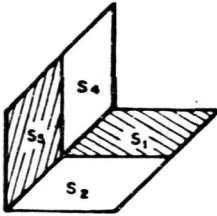


$$S_1 = S_3 + S_4$$

$$S_2 = S_5 + S_6$$

$$F_{63} S_6 = F_{21} S_2 - F_{51} S_5 - F_{42} S_4 + F_{54} S_5$$

Los valores de F_{21} , F_{51} , F_{42} y F_{54} se obtienen para la ecuación de planos perpendiculares.



$$S_1 + S_2 = S_3$$

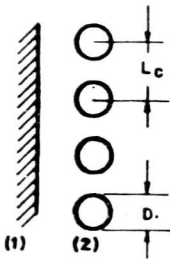
$$S_4 + S_5 = S_6$$

$$S_1 F_{15} = S_3 F_{36} - S_1 F_{14} - S_2 F_{25} - S_2 F_{24}$$

$$S_1 F_{15} = S_2 F_{24}$$

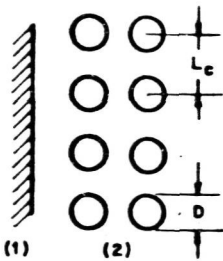
$$S_1 F_{15} = \frac{1}{2} (S_3 F_{36} - S_1 F_{14} - S_2 F_{25})$$

5.- Plano y tubos



$$F_{12} = 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{L_c}{D}\right)^2 + \frac{D}{L_c} \arctg \sqrt{\left(\frac{L_c}{D}\right)^2 - 1}}$$

$$F_{21} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{L_c}{D} - \sqrt{\left(\frac{L_c}{D}\right)^2 - 1} + \arctg \sqrt{\left(\frac{L_c}{D}\right)^2 - 1} \right]$$



$$F'_{12} = 1 - (1 - F_{12})^2$$

F_{12} es el factor de una fila

Ejemplo.- 1,4-1(1)

Una tubería de 7,5 cm de diámetro exterior tiene una temperatura en la superficie externa de 100°C . El espacio que rodea la tubería es de grandes dimensiones, y sus paredes están a 15°C . Se desea conocer la cantidad de calor perdida por radiación y por metro de tubería si se suponen cuerpos negros.

Solución:

La ecuación (18) da

$$F_{11} + F_{12} = 1$$

$$F_{21} + F_{22} = 1$$

puesto que la tubería no se ve asimismo $F_{11}=0$ y $F_{12}=1$

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$$

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12}$$

y

$$q = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$S_1 = \pi D L = \pi \cdot 7,5 \cdot 10^{-2} = 0,235 \text{ (m}^2\text{/m)}$$

$$q = 0,235 \cdot 4,88 \cdot 10^{-8} (373^4 - 288^4) = 143 \text{ (kcal/h. m de tubería)}$$

Ejemplo.- 1,4-1(2)

La sílice fundida transmite el 92% de la radiación en el intervalo de longitudes de onda $0,35 \times 10^{-6} \text{ m} - 2,7 \times 10^{-6} \text{ m}$. Calcular el % de radiación que transmite cuando éste material se coloca frente a:

- cuerpo negro a 500°C
- cuerpo negro a 1000°C
- radiación solar.

Solución:

- Para 500°C , $T = 773^\circ\text{K}$ y $\lambda_1 T = 0,35 \times 10^{-6} \times 773 = 2,70 \times 10^{-4} \text{ (m}^\circ\text{K)}$ y $\lambda_2 T = 2,7 \times 10^{-6} \times 773 = 2,08 \times 10^{-3} \text{ (m}^\circ\text{K)}$.

Para la tabla 1,4-1(b)

$$\frac{\int_0^{270} w_\lambda d\lambda}{\int_0^{\infty} w_\lambda d\lambda} \approx 0$$

$$\frac{\int_0^{2080} w_\lambda d\lambda}{\int_0^{\infty} w_\lambda d\lambda} \approx 0,060$$

y la energía que atraviese el material de sílice fundida $f = 0,08 \quad 0,92 = 0,074$; 7,4% de la energía total emitida por el cuerpo negro a 500°C .

b) Para 1000°C

$$\lambda_1 T = 0,35 \times 10^{-6} \cdot 1273 = 445 \times 10^{-6} \quad (\text{m}^\circ\text{K}) \quad \lambda_2 T = 3437 \times 10^{-6} \quad (\text{m}^\circ\text{K}) , \quad f = 0,369 \times 0,339 \approx 34\% .$$

c) La radiación solar se puede considerar como cuerpo negro

$$\text{a } T = 5796^\circ\text{K} \text{ y } \lambda_1 T = 5796 \times 0,35 \times 10^{-6} = 2028 \times 10^{-6} \quad (\text{m}^\circ\text{K}) \text{ y } \lambda_2 T = 15649 \times 10^{-6} \quad (\text{m}^\circ\text{K}) , \quad f = (0,972 - 0,0668) \times 0,92 = 0,8327 \approx 84\% .$$

Ejemplo.- 1,4-1(3)

Dos cuerpos negros planos separados por un medio no absorbente se encuentran a temperaturas de 1000°C y 100°C respectivamente. Calcular:

- La cantidad de calor que se intercambian por radiación.
- El coeficiente de transmisión de calor por radiación equivalente a un coeficiente de convección.
- Repetir los casos a) y b) cuando el cuerpo frío tiene temperaturas de 200°C , 400°C , 800°C .

Solución:

a) Por ser cuerpos negros con factores de forma unidad

$$\frac{q}{S} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) = 4,88 \cdot 10^{-8} (1273^4 - 373^4) = 1,27 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2} \right)$$

b)

$$h_r = \frac{q}{S} \frac{1}{(T_1 - T_2)} = \frac{1,27 \cdot 10^5}{900} = 141 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} \right)$$

c)

$$\left(\frac{q}{S} \right)_{200} = 1,25 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2} \right) \quad \left(\frac{q}{S} \right)_{400} = 1,18 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2} \right)$$

$$\left(\frac{q}{S} \right)_{800} = 6,34 \cdot 10^4 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2} \right)$$

$$(h_r)_{200} = 156 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} \right) \quad (h_r)_{400} = 196 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} \right)$$

$$(h)_{800} = 317 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} \right)$$

1,4-2.- Radiación de cuerpos sólidos grises

El paso de la energía radiante a través de la materia se realiza con los fenómenos de absorción reflexión y transmisión. Si se considera la unidad de energía radiante, la fracción absorbida se denomina *poder de absorción* (α), la fracción reflejada *poder reflector* (ρ), y la transmitida (τ) *poder de transmisión*

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (1)$$

Cuando en un recinto hueco de un cuerpo sólido, se colocan distintos materiales de pequeñas dimensiones, y el conjunto se mantiene a temperatura constante, se adquiere el equilibrio térmico.

La energía radiante superficial que recibe cada uno de los materiales es la misma W . Si el poder de absorción de éstos es $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Se cumple:

$$W S_1 \alpha_1 = W_1 S_1; \quad W S_2 \alpha_2 = W_2 S_2; \quad W S_n \alpha_n = W_n S_n \quad (2)$$

donde $W S_1 \alpha_1$, es la fracción de energía absorbida por el cuerpo $1 \dots n$, y por existir equilibrio térmico, es también la energía radiante $W_1 S_1 \dots W_n S_n$, desde los cuerpos $1 \dots n$, es decir, en equilibrio térmico, el poder de absorción tiene el mismo valor que el poder emisor o emisividad (ϵ). Esta relación es conocida como ley de Kirchhoff.

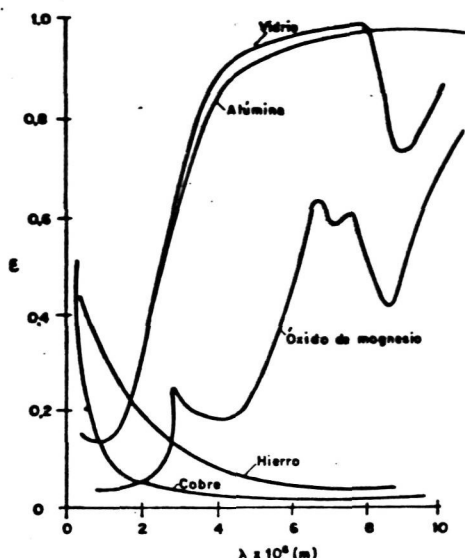
Para un cuerpo negro $\alpha = 1$, y por lo tanto, $\xi = 1$, $\tau = 0$, $\rho = 0$, es decir, se trata de un cuerpo ideal. En la naturaleza sólo existen cuerpos aproximados al cuerpo negro, entre ellos el negro de humo ($\alpha = 0,98$) y negro de platino ($\alpha = 0,99$).

En los cuerpos sólidos, el poder de absorción depende: del espectro de la energía radiante, de la naturaleza y temperatura del cuerpo que recibe la radiación, y la forma de la superficie; y análogamente, el poder emisor depende: del espectro, y forma de la superficie radiante. El poder de absorción se expresa como α_{12} donde el subíndice 1 se refiere a la temperatura del foco caliente y el 2 a la temperatura del receptor o foco frío.

En la Fig. 1,4-1(b) se representa el poder emisor o emisividad en función de la longitud de onda para los materiales Cu, Fe, MgO, Al₂O₃ y vidrio. Como puede observarse, la emisividad depende de la longitud de onda, y en forma muy marcada, para valores inferiores a $\lambda = 4 \times 10^{-6}$ m. La emisividad total se obtiene por integración en el intervalo de λ que se considere.

Por otra parte, en cuerpos de espesor superior a 2 mm hay que tener en cuenta la ecuación (1), debido a que la película en que tiene lugar la absorción de energía radiante, varía, desde 10^{-3} mm para buenos conductores, a 2 mm para los no conductores.

El poder reflector (δ) depende de las características de



la superficie. Cuando en una radiación monocromática, el ángulo de incidencia es igual al reflejado, la superficie se denomina lisa o regular, y cuando la radiación reflejada es difusa, la superficie se denomina rugosa. El poder reflector puede tener un efecto más notable sobre la emisividad de un cuerpo, debido a que, cuando la superficie no es plana, como sucede en la mayoría de los casos, existen cavidades donde los haces de energía radiante, se reflejan en las paredes continuamente

te, aumentando el poder de absorción y disminuyendo ρ . Teniendo en cuenta que en equilibrio térmico el poder emisor o emisividad es igual al poder de absorción se cumple

$$\epsilon + \rho = 1$$

y puesto que en cuerpos opacos $\tau = 0$ y ρ disminuye por las reflexiones en la cavidad, ϵ aumenta, añadiendo además la posibilidad de que la radiación que se emite sea más difusa y se aproxime a la de un cuerpo negro. Este efecto se utiliza para lograr que cavidades con elevada ϵ puedan considerarse como cuerpos negros. La efectividad aumenta con la relación L/L_e , donde L_e es la distancia entre bordes de la cavidad, y L , su longitud de profundidad. Si el poder de emisión, α , es independiente de la longitud de onda, el cuerpo se denomina gris y se cumple $\alpha_{12} = \epsilon_2$, donde ϵ_2 es la emisividad del cuerpo receptor. En general, existen pocos cuerpos que cumplen la condición de cuerpos grises, entre ellos están: el papel y el cuero que mantienen la constancia de entre 5×10^{-3} y 9×10^{-6} m.

De las consideraciones anteriores se desprende la necesidad de especificar, tanto como sea posible, el estado de las superfi-

cies. En muchas aplicaciones se consideran cuerpos grises y las emisibilidades o poder de absorción se obtienen por integración, mientras que en otros casos, hay que tener en cuenta las zonas donde la emisividad o absorción presentan variaciones acusadas. En el apéndice II se dan valores de ϵ para distintos materiales.

I.4-3. Transmisión de calor por radiación entre cuerpos grises

En los cuerpos grises se presentan fenómenos de reflexión y transmisión que complican el intercambio de energía radiante, y por ello, no resulta fácil hallar expresiones como las ecuaciones (1,4-2(1)) ó (1,4-2(2)). Una solución práctica es admitir, que los cuerpos son *grises*, es decir, que la emisividad es independiente de la longitud de onda. Esta hipótesis es tanto más real cuanto mejor se logra corresponder las emisividades espectrales a una emisividad aparente total de cuerpo gris.

Consideremos dos superficies grises planas y paralelas a temperaturas, T_1 y T_2 siendo $T_1 > T_2$, y emisividades ϵ_1 y ϵ_2 . El flujo térmico q/S que emite el foco 1 vale:

$$\frac{q_{1 \rightarrow 2}}{S_1} = W_1 + (1 - \alpha_1) \frac{q_{2 \rightarrow 1}}{S_2} \quad (1)$$

donde

$$W_1 = \epsilon_1 \sigma T_1^4 \quad W_2 = \epsilon_2 \sigma T_2^4$$

análogamente

$$\frac{q_{2 \rightarrow 1}}{S_2} = W_2 + (1 - \alpha_2) \frac{q_{1 \rightarrow 2}}{S_1} \quad (2)$$

Y la cantidad de calor que se intercambia, teniendo en cuenta las ecuaciones (1) y (2)

$$q = \left(\frac{q_{1 \rightarrow 2}}{S_1} - \frac{q_{2 \rightarrow 1}}{S_2} \right) S_1 = S_1 \left[\frac{W_1 - \alpha_1 W_2 - W_1 \alpha_1 (1 - \alpha_2)}{1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} \right] = S_1 \left(\frac{W_1 \alpha_2 - W_2 \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} \right)$$

Por la ley de Kirchhoff

$$\alpha_1 = \epsilon_1 \quad \alpha_2 = \epsilon_2$$

$$q = \frac{S_1 \sigma}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} (T_1^4 - T_2^4) \quad (3)$$

Para otras disposiciones geométricas, hay que considerar los factores de forma dados anteriormente. Así para dos superficies encerradas una dentro de otra:

$$q = \frac{S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} \quad (4)$$

En la mayoría de los hornos, los focos térmicos se encuentran rodeados de paredes refractarias, es decir, materiales que resisten las condiciones de funcionamiento; temperatura, atmósfera del horno, y tensiones térmicas. La existencia de estas paredes, complica los problemas de intercambio de calor por radiación, y una hipótesis simplificativa, es admitir, que las paredes refractarias permanecen a temperatura constante, y que el balance de intercambio térmico en la superficie es nulo reflejando toda la energía radiante que reciben.

Los factores de forma cumplen la ecuación

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{F}_{11} & + & \overline{F}_{12} & + & \dots & + & \overline{F}_{1n} & = & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \\ \overline{F}_{n1} & + & \overline{F}_{n2} & + & \dots & + & \overline{F}_{nn} & = & 1 \end{array}$$

donde \overline{F} representa la radiación directa de los cuerpos que intercambian energía más la reflejada por las paredes refractaria al cuerpo considerado. En el caso de dos cuerpos, 1 y 2

$$\overline{F}_{12} = F_{12} + F_{12} F_{R2} + F_{12} F_{R2} F_{RR} + F_{12} F_{R2} F_{RR}^2 + \dots = F_{R1} + \frac{F_{1R} F_{RR}}{1 - F_{RR}}$$

$$\overline{F}_{21} = F_{21} + \frac{F_{R1} F_{2R}}{1 - F_{RR}}$$

y

y si son cuerpos grises:

$$\frac{S_1}{S_2} q_{2 \rightarrow 1} = F_{21} W_2 S_2 + (1 - \bar{F}_{12}) S_1 W_1$$

$$S_2 \frac{q_{1 \rightarrow 2}}{S_1} = \bar{F}_{12} S_1 W_1 + (1 - \bar{F}_{21}) S_2 W_2$$

y

$$q = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = \frac{S_1 \sigma}{\frac{1}{\bar{F}_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1 \right)} (T_1^4 - T_2^4) \quad (5)$$

$$q = (\bar{F}_{12})_G S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (6)$$

donde $(\bar{F}_{12})_G$ es el factor de forma para cuerpos grises envueltos con paredes refractarias.

Ejemplo.- 1,4-3(1)

Se desea termostatar un recipiente a 100°C recubriendo las paredes con capas plateadas. La temperatura en ambiente exterior es de 25°C . Calcular:

- Pérdidas de calor al exterior por unidad de superficie en función del número de capas plateadas.
- Espesor de un aislante térmico de $k = 0,037 \text{ (Kcal/m}^\circ\text{C)}$ para las mismas pérdidas de calor que en el caso a) .

Las dimensiones del recipiente son tales que pueden considerarse paredes planas y la emisividad normal total de la plata es de 0,02.

Solución:

a) Las pérdidas de calor por convección al exterior y paredes verticales puede tomarse $h_c = 0,139(\Delta t)^{0,33}$ (Kcal/hm²°C)

. Pérdidas por convección $(T_e - 298)h_c$

. Pérdidas por radiación $\sigma \epsilon (T_e^4 - 298^4)$

. Pérdidas totales

$$\frac{q}{S} = 0,139 (T_e - 298)^{1,33} + 0,02 \cdot 4,88 \cdot 10^{-8} (T_e^4 - 298^4) \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2} \right) \quad (1)$$

Si se desprecia la conducción y convección a través de las capas plateadas, para dos capas

$$\frac{q}{S} = \frac{\sigma}{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} (T_i^4 - T_e^4) = \frac{\sigma}{\frac{2}{\epsilon} - 1} (T_i^4 - T_e^4)$$

con una capa intermedia entre las dos anteriores

$$\frac{q}{S} = \frac{\sigma}{\left(\frac{2}{\epsilon} - 1 \right)^2} (T_i^4 - T_e^4)$$

y para n capas intermedias

$$\frac{q}{S} = \frac{\sigma}{\left(\frac{2}{\epsilon} - 1 \right)^{(n+1)}} (T_i^4 - T_e^4) \quad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$0,139 (T_e - 298)^{1,33} + 0,02 \cdot 4,88 \cdot 10^{-8} (T_e^4 - 298^4) = 4,88 \cdot 10^{-8} (373^4 - T_e^4)$$

Obteniéndose el número de capas intermedias para valores dados de T_e y por las ec. (1) ó (2) las pérdidas de calor como se indica en la tabla adjunta,

| | | |
|---|------|------|
| $T_e(^{\circ}K)$ | 311 | 300 |
| n | | 7 |
| $\left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{kcal}{h.m^2}\right)$ | 4,40 | 0,40 |

b)

$$\frac{q}{s} = \frac{k}{\Delta x} (T_i - T_e)$$

Para

| | | | |
|-------|---|------------------------------------|-----------------------------|
| 303°K | y | $\left(\frac{q}{s}\right) = 2,68$ | $\Delta x = 0,96 \text{ m}$ |
| 300°K | | $\left(\frac{q}{s}\right) = 0,788$ | $\Delta x = 3,42 \text{ m}$ |

I,4-4. Radiación de gases

En los capítulos anteriores se ha considerado que la transmisión de calor por radiación entre cuerpos sólidos tiene lugar sin intervención del medio gaseoso que separa dichos cuerpos. Esta hipótesis no es cierta, salvo en moléculas simples, y a temperaturas no muy altas. La mayoría de los gases que se emplean en procesos industriales, emiten y absorben energía radiante en determinadas zonas del espectro de frecuencias o longitudes de onda, por lo cual, hay que tener en cuenta no sólo la naturaleza del gas sino también el espesor y densidad del medio gaseoso, por los efectos del poder transmisor.

La absorción o emisión de energía radiante en los gases de

pende del tipo de fenómeno que tiene lugar en la producción o absorción de un fotón. Si el fenómeno es una modificación del nivel energético sin separación de cargas libres, se denomina transición enlace-enlace, distinguiéndose los casos de átomos y de moléculas. En los átomos, los cambios energéticos producen líneas espectrales con pequeña variación de frecuencia entre cada una de ellas. Estas líneas se extienden a las zonas de ultravioleta, visible y cerca del infrarrojo. En las moléculas poliatómicas se producen además variaciones en los estados de vibración y rotación, que producen espectros en el infrarrojo, y extremo del infrarrojo. Cuando la energía del fotón es elevada, se produce el fenómeno enlace-ión, es decir, la aparición de una carga, o el proceso ión-enlace, que tiene lugar con desprendimiento de fotones.

A temperaturas superiores a los 1000°K , los gases tienen algunos electrones e iones en estado libre, en número tanto mayor cuanto mayor es la temperatura. A temperaturas de 10^6 $^{\circ}\text{K}$ como son las que se alcanzan en la fusión nuclear, el medio es un plasma completo con iones de átomos muy ligeros y electrones. El intercambio de energía radiante, en este caso, se denomina partícula libre-partícula libre y pertenecen a éste tipo de cambios de energía, iones o electrones libres en un gas ionizado, fenómeno conocido como *Bremsstrahlung* o efecto ciclotrónico, originado por el giro de partículas cargadas.

En general no hay una diferencia neta entre los tres fenómenos mencionados sino zonas de transición, por ello, se producen bandas o zonas de emisión y absorción de energía radiante, formadas también por el hecho de que las energías de vibración son mayores que las mínimas de rotación y aparecen simultáneamente.

Los aspectos anteriores se complican más cuando existen llamas luminosas o partículas en suspensión, como sucede en los productos de combustión de los equipos que generan calor por transformaciones químicas.

Cuando un haz monocromático de energía radiante atraviesa una capa de espesor L de un gas, la variación de flujo de energía radiante vale

$$\frac{d\phi_\lambda}{\phi_\lambda} = -m_\lambda d\lambda \quad (1)$$

donde m_λ es el coeficiente de absorción monocromático y $\phi_\lambda \equiv \frac{q_\lambda}{S}$

Integrando la ecuación (1) resulta,

$$\phi_\lambda = \phi_{\lambda_0} \exp(-m_\lambda L) \quad (2)$$

Conocida como ley de Beer. A partir de la ecuación (2) se define el poder absorbente monocromático como

$$\alpha_{\lambda,L} = \frac{\phi_{\lambda_0} - \phi_{\lambda_0} \exp(-m_\lambda L)}{\phi_{\lambda_0}} = 1 - \exp(-m_\lambda L) \quad (3)$$

y teniendo en cuenta la ley de Kirchhoff, $\epsilon_{\lambda,L} = \alpha_{\lambda,L}$

Si se considera un elemento de volumen del gas dV radiando a un área dS , según la ec. 1,4-1(14) puede escribirse

$$dq_\lambda = \frac{W_{\lambda,n}}{\pi} m_\lambda \frac{\cos \beta}{r^2} dS, \quad (4)$$

e integrando a todo el volumen

$$q_\lambda = 4m_\lambda W_{\lambda,n} V \quad (5)$$

y si por otra parte

$$q_\lambda = \bar{\epsilon}_\lambda W_{\lambda,n} S \quad (6)$$

donde $\bar{\epsilon}_\lambda$ es la emisividad monocromática semiesférica media de todo el gas respecto a la superficie S . De las ec. (5) y (6)

$$\bar{\epsilon}_\lambda = \frac{4V}{S} m_\lambda \quad (7)$$

Donde $4V/S$ se define, como el radio hidráulico del recinto que ocupa el gas y que recuerda otra expresión análoga en mecánica de fluidos.

Por otra parte la emisividad de una semiesfera respecto a su centro vale,

$$\epsilon_{\lambda} = 1 - \exp(-m_{\lambda}r) \simeq m_{\lambda}r \quad (8)$$

El cálculo de la emisividad respecto al centro resulta difícil para recintos de geometrías complicadas. Experimentalmente se comprueba que si estos cuerpos se tratan como una semiesfera de radio l_0 se cumple

$$\frac{\bar{\epsilon}_{\lambda}}{\epsilon_{\lambda}} \simeq 1 \quad (9)$$

con un error 10% . A partir de la ecuación (8) se calcula ϵ_{λ} , conocido m_{λ} , y finalmente $\bar{\epsilon}_{\lambda}$. El valor l_0 está referido a las condiciones ideales es decir $P_{l_0} \simeq 0$, P es la presión del gas en el recinto. Para otros valores, del producto $P l_0$, la longitud equivalente l_e resulta menor que la obtenida con la ecuación (8) y por ello para fines prácticos, se toma un valor l_e tal que cumple la relación

$$\frac{l_e}{l_0} = 0,85$$

1,4-5. Transmisión de calor por radiación entre un gas y una superficie que le rodea

Si la superficie tiene características aproximadas al cuerpo negro

donde ϵ_g es la emisividad del gas a la temperatura T_g que se calcula por el método dado anteriormente. $\bar{\alpha}_{gn}$ es el poder de absorción del gas a T_g y para las radiaciones procedentes de un cuerpo negro a temperatura T_s . Afortunadamente en muchas aplicaciones las emisividades son del orden de 0,8-0,9 y se puede utilizar la expresión

$$q = \bar{\epsilon}_e \sigma S (\bar{\epsilon}_g T_g^4 - \bar{\alpha}_{gn} T_s^4) \quad (2)$$

donde

$$\bar{\epsilon}_e = \frac{\bar{\epsilon}_g + 1}{2}$$

Si el ángulo sólido bajo el cual se ve la masa gaseosa es pequeña, se cumple $\bar{\epsilon}_e \simeq \bar{\epsilon}_g$.

1.5. Transmisión de calor con modos en serie o simultáneos de conducción, convección y radiación.

El intercambio de calor entre focos a distinta temperatura puede tener lugar a través de resistencias térmicas correspondientes a los modos de conducción, convección y radiación. Sin excluir la posibilidad de transmisión de calor simultánea de dos o tres de éstos modos. Así por ejemplo, en el caso de calentamiento de un gas que circula por una tubería, si la temperatura de la superficie interior no es muy elevada, el modo principal de intercambio de calor es la convección, pero también intervienen la radiación y conducción, aunque en menor proporción. Cuando la temperatura se eleva, los fenómenos de radiación pueden ser importantes por ser función de la temperatura elevada a la cuarta potencia. En otros casos, los modos de transmisión se realizan en serie, y se puede hallar la resistencia térmica total en función de las resistencias térmicas parciales. Como caso general consideramos los tres modos de transmisión de calor en serie

$$q_t = q_c = q_{cn} = q_r \quad (1)$$

donde q_t es el calor total (Kcal/h) y q_c , q_r las correspondientes a: conducción, convección y radiación. Si se tiene en cuenta la analogía entre los fenómenos térmicos y eléctricos se puede escribir

$$q_t = \frac{T-t}{R_t} ; \quad q_c = \frac{T-T_c}{R_{Tc}} ; \quad q_{cn} = \frac{T-t_1}{R_{Tcn}} ; \quad q_r = \frac{T-t}{R_{Tr}} \quad (2)$$

donde R_{Tc} y R_{Tcn} son las resistencias térmicas de conducción y convección, y R_{Tr} está dada

$$R_{Tr} = \frac{1}{\epsilon \sigma (t_1^4 - t^4)} \quad (3)$$

o expresiones equivalentes cuando se trate de cuerpos grises o situaciones complicadas.

De (2) y (3) resulta,

$$R_t = R_{Tc} + R_{Tcn} + R_{Tr} \quad (4)$$

y en forma análoga para convección, conducción y radiación simultáneamente o en paralelo

$$q_t = q_c + q_{cn} + q_r \quad (5)$$

y

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_{Tc}} + \frac{1}{R_{Tcn}} + \frac{1}{R_{Tr}}$$

Las ecuaciones (4) y (5) o las ecuaciones que pueden obtenerse considerando distintos modos de transmisión de calor en serie, paralelo o serie-paralelo tienen la importancia de visualizar globalmente el fenómeno de intercambio de calor. Se ha de tener en cuenta que son expresiones simplificadas, es decir, se admite la constancia de las resistencias térmicas en función de la temperatura, lo cual puede ser más o menos aproximado, para la conducción y con-

vección, pero cuando existe radiación, hay que hallar un valor de $R_{T,r}$ poderado respecto al intervalo de temperaturas.

Por otra parte, las ecuaciones anteriores permiten conocer cual de los modos de transmisión de calor hay que favorecer en mayor proporción para obtener una suma de resistencias parciales de valor parecido. Cuando existe gran diferencia entre las resistencias térmicas, la que tiene mayor valor es la que controla el proceso de transmisión de calor si el acoplamiento es en serie.

NOMENCLATURA DEL CAPITULO 1

- A Corriente eléctrica (Amperios), Sección recta (m^2).
- C_0 Velocidad de la luz en el vacío ($2,98.10^{10}$ m/s).
- F Factor de forma geométrico, sin dimensiones, F , cuerpos grises.
- h Coeficiente de transmisión de calor ($Kcal/hm^2^{\circ}C$), con subíndice r referido a radiación. Unidad de tiempo.
- h_p constante de Plank ($6,62.10^{-27}$ erg.s).
- I Intensidad de radiación ($Kcal/hm^2$)
- k conductividad térmica ($Kcal/hm^{\circ}C$)
- k_B constante de Boltzmann ($1,3804.10^{-23}$ J/ $^{\circ}K$)
- L Longitud
- L_e Longitud equivalente
- m Coeficiente de observación; Subíndices: λ monocromático; g gris; n negro; e equivalencia; g gas.
- R Resistencia; subíndices: e, eléctrica; T_c de conducción; T_{cn} convección; r radiación.
- q Caudal de calor o energía térmica ($Kcal/h$).
- $\left(\frac{q}{s}\right)$ Flujo térmico ($Kcal/hm^2$).
- S superficie, entropía.
- T Temperatura en sólidos ($^{\circ}C$), absoluta ($^{\circ}K$), ($^{\circ}R$) escala Rankine, subíndice m , media logarítmica ($^{\circ}C$).

t temperatura en fluidos ($^{\circ}\text{C}$)

W Flujo térmico emisión (Kcal/hm^2) , subíndices: n , cuerpo negro; λ longitud de onda; ν frecuencia.

α Poder de absorción.

ϵ Poder emisor.

Δ Incremento

λ Longitud de onda

ν Frecuencia (c/λ)

ρ Poder reflector

Ω Angulo sólido

τ Poder de transmisión

σ Constante de cuerpo negro, de Stefan-Boltzmann. ($4,88 \cdot 10^{-8}$ ($\text{Kcal}/\text{hm}^2 \cdot ^{\circ}\text{K}^4$))

BIBLIOGRAFIA

CHAPMAN, .A.J. Transmisión de Calor. 2^a Ed. Traducida del inglés por Ediciones Interciencia. Madrid, 1968.

DUNKLE, R.V., Thermal Radiation, Tables and Applications. Trans. ASME, 76, 549-52 (1954).

ECKERT, E.R. and DRAKE, M.R., Heat and Mass Transfer, Mac Graw Hill, New York (1959).

FISHENDER, M. and SAUNDERS, O.A., An Introduction to Heat Transfer, Oxford at the Clarendon Press (1950).

GEBHART, B., Heat Transfer, Mac Graw Hill, New York (1961).

- GEBHART, B., Unified Treatment for Thermal Radiation Processes
Gray Diffuse Radiators and Absorbers ASME paper 57-A-34
(1957).
- GOUFFE, A., Transmisión de la Chaleur par Rayonnement, Eyrolles
Paris, 1968.
- GREGORIC, R. Cambiadores de calor. Traducción en castellano,
Ediciones Urmo, Bilbao (1968).
- GROBER, E., GRIGULL, V., Grundgesetze der Wärmeübertragung,
Springer Verlag, Berlin, Göttinger (1955).
- HOTTEL, H.C. and SEROFIN, A.F., Radiative Transfer, Mac Graw
Hill, New York (1967).
- HOTTEL, H.C., Notes on Radiant Heat Transmisión, Cambridge Mass.
(1951).
- HOTTEL, H.C. and COHEN, E.S., Radiant Heat Exchange in a Gas
Filled Furnace J. A.I.Ch.E 4, 3, (1957).
- JACOB, M., Heat Transfer, Vol. I, Jhon Wiley and Sons, New York
(1956).
- JACOB, M., Heat Transfer, Vol. II, Jhon Wiley and Sons, New York
(1957).
- KERN, D.Q., Process Heat Transfer, McGraw Hill, New York (1950)
- KPEITH, F., Transmisión del Calor por Radiación. Traducida del
inglés por Compañía Editorial Continental, México 22 (1965).
- KUTATELADGE, S.S. and BORISHANSKII, V.M., An Concise Encyclope-
dia of Heat Transfer (Traducida del ruso) Pergamon Press
(1966),
- MARIÑO, R., Producción y Transmisión Industrial del Calor, Edi-
torial Dosset, Madrid, 1947.
- Mac ADAMS, Heat Transmisión, McGraw-Hill New York (1956).
- MIKHEYEV, M., Fundamentals of Heat Transfer, Place Publishers,
Moscu.

- MISSENARD, A., Le chauffage et le rafraichissement par rayonnement Eyrolles, Paris (1959).
- MOON, P., Scientific Bases of Illuminating Engineering, McGraw-Hill (1936)
- OZISIK, M.N., Radiative Transfer, Jhon Wiley and Sons, New York (1973).
- PITTS, D.R. and LEIGHTON, E. SISOM. Heat Transfer, McGraw-Hill, New York (1977).
- RIBAUD EL BRUN, Transmission de le Chaleur, Tome I, Rayonnement technique, Sennac, Paris (1948).
- RHOSHENOW, W.M. and Hartnett, J.P., Handbook of Heat Transfer, McGraw Hill, New York (1973).
- SHOEMAKER, R.W., Chauffage par rayonnement, Eyrolles, Paris (1954).
- SIEGEL, R. and HOWELL, J.R., Thermal Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, New York (1972).
- SPARROW, E.M. and CESS, R.R., Radiation Heat Transfer Brooks/Co le Publ. Co. Belmont, Calif (1966).
- SPARROW, E.M., Applications of Variational Methods to Radiation Heat Transfer Calculations Trans. ASME 82, 375 (1960).
- TIEN, C.L., Thermal Radiation Properties of Gases, Advances in Heat Transfer, Vol. 5, Academic Press, New York (1958).
- VIAN, A. y OCON, J., Elementos de Ingenieria Química, 3^a Ed. p.180-285. Ed.Aguilar, Madrid (1961).

CAPITULO 2

ECUACIONES GENERALES DE TRANSMISION DE CALOR Y PROPIEDADES TERMICAS

INTRODUCCION

En el Capítulo 1 se ha tratado los modos de transmisión de calor de conducción y convección desde un punto de vista fenomenológico e intuitivo. En este Capítulo se trata de considerar formalmente las ecuaciones que relacionan la distribución de los campos de temperatura en fluidos o sólidos, en reposo o movimiento. La generalización de las ecuaciones del campo de velocidades en un fluido puede extenderse a cuerpos sólidos sin más que considerar el cambio de la viscosidad por el módulo de rigidez, obteniéndose las ecuaciones de tensiones que combinadas con las deformaciones, permiten abordar los problemas de tensiones térmicas y en definitiva, la compatibilidad de los campos de temperaturas con los flujos térmicos que lleva implícitos la conocida ecuación de Fourier. Las ecuaciones de fluidos no newtonianos pueden obtenerse en forma análoga.

La simple comparación de las ecuaciones generales conduce a los grupos adimensionales y su interpretación, y el lector puede comparar sus ventajas y desventajas con el método del análisis dimensional.

Las ecuaciones análogas entre transmisión de calor, difusión y campos eléctricos conducen comodamente a la potencialidad de métodos experimentales de los tres campos anteriores, así, como las posibilidades de métodos de cálculo gráficos, analógicos y numéricos.

Los fenómenos térmicos de aplicaciones industriales se pue-

den tratar aisladamente, pero resulta conveniente considerarlos, aunque sea brevemente, como subsistemas cuya importancia depende de cada caso particular. Este tipo de organización no menoscaba el orden clásico de los textos de transmisión de calor añadiendo una panorámica más amplia.

En el tratamiento matemático de las ecuaciones, las situaciones reales se expresan en forma lacónica como ecuaciones no lineales, pero la ingeniería necesita conocer en forma intuitiva y lógica la naturaleza de los fenómenos y su interpretación y, por ello, dado que en los fenómenos de conducción la conductividad térmica es una variable importante, se han desarrollado en forma breve los conceptos para predecir sus valores y variaciones con la temperatura, dando así una interpretación más racional a las tablas de conductividades y otras propiedades que se incluyen en el Apéndice II.

2.1. Sólidos

En los ejemplos del Capítulo 1 se ha visto la importancia y necesidad de conocer los campos de temperaturas que, desde un punto de vista ingenieril, se traduce en la cantidad de calor que se debe eliminar o aportar a un proceso, elección de materiales, y equipo que soporte en condiciones satisfactorias el campo de temperaturas creado por la presencia de focos o manantiales térmicos.

En un medio isótropo donde el calor fluye normal a la superficie en régimen estacionario se cumple la ecuación de Fourier,

$$\left(\frac{q}{S}\right)_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

donde S es la superficie normal al eje x . El signo menos pone de manifiesto que el calor se transmite en el sentido de las temperaturas decrecientes. Para flujos paralelos a los ejes Y y Z se escribe:

$$\left(\frac{q}{S}\right)_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{y} \quad \left(\frac{q}{S}\right)_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2)$$

y para los 3 ejes en notación vectorial

$$\frac{q}{S} = -k \text{ grad } T \quad (3)$$

Para conocer la distribución de temperatura en un cuerpo sólido que transmite calor por conducción consideremos un sólido *ideal*, es decir, con propiedades constantes tanto térmicas como mecánicas y sin que en su interior se genere calor por agentes externos o internos. Si un elemento de volumen del sólido, dx, dy, dz Fig. 2,1(a) se localiza en los ejes

X, Y, Z de tal manera que la temperatura en las caras correspondientes a $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ es superior a la temperatura de las caras opuestas, se produce un flujo térmico que *idealmente*, se puede descomponer en las direcciones perpendiculares a las caras del elemento diferencial considerado, sin más que admitir superficies adiabáticas en caras paralelas a la dirección del flujo térmico que se considere. Así, para el flujo térmico en la dirección del eje OX , las caras adiabáticas son: En el plano XZ $y = 0$ e $y = dy$ y en el plano XY $z = 0$ y $z = dz$. La cantidad de calor transmitida en cada dirección cumple la ecuación (3) que aplicada a las caras opuestas y teniendo en cuenta que no hay generación de calor en el sólido y el régimen es estacionario, se obtienen las relaciones

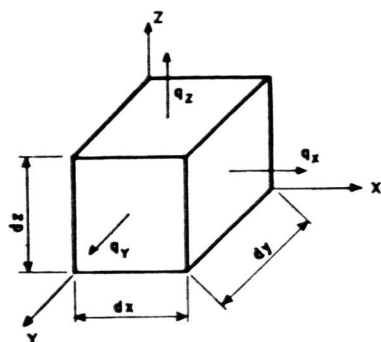


Fig. 2,1(a)

$$q_{x=0} - q_{x+dx} = -k \left[\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T - \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz = 0$$

$$q_{y=0} - q_{y+dy} = -k \left[\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(T - \frac{\partial T}{\partial y} dy \right) \right] dx dz = -k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy dz = 0 \quad (4)$$

$$q_{z=0} - q_{z+dz} = -k \left[\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T - \frac{\partial T}{\partial z} dz \right) \right] dx dy = -k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx dy dz = 0$$

La suma de los términos de (4) prescindiendo del signo menos, conduce a la conocida ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

o en notación vectorial

$$\Delta(T) = 0 \quad (6)$$

o

$$\nabla(\nabla T) = 0 \quad (7)$$

donde Δ representa el operador de Laplace o Laplaciano

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{y } \nabla \text{ el operador nabla } \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

Si se considera régimen *no estacionario*, el campo de temperaturas es variable y se produce una acumulación de calor simultáneamente con la conducción. Si se admite que la variación de temperatura no es muy elevada, se sigue, que las propiedades del elemento considerado no se alteran, y si además, el calor almacenado en el elemento se utiliza solamente en aumentar la temperatura, la cantidad total en el tiempo $d\tau$ vale $\rho c_p \frac{dT}{d\tau}$ donde ρ es la densidad del sólido, c_p calor específico a presión constante y τ el tiempo. La suma de (4) en régimen no estacionario es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (8)$$

donde α es la difusividad térmica $\rho C_p / k$ expresada en (m^2/h) o unidades equivalentes y representa la velocidad de acumulación de calor en un medio donde tiene lugar la conducción. Análogamente la ecuación de continuidad del flujo térmico puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial q'_x}{\partial x} + \frac{\partial q'_y}{\partial y} + \frac{\partial q'_z}{\partial z} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (9)$$

donde $q'_i = \frac{q_i}{S}$

Continuando con el elemento diferencial de la Fig. 2,1(a), si simultáneamente con la conducción se produce generación de calor en el sólido, por agentes externos o internos, en cantidad tal que no altera la constancia de las propiedades térmicas, a las ecuaciones (4) y (8), hay que añadir el calor generado por unidad de volumen Q expresado en $(Kcal/h.m^3)$ o unidades equivalentes. Si el calor se produce en régimen estacionario,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \quad (10)$$

que suele indicarse en la bibliografía como ecuación de Poisson en régimen no estacionario.

Las ecuaciones (5), (8) y (10) se han establecido para un sólido ideal y son casi siempre utilizadas para situaciones reales, pero se debe tener en cuenta, las limitaciones que se derivan por la variación de las propiedades térmicas, tanto por la presencia del campo de temperaturas, como por cambios estructurales de los materiales, debidos a fenómenos internos. La ecuación (10) en forma más general puede escribirse

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} - Q \quad (11)$$

donde k_x , k_y , k_z pueden ser funciones de la posición y de la temperatura, y por ello, en la ecuación (11) hay que tener en cuenta su carácter no lineal. Si k es función de T pero no de la dirección, aplicando el operador ∇ se obtiene la ecuación

$$\nabla(\nabla k T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - Q$$

o

$$k \Delta T + \frac{\partial k}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - Q \quad (12)$$

Si la difusividad α se admite constante, mientras que k , es función de T , con el cambio de variable

$$\Theta = \frac{1}{k_0} \int_0^T k dT$$

y si

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{k}{k_0} \frac{\partial T}{\partial t} ; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{k}{k_0} \frac{\partial T}{\partial x} ; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{k}{k_0} \frac{\partial T}{\partial y} ; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{k}{k_0} \frac{\partial T}{\partial z}$$

la ecuación (11) toma la forma

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{Q}{k_0} \quad (13)$$

Para medios continuos no isótropos la ecuación (11) se transforma en

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ & = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - Q \end{aligned} \quad (14)$$

Las formas cilíndricas y esféricas son frecuentes en muchas aplicaciones por: menor espesor para una resistencia mecánica dada, y fácil fabricación en serie, y las ecuaciones anteriores, en coordenadas rectangulares, se manejan con mayor comodidad en coordenadas cilíndricas o esféricas.

Coordenadas cilíndricas

$$\text{Haciendo} \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

La ecuación (10) toma la forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \quad (15)$$

En muchas aplicaciones T no depende del ángulo θ y desaparece el término $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$ y si además la dimensión z es grande la transmisión de calor es solamente radial y la ecuación (15) se transforma en

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \quad (16)$$

Coordenadas esféricas

Haciendo $x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$
resulta la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \quad (17)$$

y si T no depende de θ y φ se obtiene la ecuación simplificada

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{k} \quad (18)$$

Condiciones de contorno

La solución de las ecuaciones anteriores exige el conocimiento de las condiciones en el medio y en la superficie.

- 1) *Iniciales.* En régimen no estacionario, hay que precisar la situación del cuerpo en el tiempo cero. Si la temperatura es constante en todo el sólido esta condición se expresa $T = T_0$ para $\tau = 0$ y si es una función de la posición, se escribe, $T = T_0(x, y, z)$ en $\tau = 0$ indicando con ello, que la solución del problema debe ser una expresión tal que, cuando el tiempo tienda a cero, se cumpla

$$T(x, y, z, \tau) = T_0(x, y, z) \quad \tau \rightarrow 0$$

Condiciones en la superficie de los cuerpos

a) Aislamiento

No hay flujo térmico a través de la superficie y la ecuación de Fourier conduce a $\partial T / \partial x = 0$, si la superficie es normal al eje OX , y en general, $\partial T / \partial n = 0$. Esta condición se corresponde con un aislamiento térmico perfecto y, por lo tanto, es un caso límite de las situaciones reales.

b) Yuxtaposición de superficies

Si las superficies separan dos cuerpos 1 y 2 y la unión entre ellas es perfecta, se cumple

$$q_1 = q_2 \quad k_1 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 = k_2 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_2 \quad (19)$$

donde n es un elemento de superficie, normal al flujo térmico, y las temperaturas T_1 y T_2 en la separación de medios, son iguales. La hipótesis anterior, se aplica frecuentemente a casos reales, como se verá más adelante, pero hay que tener en cuenta la dificultad de lograr una unión perfecta en cuerpos yuxtapuestos. La superficie de un sólido es siempre irregular, aun en el caso de superficies pulimentadas o lapeadas, y ésta irregularidad, produce una unión por puntos o zonas con otra superficie análoga, y solo a estos puntos, se puede aplicar el criterio de igualdad de temperaturas. Normalmente, el medio que existe entre superficies reales yuxtapuestas produce una caída de temperatura equivalente, originada por la resistencia *térmica de los contactos*. Esta resistencia térmica de contacto, llega a ser muy pequeña; en el caso de metales líquidos en contacto con superficies de cuerpos sólidos, en la deposición de capas metálicas por electrólisis o destilación, y en uniones por soldadura.

c) *Superficie a temperatura determinada*

Frecuentemente son temperaturas constantes, o función de la presión y del tiempo. Este tipo de condiciones, son necesarias en la solución de las ecuaciones anteriores y suelen ser aproximaciones de casos reales. Normalmente, estas condiciones pueden obtenerse en casos límites de otras condiciones de contorno, como sucede al admitir temperatura constante en la superficie, lo cual se cumple cuando el coeficiente de convección es muy elevado, y el fluido que rodea al cuerpo sólido se mueve a una velocidad también elevada.

d) *Flujos térmicos determinados*

Pueden ser constantes o función de la posición y del tiempo. Si varios flujos térmicos concurren simultáneamente sobre una superficie debe cumplirse

$$\sum \pm \frac{q}{S} = \mp k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (19)$$

e) Superficies con convección o radiación

Cumplen las ecuaciones correspondientes a los fenómenos de convección o radiación y sustituyendo el flujo térmico en la su perficie se obtiene

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) = h_c(T_s - t) \quad (20)$$

donde T_s es la temperatura de la superficie y t la temperatura del fluido y para radiación

$$-k\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) = (\bar{F}_{s1})_G (T_s^4 - T_r^4) \quad (21)$$

donde $(\bar{F}_{s1})_G$ es el factor de forma que incluye la emisividad de los cuerpos que intercambian calor por radiación.

Las ecuaciones (20) y (21) pueden cumplirse simultáneamente en la superficie como un caso particular de la ecuación (19).

Ejemplo.- 2-1(a)

Un material de forma paralelepipedica con dimensiones L_x , L_y , L_z está a una temperatura T_0 uniforme en toda su masa. En un tiempo muy corto, se introduce en una gran cantidad de fluido a temperatura T_∞ y con un coeficiente de convección solido-fluido h . Estudiar las ecuaciones y condiciones para los casos, siendo $T_0 > T_\infty$:

- a) Valores de h muy elevados en todas las caras;
- b) Valores de h moderados en todas las caras;
- c) El sólido se mantiene estando en el fluido de tal forma que una de las caras se encuentre en la condición b), y

las restantes caras en la condición a).

Solución:

Se admite que las propiedades térmicas del paralelepípedo son conocidas y que se pueden considerar constantes, con valores medios ponderados en el intervalo $T_0 - t$.

- a) La ecuación de conducción es del tipo Laplace con el término de régimen no estacionario. Si h es muy elevado, se puede admitir que la superficie del sólido adquiere instantáneamente la temperatura del fluido t_0 y las ecuaciones son:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \\ \tau > 0 \end{array}$$

con las condiciones

$$T = T_0 \quad \text{en} \quad \tau < 0 \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{array}$$

y

$$T = t_0 \quad \text{en} \quad \tau \geq 0 \quad \text{en} \quad \begin{array}{ll} x=0 & x=L_x \\ y=0 & y=L_y \\ z=0 & z=L_z \end{array}$$

b) La ecuación diferencial y la primera condición se mantienen como en a) y la segunda condición es de la forma

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T-t_0) & \text{en } x=0 & & -k \frac{\partial T}{\partial x} &= h(T-t_0) & \text{en } x=L_x & & \text{para } \tau \gg 0 \\ k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T-t_0) & y=0 & & -k \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T-t_0) & y=L_y \\ k \frac{\partial T}{\partial z} &= h(T-t_0) & z=0 & & -k \frac{\partial T}{\partial z} &= h(T-t_0) & z=L_z \end{aligned}$$

c) La ecuación diferencial es la misma que en a). 5 caras están con la segunda condición de a) y la cara que está flotando

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h_a(T-t_a)$$

donde h_a es el coeficiente de convección y radiación al ambiente y t_a la temperatura de éste. Si $h_a \rightarrow$ cero, puede admitirse que la cara que flota está aislada puesto que $\frac{\partial T}{\partial x} \rightarrow$ cero.

Ecuación de Fourier modificada

Los desarrollos de los últimos 20 años en los campos de aeronáutica y reactores nucleares, entre otros, han puesto de manifiesto la anomalía de la ecuación de Fourier

$$-k \text{ grad } T = \frac{q}{S} = q' \quad (1)$$

donde se admite que el mecanismo de transmisión de calor se establece instantáneamente, lo cual resulta difícil a distancias pequeñas o con tiempos breves. P. Vernotte y C. Cattaneo en 1956 propusieron una ecuación que tuviese en cuenta la inercia térmica, de la forma

$$-k \text{ grad } T = q' + \tau^* \frac{\partial q'}{\partial \tau} \quad (2)$$

siendo τ^* una constante de tiempo muy pequeña que, en el caso de gases, es del orden de magnitud de algunos caminos libres medios. Si la ecuación (2) se introduce en la ecuación en régimen no estacionario considerando solamente la dirección x , se tiene a partir de (1)

$$-\frac{\partial q'}{\partial x} = g_p \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (3)$$

que sustituyendo en (2)

$$-k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial q'}{\partial x} + \tau^* \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial \tau} \quad (4)$$

y si $-\frac{\partial q'}{\partial x} = g_p \frac{\partial T}{\partial x \partial \tau}$ resulta

$$\frac{k}{g_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \tau^* \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \quad (5)$$

La ecuación (5) es del tipo *hiperbólico*, frecuente en el estudio de ondas y que denominaremos ecuación *modificada de Fourier*. En la mayor parte de los casos, τ^* es despreciable, y la ecuación (5) se transforma en la conocida ecuación *parabólica*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (6)$$

cuando τ^* no es despreciable, como sucede, al establecerse un campo térmico en la superficie donde pueden producirse tensiones térmicas elevadas, o fenómenos de nucleación rápida, es importante considerar la solución de la ecuación (5). Así, en el estudio de un hipotético accidente en un reactor nuclear con contacto rápido entre UO_2 y sodio fundido, la temperatura en la interfase es de 1400°C con la ecuación (6) y de 2600°C con la ecuación modificada (5).

La ecuación (5) puede escribirse en notación vectorial

$$c^2 \nabla^2 T = \frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \quad (7)$$

donde $c^2 = \alpha / \tau^*$ representa la velocidad de propagación de ondas térmicas, análoga, a la ecuación movimiento de ondas en electricidad. La idea de propagación térmica por ondas, fue considerada por Maxwell y modernamente, los fundamentos básicos han sido revisados por Bubnov y Luikov (véase bibliografía).

2.2. Fluidos

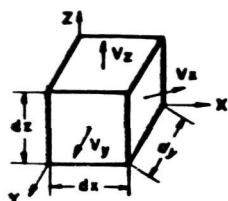
La existencia de focos o flujos térmicos en la masa de un fluido, crea un campo de temperaturas, y el calor se transmite, por conducción y por convección. La proporción de cada uno de estos modos de transmisión del calor esta regida, por las propiedades térmicas del fluido para la conducción, y del campo de velocidad, creado por cambios de densidad o por fuerzas externas, para la convección. Cuando la velocidad es baja, y la conductividad térmica del fluido es elevada, puede predominar la conducción, como sucede con metales líquidos cuya conductividad térmica es del orden de $8 - 10 \text{ (Kcal/hm}^\circ\text{C)}$, comparable a la de los metales no muy conductores en estado sólido, hierro, aceros y otras aleaciones.

En general, las ecuaciones de distribución de temperaturas en fluidos son más complicadas que en el caso de sólidos, debido, por una parte, a la existencia de un campo de velocidades, y por otra parte, por la generación de calor dentro del propio fluido por fenómenos de fricción, relacionados, con el campo de velocidades, y con las propiedades físicas del fluido.

a) Ecuación de movimiento de un fluido

Consideremos un elemento diferencial dx, dy, dz , Fig. 2,2(a) con una velocidad V y densidad ρ en el origen. Las variaciones de velocidad según los ejes OX, OY, OZ pueden escribir

se de la forma



$$\begin{aligned} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx - v_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \\ v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy - v_y &= \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \\ v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz - v_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (1)$$

Fig. 2,2(a)

En la ecuación (1) se hace hincapié en la naturaleza vectorial de las velocidades que por comodidad, no se incluye en la notación. Análogamente para las

variaciones de densidad se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} dx ; \frac{\partial \rho}{\partial y} dy ; \frac{\partial \rho}{\partial z} dz$$

un balance de materia aplicado al eje X

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

y para los tres ejes y poniendo notación vectorial

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

o

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2)$$

En régimen estacionario $\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0$ y para un fluido incompresible $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. La ecuación (2) se denomina de *continuidad*.

El movimiento del fluido se realiza con desplazamiento de unas partes sobre otras produciéndose tensiones entre las partes

del fluido que tienen distintas velocidades. El fenómeno es análogo al que tiene lugar en un sólido que se encuentra sometido a una tensión. Si la cara superior Fig. 2.2(b) tiene una tensión σ_{xy} y la inferior se mantiene rígida, se produce una deformación que puede expresarse

$$\sigma_{xy} = k_r \frac{dy}{dz} \quad (3)$$

donde k_r es el módulo de rigidez. En el caso de fluido newtoniano y régimen laminar la tensión es proporcional a la velocidad de deformación

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \mu \frac{dv_y}{dz} \quad (4)$$

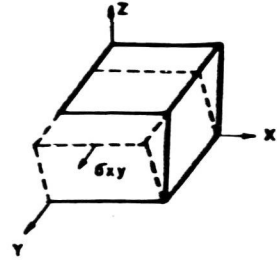


Fig. 2.2(b)

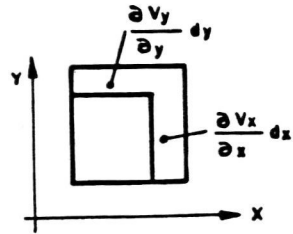


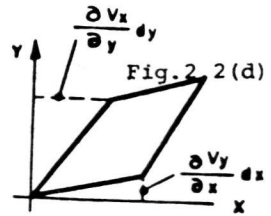
Fig. 2.2(c)

La mayoría de gases y líquidos se tratan como si fuesen newtonianos y la constante μ se conoce como viscosidad con dimensiones (kg/m.h) o sus equivalencias.

En las caras del elemento de fluido considerado anteriormente se producen las tensiones normales $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ y tensiones cortantes, $\sigma_{xy}, \sigma_{yx}; \sigma_{xz}, \sigma_{zx}; \sigma_{yz}, \sigma_{zy}$.

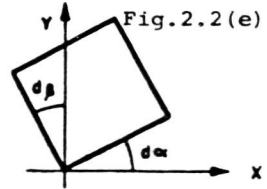
Para obtener la ecuación de un fluido en régimen laminar, con efecto viscoso, se aplica la segunda ley de Newton al elemento anterior: las fuerzas de inercia son iguales a las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Las fuerzas de inercia tienen por expresión $m \frac{dy}{dt}$ donde m es la masa del elemento y las fuerzas externas son las originadas por las fuerzas viscosas y por el campo gravitatorio (F). Para las componentes según los ejes x, y, z se obtienen

$$\begin{aligned}\rho \frac{dv_x}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\end{aligned}\quad (5)$$



Por otra parte el elemento vale

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \quad (6)$$



$$dv_x = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) dz \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dz \right]$$

(a) (b) (c)

con expresiones análogas para los ejes y , z .

El término (a) corresponde a una deformación lineal pura, el término (b) a una distorsión (b) y el término (c) a una rotación instantánea, Fig. 2,2(c), (d) y (e), en el plano x , y . La relación entre velocidades de deformación y tensiones es la viscosidad, ecuación (4) y el término (c) es equivalente a tensiones de la forma $\sigma_{xz} - \sigma_{zx}$, $\sigma_{xy} - \sigma_{yx}$ y $\sigma_{yz} - \sigma_{zy}$ y el momento de estas tensiones respecto al eje normal al centro de coordenadas del elemento, es igual al eje normal al centro de coordenadas del elemento, e igual al momento de inercia y se cumple

$$\sigma_{xz} - \sigma_{zx} \, dx \, dy \, dz = \rho \alpha \, dx \, dy \, dz \left(\frac{dx^2 + dy^2}{24} \right) \quad (7)$$

y si la aceleración angular $\alpha \rightarrow 0$ $\alpha_{xz} = \alpha_{zx}$ y por los términos (b)

$$\begin{aligned}\sigma_{yx} &= \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (8)$$

La relación entre tensiones normales y velocidades de deformaciones, se expresa, para el eje x

$$\sigma_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (9)$$

(a) (b)

El término (a) es una deformación pura y el término (b) es deformación de volumen, con el factor de proporcionalidad λ . El término $-P$ se corresponde con el equilibrio entre la presión externa P y la interna $-P$.

En notación vectorial, la ecuación (9) puede escribirse para los tres ejes

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3P + (2\mu + 3\lambda) \operatorname{div}(\mathbf{g}\mathbf{u}) = -3P + (2\mu + 3\lambda) \frac{\partial \varrho}{\partial \tau} \quad (10)$$

y si $\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} = 0 \quad \lambda = -2/3$

Finalmente sustituyendo las ecuación (8) y (10) en (5)

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \varrho \mathbf{F} - \operatorname{grad} P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (11)$$

La ecuación (11) se conoce como ecuación de Navier-Stokes. Si el fluido es incompresible $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ y

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \varrho \mathbf{F} - \operatorname{grad} P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (12)$$

Si el fluido es ideal y no existen efectos viscosos

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho F - \rho \text{grad } P \quad (13)$$

La expresión (13) se conoce como ecuación de Euler.

b) Ecuación de energía de un fluido ideal

Las ecuaciones anteriores dan la distribución del campo de velocidades en un fluido viscoso en régimen laminar, y nuestro objetivo es, conocer el campo de distribución de temperaturas asociado al campo de velocidades. Para ello, consideremos primero el caso de un fluido ideal, es decir, que no existan fenómenos viscosos, ni generación de calor dentro del fluido, y que el movimiento tiene lugar en condiciones adiabáticas. La variación de energía, se emplea en modificar la energía interna, y energía cinética, y para la unidad de volumen de fluido puede escribirse

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{d}{dt} (\rho U) \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \rho v \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2} v^2 \frac{d\rho}{dt}$$

y por la ecuación de continuidad (2) y la ecuación (13) de fluido ideal sin término F

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} \rho v^2 \text{div}(\rho v) - \rho v \text{grad } P - \rho v \text{grad } v^2 \quad (15)$$

y si se tienen en cuenta las relaciones termodinámicas

$$H = U + pV, \quad dU = TdS - p dV$$

$$\frac{d}{dt} (\rho U) = \frac{d}{dt} \left(H - \frac{p}{\rho} \right) + \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = H \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial S}{\partial t} \quad (16)$$

y

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U \right) = -\operatorname{div}(\rho v) \left[\frac{1}{2} v^2 + H \right] - \rho U \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) - \rho T \frac{\partial S}{\partial \tau} - \rho v T \operatorname{grad} S \quad (17)$$

y por el cálculo vectorial

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} v^2 + \rho U \right) = -\operatorname{div} \left[(\rho U) \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \right] - \rho T \frac{\partial S}{\partial \tau} - \rho v T \operatorname{grad} S \quad (18)$$

En régimen adiabático $\frac{\partial S}{\partial \tau} = 0$ y $\operatorname{grad} S = 0$ y

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U \right) = -\operatorname{div} \left[(\rho U) \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \right] \quad (19)$$

c) Ecuación de energía de un fluido real

La energía de movimiento en un fluido real se modifica a la ecuación (19) de un fluido ideal por los efectos térmicos de las fuerzas viscosas, y por la transmisión de calor por conducción debido al campo de temperatura que crean los efectos térmicos

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U \right) = -\operatorname{div} \left[(\rho U) \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) - E_a - E'_b - k \operatorname{grad} T \right] - \operatorname{div} E_a \quad (20)$$

donde E_a representa la energía de compresión y por la ecuación (18)

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} + U \operatorname{grad} S \right) = \operatorname{div} k \operatorname{grad} T + E'_b \quad (21)$$

donde E'_b es la energía de fricción, si

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\partial s}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad \text{y} \quad T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = C_p \quad (21)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + v \operatorname{grad} T = \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{E'_b}{\rho c_p}$$

6

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{v}{\alpha} \operatorname{grad} T - \frac{E'_b}{\rho c_p} \cdot \frac{1}{k} \quad (22)$$

Comparando la ecuación (22) con la ecuación 2,1(10) se observa la modificación del campo de temperaturas en un fluido respecto a un cuerpo sólido. La ecuación (22) se escribe frecuentemente

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{DT}{d\tau} - \frac{E'_b}{\rho c_p} \cdot \frac{1}{k} \quad (23)$$

donde $\frac{DT}{d\tau}$ se conoce como derivación sustantiva, para indicar, que el cambio de una variable (velocidad, presión, temperatura o densidad) en un fluido en movimiento, es el resultado de variación en el tiempo y variación de desplazamiento del elemento considerado, de un punto a otro. Así para el cambio respecto a T

$$\frac{DT}{d\tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (24)$$

El término E'_b correspondiente a la energía de fricción de la ecuación (22) y referida a la unidad de volumen, y se obtiene a partir de las ecuaciones (10) y (11). Si la expresión de la variación de energía es $\sigma_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x}$ para el término de tensión normal σ_{xx} y expresiones análogas, para los restantes términos se puede escribir

$$E_{\delta_{ii}} = -p \operatorname{div} v + 2\mu(\nabla v)^2 - \frac{2}{3}(\operatorname{div} v)^2$$

y

$$E_{\delta_{ij}} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 \right]$$

y eliminando el término de compresión $-p \operatorname{div} v$ ya considerada en la ec. (20) resulta

$$E_b' = 2\mu(\nabla v)^2 - \frac{2}{3}(\operatorname{div} v)^2 + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (25)$$

La ecuación (11) de Navier Stokes es válida para régimen turbulento y fluidos newtonianos introduciendo un campo de velocidades $v = \bar{v} + v'$, donde \bar{v} es una velocidad media integrada en el tiempo τ , y v' las fluctuaciones sobre la velocidad \bar{v} , y la ecuación (11) sin término F se escribe

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad} P + \mu \nabla^2(\bar{v}) - \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'_x v'_y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'_x v'_z}) \quad (25)$$

los términos que representan las tensiones en el fluido debidas a fluctuaciones turbulentas se conocen como fuerzas de Reynolds.

2.3. Tensiones térmicas

La transmisión de calor por conducción a través de materiales tiene como característica, la existencia de un campo de temperatura impuesto por los focos o flujos térmicos, y condicionado; por la forma geométrica, y propiedades térmicas de los materiales. Los focos o flujos térmicos que se manejan en procesos industriales, no pueden ser ilimitados, porque los campos de temperaturas llegarían a ser incompatibles con los materiales a través de los cuales pasa calor. Así, una resistencia eléctrica, está limitada

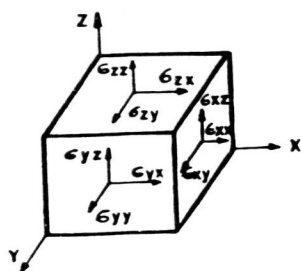
en la corriente eléctrica que puede pasar a través de ella, por la temperatura que puede soportar el material. En el límite, ésta temperatura sería el punto de fusión. Este simple hecho, indica, que la cantidad de calor máxima que el hombre puede manejar, está limitado por los materiales. Un reactor nuclear por ejemplo, da tanta energía como disponga el combustible y la potencia de funcionamiento, la impone un flujo térmico, compatible con los materiales del reactor, y en las condiciones, ambientales de funcionamiento. Los criterios de flujos térmicos máximos, están limitados, para cualquier efecto térmico que lleve, al proceso, o cualquiera de los componentes del equipo, a una situación no deseable, inmediata o futura, transitoria o estacionaria.

Los materiales deben soportar tensiones originadas por fenómenos físico-químicos externos o internos: 1) Presiones; 2) Gradientes de temperatura ; 3) Generación de calor; 4) Temperaturas transitorias; 5) Expansiones y contracciones; 6) Ataques químicos o partículas y radiaciones; a la superficie o el interior del material; 7) Vibraciones mecánicas etc.

Las tensiones térmicas se producen: a) Por resistencia de un elemento estructural o continuo a expansiones o contracciones debido a un gradiente de temperatura. b) Resistencia del contorno de una estructura o continuo, con ligaduras, durante el calentamiento o enfriamiento uniforme o no uniforme. Frecuentemente se dan las situaciones a) y b).

El origen de las tensiones térmicas no es una fuerza externa sino una resistencia interna y por ello, se denominan tensiones de deformación. El análisis termoelástico clásico de tensiones térmicas, se basa en admitir: deformaciones instantáneas, lineales, independientes del tiempo, y comportamiento reversible del material. Su tratamiento se hace por la teoría de la elasticidad, la cual define el campo de tensiones y pequeños alargamientos, en función de cargas y condiciones externas. Con este criterio, el campo de tensiones, Fig.2,3(a), en un sólido, es análogo al campo de tensiones en un fluido no newtoniano, y las condiciones de equilibrio, se expresan por una ecuación, análoga a la ecuación 2,2(5). La diferencia

conceptual es que en el sólido las tensiones se originan por deformaciones y en los fluidos viscosos por variación de las velocidades



$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= -F_x \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= -F_y \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -F_z\end{aligned}\quad (1)$$

Fig. 2,3(a)

Las ecuaciones (1) son las de equilibrio en un punto cualquiera del sólido, siendo F_x , F_y y F_z , las componentes de las fuerza del cuerpo F . De ésta condición de equilibrio, se obtiene análogamente a la ecuación para fluidos 3,2(7), $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}$; $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$; $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$. Para las deformaciones se siguen ecuaciones análogas a 2,2(6)

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (2)$$

donde u_x , u_y , u_z son los desplazamientos según los ejes x , y , z .

La solución de la ecuación (1) exige, no solo, las condiciones de contorno, sino también la compatibilidad entre las ecuaciones (1) y (2). Derivando con respecto a los ejes los componentes de las deformaciones se tiene:

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \\
 2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} \\
 2 \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

En un medio continuo sin ligaduras e isótropo, el cambio de temperatura en un elemento de volumen solo produce las deformaciones $e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \lambda (\tau - \tau_0)$ donde λ es el coeficiente de expansión térmico lineal, y $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ en expansiones compatibles con la continuidad del medio. La ecuación (3) se transforma en

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

De las consideraciones anteriores se desprende que, en un sólido isótropo sin ligaduras y λ independiente no existen tensiones térmicas.

Relaciones tensiones-deformaciones

Las deformaciones en un sólido con variaciones de temperatura se componen de dos partes: una elástica, propia del sistema, sin gradientes de temperatura, y otra por las deformaciones principales de estos gradientes. Las expresiones de las tensiones principales para la segunda parte son:

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + E \bar{\lambda} (T - T_0)] = \frac{1}{2G} (\sigma_{xx} - P) + \frac{P}{K} + \bar{\lambda} (T - T_0) \\
 e_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) + E \bar{\lambda} (T - T_0)] = \frac{1}{2G} (\sigma_{yy} - P) + \frac{P}{K} + \bar{\lambda} (T - T_0) \quad (5) \\
 e_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + E \bar{\lambda} (T - T_0)] = \frac{1}{2G} (\sigma_{zz} - P) + \frac{P}{K} + \bar{\lambda} (T - T_0) \\
 e_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{2G} \quad e_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} \quad e_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}
 \end{aligned}$$

donde $P = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$; E es el módulo de Young; G módulo de esfuerzo cortante; ν , módulo de Poisson y K el módulo de volumen = $\frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$ $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Si las deformaciones originadas por cambio de temperatura pueden expresarse por $e_{ii} = C_{ii} \bar{\lambda} (T - T_0)$, sustituyendo este valor en la ecuación (5) se tiene

$$K \left(\sum_i C_{ii} - 3 \right) \bar{\lambda} (T - T_0) = 3P \quad (6)$$

obteniéndose los valores de las tensiones

$$\sigma_{ii} = 2G \bar{\lambda} (T - T_0) \left(C_{ii} - \frac{1}{3} \sum_i C_{ii} \right) + K \bar{\lambda} T \left(\frac{1}{3} \sum_i C_{ii} - 1 \right) \quad (7)$$

con ligaduras completas se cumple $C_{ii} = 0$

$$\sigma_{ii} = -K \bar{\lambda} (T - T_0) = -\frac{E \bar{\lambda} (T - T_0)}{1 - 2\nu} \quad (8)$$

y sin ligaduras $C_{ii} = 1$ $\sigma_{ii} = 0$

La ecuación (8) da, las tensiones máximas que pueden producirse por un aumento de T en cualquier volumen del sólido con ligaduras máximas en los contornos del cuerpo.

Para las tensiones en el contorno del cuerpo por efecto de un aumento de T , la continuidad entre los elementos del sólido se necesitan aplicar una presión, $P = -\frac{1}{3} \sum \sigma_{ii} = \kappa \bar{\lambda} (T - T_0)$ a cada elemento y en la superficie del contorno debe cumplir la condición de equilibrio y las condiciones del contorno, y por la ecuación (1), teniendo en cuenta que las tensiones cortantes son cero, se cumple

$$F_x = \kappa \bar{\lambda} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad F_y = \kappa \bar{\lambda} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad F_z = \kappa \bar{\lambda} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (9)$$

A partir de la ecuación (1), y de las ecuaciones (8) y (9), se llega a la conclusión que los campos de deformaciones y tensiones en un cuerpo que además presenta deformaciones y tensiones térmicas, es equivalente a un cuerpo sin tensiones de deformaciones térmicas que tuviese unas fuerzas de volumen y superficiales adicionales, correspondientes a las ecuaciones (8) y (9).

Los criterios y ecuaciones anteriores responden al caso de un sólido ideal y, aunque se aplican anteriormente en el diseño de equipo térmico, hay que tener en cuenta sus limitaciones, especialmente a elevadas o bajas temperaturas. Las deformaciones de los cuerpos son del tipo visco-plástico, elástico, frágil, en el orden decreciente de temperaturas. Las constantes mecánicas, G , E y el coeficiente de viscosidad, son funciones de la temperatura, y los materiales no se comportan como elásticos. Las deformaciones son no lineales, dando origen a ecuaciones diferenciales más complicadas, cuya solución, exige cálculo numérico, al igual que sucede con las ecuaciones de transmisión de calor por conducción a través de cuerpos con propiedades térmicas no lineales. Por ello, el campo de tensiones térmicas se complica en el doble aspecto: tensiones, deformaciones, y temperaturas.

2.4. Ecuaciones adimensionales y grupos adimensionales en transmisión del calor.

Los grupos adimensionales son muy empleados en los fenómenos térmicos por su utilidad práctica. Estos grupos, pueden obtenerse por consideraciones simples de las ecuaciones diferenciales o por análisis dimensional. Consideremos la ecuación diferencial de transmisión de calor por conducción en un fluido en régimen no estacionario y sin generación de calor. De acuerdo con la ecuación 2,2(22) puede escribirse:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{\alpha} + \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{1}{\alpha} \quad (1)$$

Dos sistemas 1 y 2 son semejantes, si para la misma clase de fenómenos, la solución de la ecuación correspondiente es la misma. Aplicando la ecuación (1) a dichos sistemas se tiene

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2} = \frac{\partial T_1}{\partial \tau_1} \cdot \frac{1}{\alpha_1} + \left(v_{x_1} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial T_1}{\partial y_1} + v_{z_1} \frac{\partial T_1}{\partial z_1} \right) \frac{1}{\alpha_1} \quad (2)$$

y

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2^2} = \frac{\partial T_2}{\partial \tau_2} \cdot \frac{1}{\alpha_2} + \left(v_{x_2} \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + v_{y_2} \frac{\partial T_2}{\partial y_2} + v_{z_2} \frac{\partial T_2}{\partial z_2} \right) \frac{1}{\alpha_2} \quad (3)$$

Si se impone a las distintas variables de las ecuaciones (2) y (3) los criterios de semejanza, debe cumplirse:

a) Semejanza geométrica

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = L_0 \quad (4)$$

b) Semejanza del campo de velocidades

$$\frac{V_{x1}}{V_{x2}} = \frac{V_{y1}}{V_{y2}} = \frac{V_{z1}}{V_{z2}} = V_0 \quad (5)$$

c) Semejanza del campo de temperaturas

$$\frac{T_1}{T_2} = T_0 \quad (6)$$

d) Semejanza de difusividades térmicas

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha_0 \quad (7)$$

e) Tiempos correspondientes

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \tau_0$$

f) Semejanza térmica en las condiciones de contorno. Si en la superficie se cumple $-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = h(T-t)$ resulta

$$\frac{k_1}{k_2} = k_0 \quad \frac{h_1}{h_2} = h_0 \quad (8)$$

Si las expresiones (4), (5), (6), (7) y (8) se sustituyen en la ecuación (2) resulta

$$\left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2^2}\right)\left(\frac{T_0}{L_2}\right) = \frac{\partial T_2}{\partial \tau_2} \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{T_0}{\tau_0 \alpha_0}\right) + \frac{1}{\alpha_2} \left(V_{x2} \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + V_{y2} \frac{\partial T_2}{\partial y_2} + V_{z2} \frac{\partial T_2}{\partial z_2}\right) \left(\frac{V_0 T_0}{\alpha_0 L_0}\right) \quad (9)$$

Para que la ecuación (9) sea la ecuación (3) debe cumplirse

$$\frac{T_0}{L_2} = \frac{T_0}{\tau_0 \alpha_0} \quad \frac{\tau_0 \alpha_0}{L_2} = 1 \quad (10)$$

$$\frac{V_o L_o}{\alpha_o L_o} = \frac{T_o}{T_o \alpha_o} \quad \frac{V_o L_o}{\alpha_o} = 1 \quad (11)$$

$$\frac{h_o T_o}{L_o} = h_o T_o \quad \frac{h_o L_o}{k_o} = 1 \quad (12)$$

y por las relaciones anteriores (4), (5), (6), (7), (8) en general

$$\frac{\tau_1 \alpha_1}{L_1^2} = \frac{\tau_2 \alpha_2}{L_2^2} = F_o \quad (13)$$

$$\frac{V_1 L_1}{\alpha_1} = \frac{V_2 L_2}{\alpha_2} = Re \quad (14)$$

$$\frac{h_1 L_1}{k_1} = \frac{h_2 L_2}{k_2} = Nu \quad (15)$$

donde F_o , Re , Nu , son módulos o números adimensionales conocidos como Fourier, Peclet y Nusselt, respectivamente, en honor a sus descubridores. En algunos textos y publicaciones Nu se designa por Bi (número de Biot), cuando se trata de sólidos.

A partir de las ecuaciones diferenciales se obtiene el significado físico de los grupos adimensionales. El número F_o representa la relación entre la energía térmica que se acumula en un cuerpo a la energía que se transmite por conducción. El número de Nusselt representa la relación de resistencia térmicas por convección a resistencia térmica por conducción. El número de Peclet proviene de la ecuación de movimiento de un fluido con la ecuación de energía y puede escribirse

$$Pe = Re Pr = \frac{V \rho L}{\mu} \frac{h C_p}{k} \quad (16)$$

Donde Re es el número de Reynolds, que representa, la relación de fuerzas de inercia a fuerzas viscosas, y Pr es el número de

el número de Prandtl, que define la relación entre la viscosidad cinemática ν/ρ la difusividad térmica α , cuando se cumple $\alpha = \nu/\rho$, los campos de distribución de temperatura y velocidades son *análogos*, y el espesor de las películas controlantes de los respectivos fenómenos es el mismo.

La igualdad de los números adimensionales anteriores, definen la condición de semejanza de los fenómenos térmicos del caso considerado, que se expresa por la ecuación

$$Nu = F(P_e, F_o) = F(Re, Pr, F_o) \quad (17)$$

En régimen estacionario, no interviene el número F_o y la expresión (17) vale

$$Nu = F_1(Re, Pr) \quad (18)$$

Obsérvese, que los grupos adimensionales, se obtienen cómodamente a partir de las ecuaciones diferenciales, sin necesidad de integrar éstas, pero debe tenerse en cuenta los límites de validez impuestos por las condiciones de semejanza.

La semejanza entre fenómenos puede extrapolarse por medio del análisis dimensional para casos complejos, bien por configuraciones geométricas complicadas, o bien por la dificultad de describir los fenómenos por medio de ecuaciones diferenciales apropiadas. Es conocida la fecundidad de los grupos adimensionales en los cálculos de ingeniería, pero se insiste en un análisis cuidadoso antes de la aplicación de estos grupos, considerando, la identidad de los fenómenos, la omisión de posibles variables, y los límites de validez de los grupos que se utilizan. A título de ejemplo, consideremos la aplicación del análisis dimensional a los fenómenos de transmisión de calor por convección natural sin cambio de fase. Las variables que intervienen en el fenómeno son:

- 1) h = coeficiente de transmisión de calor ($\text{Kcal}/\text{hm}^2\text{°C}$).

- 2) L_e = longitud característica (m)
- 3) Δt = diferencia de temperatura pared-fluido ($^{\circ}\text{C}$)
- 4) g = aceleración de la gravedad (m/h^2)
- 5) k = conductividad térmica del fluido ($\text{Kcal/hm}^{\circ}\text{C}$)
- 6) μ = viscosidad del fluido (kg/m.h.)
- 7) C_p = calor específico del fluido ($\text{Kcal/kg}^{\circ}\text{C}$)
- 8) β = coeficiente de expansión térmica ($1/^{\circ}\text{C}$)
- 9) ρ = densidad del fluido (kg/m^3).

El teorema fundamental del análisis dimensional impone, que el número de grupos que se pueden obtener, es el número de variables independientes del sistema menos el número de unidades fundamentales. En nuestro caso 9 variables y 5 unidades fundamentales (calor, temperatura, masa, longitud, tiempo). La ecuación implícita puede escribirse de la forma

$$F(h, L, \Delta t, g, \mu, k, C_p, \beta, \rho) = 0 \quad (19)$$

o bien

$$F_2(h^{a_1}, L^{a_2}, \Delta t^{a_3}, g^{a_4}, k^{a_5}, \mu^{a_6}, C_p^{a_7}, \beta^{a_8}, \rho^{a_9}) = 0 \quad (20)$$

resulta la matriz, variables-unidades fundamentales

| | h | L | Δt | g | k | μ | C_p | β | ρ | |
|--------|---------|-------|------------|---------|--------|--------|--------|---------|---------|------|
| m | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | a_6 | $-a_7$ | 0 | a_9 | (21) |
| L | $-2a_1$ | a_2 | 0 | a_4 | $-a_5$ | $-a_6$ | 0 | 0 | $-3a_9$ | |
| T | $-a_1$ | 0 | 0 | $-2a_4$ | $-a_5$ | $-a_6$ | 0 | 0 | 0 | |
| Q | a_1 | 0 | 0 | 0 | a_5 | 0 | a_7 | 0 | 0 | |
| τ | $-a_1$ | 0 | a_3 | 0 | $-a_5$ | 0 | a_7 | $-a_8$ | 0 | |

que conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 a_6 - a_7 + a_9 &= 0 \\
 -2a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5 - 3a_9 &= 0 \\
 -a_1 - 2a_3 - a_4 - a_5 &= 0 \\
 a_1 + a_4 + a_6 &= 0 \\
 -a_1 + a_3 - a_5 - a_7 - a_9 &= 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

Si se impone la condición $a_1 = a_3 = a_4 = a_7 = 1$ resulta $a_5 = -2$
 $a_3 = 1$, $a_6 = -1$, $a_8 = 1$, $a_9 = 2$, y los 4 grupos adimensionales son

$$\pi_1 = \left(\frac{hL}{k} \right) = Nu, \quad \pi_2 = \left(\frac{C_p \mu}{k} \right) = Pr, \quad \pi_3 = (At\beta), \quad \pi_4 = \left(\frac{L^3 \rho^2 g}{\mu^2} \right) \tag{23}$$

Agrupando $\pi_3 \cdot \pi_4 = Gr$ (número de Grashof) puede escribirse

$$Nu = F_3 (Pr Gr) \tag{24}$$

La ecuación (24) puede obtenerse con los mismos resultados a partir de las ecuaciones diferenciales. Obsérvese que por análisis dimensional no se obtiene la interpretación fenomenológica de los grupos adimensionales. A partir de datos experimentales la ecuación (24) toma la forma explícita

$$Nu = C (Gr Pr)^m \tag{25}$$

C depende de la configuración geométrica y m permanece aproximadamente constante para un intervalo de $GrPr$. Así, $0 < GrPr < 10^{-5}$
 $m = 0$. En régimen laminar $m = 0,25$ y en régimen turbulento $m = 0,33$
 En la tabla 2,4(a) se indican valores y constantes de distintos grupos adimensionales.

TABLA 2.4(a).- EXPRESIONES ADIMENSIONALES PARA EL CALCULO DE COEFICIENTES DE CONVECCION

Convección Natural $Nu = C_1 C_2 (Gr Pr)^m$

| Fluido | Superficie | Régimen | C_1 | C_2 | m | Límites |
|--------------------|---|-------------|-----------|-------|----------------------|--------------------------------|
| Agua en ebullición | Pared plana | Turbulento | 0,17 | 1 | 0,33 | $Gr Pr > 2.10^9$ |
| " | " | " | 0,13 | 1 | 0,33 | $Gr Pr > 3,5.10^7$ |
| " | " | " | 0,54 | 1 | 0,25 | $Gr Pr = 10^3 - 3,5.10^7$ |
| Líquidos y gases | " | Transitorio | 1,18 | 1 | 0,125 | $Gr Pr = 10^3 - 5.10^2$ |
| " | tubos horizontales y verticales. | Laminar | 0,54 | 1 | 0,25 | $Gr Pr = 5.10^2 - 10^7$ |
| " | " | Turbulento | 0,135 | 1 | 0,333 | $Gr Pr = 2.10^7 - 10^{13}$ |
| " | Paredes y tubos verticales. | Laminar | 0,525 | 1 | 0,25 | $Gr < 10^9$ |
| " | Tubos horizontales | " | 0,51 | | 0,25 | |
| Gases | Tubos horizontales y verticales Paredes verticales | " | 0,128 | 1 | 0,333 | |
| Aire | Tubos y paredes verticales | " | 0,57-0,63 | 1 | 0,25 | $Gr < 10^9$ |
| " | " | Turbulento | 0,0325 | 1 | 0,25 | $Gr > 10^9 \quad Pr \approx 1$ |
| " | Paredes horizontales | Laminar | 0,163 | 1 | 0,333 | Cara superior |
| " | " | Turbulento | 0,086 | 1 | 0,333 | Cara inferior |
| " | Paredes verticales | Laminar | 0,36 | 1 | 0,25 | $Pr = 1$ |
| Metales líquidos | | | 0,52 | 1 | $Pr^{0,4} Gr^{0,25}$ | $Gr = 10^2 - 10^9$ |
| " | | | 0,106 | | $Pr^{0,4} Gr^{0,33}$ | $Gr = 10^2 - 10^{13}$ |

Características físicas del fluido a la temperatura media entre el fluido y la superficie: $Gr = N^\circ$ de Grasshoff $(\frac{\beta L^3 \rho g \Delta t}{\mu})$
 $Pr = N^\circ$ de Prandtl $(\frac{c_p \mu}{k})$; C_1 y C_2 constantes $(\frac{\bar{P}}{P_s})$ relación de Pr en la masa a las proximidades de la superficie.
 $Nu = N^\circ$ de Nusselt $(\frac{hL}{k})$

$$\text{Convección Forzada } (Nu) = C_1 K_1 Re^m Pr^n$$

| Fluido | Superficie | Régimen | C_1 | K_1 | m | n | Límites |
|------------------|---------------------------------|------------|--------|---|------|------|--|
| Líquidos y gases | Tubos horizontales y verticales | Turbulento | 0,0225 | 1 | 0,8 | 0,3 | $Re > 2100$ $Pr < 10$ $Re = 10^4 - 10^6$ |
| " | " | " | 0,022 | $(\frac{1}{b})^{-0,054}$ | 0,8 | 0,37 | $Re > 10000$ $Pr = 0,7 - 1,0$ $L/D = 100 - 400$ |
| Líquidos | " | " | 0,021 | $(Pr/Pr_s)^{-0,25}$ | 0,8 | 0,43 | $Re = 10^4 - 10^6$ $Pr > 0,6$ |
| Gases | " | " | 0,018 | 1 | - | 1 | $Pr = 0,7$ $(Pr/Pr_s) = 1$ |
| Líquidos y gases | Tubos verticales | Laminar | 11,5 | $(b/L)^{0,5}$ | 0,23 | 0,23 | $Re Pr = 5 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^6$ |
| Líquidos | Tubos horizontales y verticales | " | 0,17 | $Gr^{0,1} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)$ | 0,33 | 0,43 | |
| Aire | Tubos horizontales | Turbulento | 0,91 | 1 | 0,38 | 0,31 | $Re = 0,1 - 50$ |
| " | " | " | 0,60 | 1 | 0,50 | 0,31 | $Re = 50 - 10^4$ |
| " | Haces de tubos | " | 0,35 | 1 | 0,61 | 0,61 | |
| " | Paredes | " | 0,0565 | 1 | 0,78 | 0,78 | $Re > 1,7 \cdot 10^5$ |
| " | " | " | 0,032 | 1 | 0,75 | 0,75 | $V > 5 \text{ m/s}$ |
| " | " | Laminar | 0,301 | 1 | 0,5 | - | $Pr = 1$ |
| " | " | " | 0,660 | 1 | 0,5 | - | $Re > 10^5$ |
| Metales líquidos | Tubos | " | | | | | $Nu = 4,5 + 0,014 (Re Pr)^{0,6}$; $L/D = 30$; $Re = 10^4 - 10^6$; $Pr = 4 \cdot 10^{-3} - 3,2 \cdot 10^{-2}$ |

2.5. Ecuaciones analógicas y analogías

En el apartado anterior, se han definido como ecuaciones semejantes, aquellas que describen fenómenos de la misma clase, forma y contenido. Las ecuaciones que presentan las mismas soluciones de fenómenos distintos se conocen como ecuaciones *analógicas*. Consideremos la ecuación de transmisión de calor por conducción en régimen estacionario y sin generación de calor, obtenido en el apartado 2.1, y conocida como ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Si en un sólido de dimensiones determinadas, y propiedades térmicas constantes, se fijan las condiciones de contorno por temperaturas T_1 y T_2 en la superficie del sólido, la aplicación de la ecuación (1), determina la distribución de temperaturas. Si en lugar del fenómeno de conducción, se considera el mismo sólido con el fenómeno de difusión de una sustancia, con las condiciones de contorno anteriores sustituidas por concentraciones C_1 y C_2 la ecuación de Laplace se escribe

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

La solución de (2) da la distribución de concentraciones dentro del sólido y es la misma que en el caso de la ecuación (1) con una constante de proporcionalidad que relaciona temperaturas y concentraciones. La conclusión es, que pueden obtenerse soluciones de problemas de difusión, por estudio de problemas térmicos, y recíprocamente. En la bibliografía es frecuente hallar casos obtenidos por este procedimiento. La naturaleza escalar de los campos de temperatura y concentraciones, hace que la analogía sea casi completa. Las diferencias provienen de la variación de las propiedades térmicas y de difusión, obteniéndose en casos reales ecuaciones no lineales que deben resolverse con métodos de aproximación, transformaciones o cálculo numérico.

Los campos de velocidades y campos eléctricos responden también a la ecuación de Laplace y las ecuaciones correspondientes son *análogas*, obteniéndose soluciones a partir de los fenómenos que sean más convenientes, bien porque existen soluciones desarrolladas, o bien porque se pueden preparar experiencias con mayor facilidad y economía en un campo análogo al campo problema. Así, es bien conocida la analogía térmica-eléctrica en el estudio de la transmisión de calor por conducción en régimen estacionario con cuerpos de configuraciones geométricas complicadas. Si se considera una sección recta, se puede construir una red de resistencias eléctricas equivalentes a la resistencia térmica del medio por las ecuaciones 1,2(3) y (4), las temperaturas de las superficies de contorno son equivalentes a potenciales eléctricos en los extremos de la malla de resistencia. Los potenciales en cada punto se miden por métodos potenciométricos y por la analogía se transforman en campos de temperatura. Las mallas de resistencias pueden hacerse continuas utilizando papel de resistencia eléctrica conocida (Tele deltas) o por un electrolito. En régimen no estacionario, el elemento eléctrico equivalente es el condensador. La generación de calor puede hacerse con manantiales eléctricos en los puntos o nodos del sistema en forma uniforme o no uniforme.

Los ejemplos anteriores de analogía eléctrica, son las bases elementales de las máquinas u ordenadores analógicos desarrollados durante los últimos 20 años.

Si se extiende la analogía de las ecuaciones (1) y (2) al caso de un fluido en movimiento en régimen no estacionario y se admite la hipótesis de generación de calor despreciable por efecto de las fuerzas viscosas, se puede escribir para la difusión la ecuación equivalente a 2,2(22)

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{D} \left(v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (3)$$

donde D es el coeficiente de difusión que se expresa en las mismas unidades (m^2/h) que la difusividad térmica α . La ecuación (3) es general para los fenómenos de difusión siempre y cuando se

consideren las concentraciones y D correspondientes al componente que se difunde en una mezcla de n componentes y variación de concentraciones en régimen laminar o turbulento.

La ecuación (3) puede estudiarse desde el punto de vista adimensional como se ha hecho en el apartado 2,4 obteniéndose la relación adimensional

$$Sh = F(Re_m) = F(Re Sc) \quad (4)$$

donde Sh es el número de Sherwood, análogo al número de Nusselt para calor

$$Sh = \left(\frac{KL}{D} \right), \quad (K = \text{coeficiente de transferencia de materia, } \frac{\text{moles}}{\text{m}^2 \text{h (unidad de conc.)}})$$

$$Pe_m = \text{número de Peclet para transferencia de materia } \left(\frac{VL}{D} \right)$$

$$Sc = \text{número de Schmidt } \left(\frac{\mu}{\rho D} \right) \text{ análogo al número de Prandtl para calor.}$$

La ecuación (3) y sus ecuaciones análogas en transmisión de calor y movimiento de fluidos son conocidas como *ecuaciones generales de transporte* y deben cumplirse simultáneamente en los casos de coexistencia de fenómenos térmicos y de difusión en un fluido en movimiento.

Las ecuaciones anteriores se corresponden con la ecuación 2,2(22) de transmisión de calor con generación interna cuando se tiene en cuenta la energía térmica generada por fricción o, en un espectro más amplio, el campo de los reactores químicos, donde los cuerpos reaccionantes se difunden a través de gases, líquidos, o sólidos, dando productos que también se difunden, y, simultáneamente se genera o absorbe calor para que tenga lugar la reacción o reacciones posibles. La velocidad de generación o absorción de calor esta relacionada con la cinética de la reacción y se expresa en forma general por

$$Q_r = (-r^*) \Delta H = k_0 f(C) \exp\left(-\frac{\Delta E}{RT}\right) \cdot \Delta H \quad (5)$$

donde $(-r^*)$ es la velocidad de reacción (moles de componente transformado por unidad de tiempo y volumen, ΔH calor de reacción por mol de componente; $f(c)$ efecto de las concentraciones de los componentes de la reacción; $k_0 \exp(-\Delta E/RT)$ ecuación de Arrhenius donde ΔE , energía de activación; T temperatura ($^{\circ}K$), R constante de los gases perfectos, k_0 constante específica. La ecuación (3) toma la forma generalizada

$$\nabla(D\nabla C) = \frac{\partial C}{\partial t} + V \text{grad } C + (-r^*) \quad (6)$$

y la ecuación de calor

$$\nabla(k\nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p V \text{grad } T + (-r^*) + E_f \quad (7)$$

En la ecuación (7), E_f da la energía desprendida por fricción, por unidad de tiempo y volumen, generalmente despreciable.

El lector debe considerar las ecuaciones anteriores desde un punto de vista conceptual y organizado donde pueden encuadrarse múltiples aplicaciones y procesos industriales. En el caso de reactores nucleares de fisión los problemas son más complicados pero en un intento de visión global puede considerarse un elemento de volumen donde además de los fenómenos anteriores aparecen energía por fisiones en los materiales fisibles o fisionables, energía por moderación de neutrones, energía por choque de partículas o radiaciones con los átomos y núcleos del medio. El conocimiento de estas energías lleva consigo ecuaciones de los campos de distribución correspondientes a estos fenómenos y la cinética de las transformaciones.

2.6. Organización del estudio de los fenómenos de transmisión de calor por conducción.

Como se ha visto en los capítulos anteriores, la transmisión de calor por conducción interviene en múltiples procesos industriales, en unos casos presenta mayor importancia que otros y el planteamiento y solución de los problemas debe hacerse considerando el diseño como el estudio creativo para preparar estructuras, servicios o procesos que deben conducir a una utilidad práctica. Se conoce como sistema el conjunto de procesos cuyo comportamiento puede ser descrito por medio de modelos matemáticos condicionados por criterios de límites de indeterminación tecnológicos o económicos. El diseño final de un sistema es el resultado de un análisis dinámico de los modelos propuestos con la experiencia de otros modelos análogos y las posibles modificaciones por nuevos desarrollos comprobados. El sistema se divide en varios subsistemas dependiendo de las necesidades del problema y cuando alguno de estos subsistemas no es importante se denominan componentes. Los subsistemas se preparan igualmente con modelos matemáticos que se acoplan al modelo del sistema y el número de modelos de un subsistema lo determina los aspectos significativos del mismo.

Las características de los fenómenos de transmisión de calor incluyen a estos dentro de subsistemas y casi siempre las últimas consideraciones se refieren a la aproximación de temperaturas y tensiones a los criterios de fallo de materiales. Así pues, la organización del estudio de los fenómenos de conducción queda encuadrada en la preparación de modelos matemáticos con criterios del fenómeno y comprobación por resultados experimentales. La solución de un modelo no puede ser mejor que el modelo mismo y para obtener respuestas lógicas hay que utilizar matemáticas formales con criterios concretos. Cuanto más complejo es el modelo más difícil es su uso y manejo y es frecuente reducir los problemas por medio de hipótesis simples.

Las ecuaciones formales de los modelos de transmisión de calor por conducción son las correspondientes a los apartados anteriores, y la complejidad de los modelos proviene de la variación de

las propiedades de los fluidos o sólidos, la distribución e intensidad de los manantiales térmicos, y condiciones de contorno. En los casos que serán tratados en los capítulos siguientes, una hipótesis frecuente, es admitir un valor constante del coeficiente de transmisión de calor por convección y las soluciones analíticas se simplifican. Los problemas no lineales, se trata, bien por transformación de ecuaciones bien por métodos aproximados. Cuando las soluciones son difíciles se utiliza el cálculo por medio de ordenadores *digitales*, *analógicos* e *híbridos*. Los más frecuentes son los dos primeros y sus propiedades generales pueden observarse en la tabla 2

TABLA 2

Ordenadores

Digital

Analógico

- | | |
|---|---|
| 1) Variables discretizadas | 1) Variables continuas |
| 2) Tiempo de programación elevado | 2) Tiempo de programación reducido |
| 3) Soluciones opcionalmente precisas | 3) Soluciones de precisión limitada |
| 4) Memoria elevada | 4) No tiene memoria |
| 5) Variedad de problemas prácticamente ilimitados | 5) Los problemas a tratar son limitados |
| 6) Interpretación al final del programa | 6) Interpretación continua |
| 7) Exactitud elevada | 7) Exactitud limitada |

En los ordenadores híbridos parte del problema se trata en la sección digital y el resto en la sección analógica. La parte que exige solución rápida, sacrificando cierto grado de precisión, se trata en la sección analógica y simultáneamente, la parte de tratamiento que exige exactitud se hace en la sección digital aún a costa de aumentar el tiempo de programación. Este tipo de ordenadores tiene su línea de progreso en aplicaciones específicas tales como la descripción de fenómenos por medio de ecuaciones diferenciales.

El estudio de los fenómenos de transmisión de calor por conducción puede organizarse bien atendiendo a un modelo aplicado a distintas configuraciones geométricas o bien a distintos modelos en una sola forma geométrica. En el primer caso se obtiene una visión más profunda con ligeras modificaciones del modelo. Este tipo de organización se aplica en los capítulos siguientes cuyo esquema se indica en la tabla 2. Las aplicaciones quedan enmarcadas dentro de un mismo modelo incluyéndose aquellas que se acoplan a un modelo extrapolado, con fenómenos relacionados tales como transferencia de materia, cambios de fase, o convección y radiación.

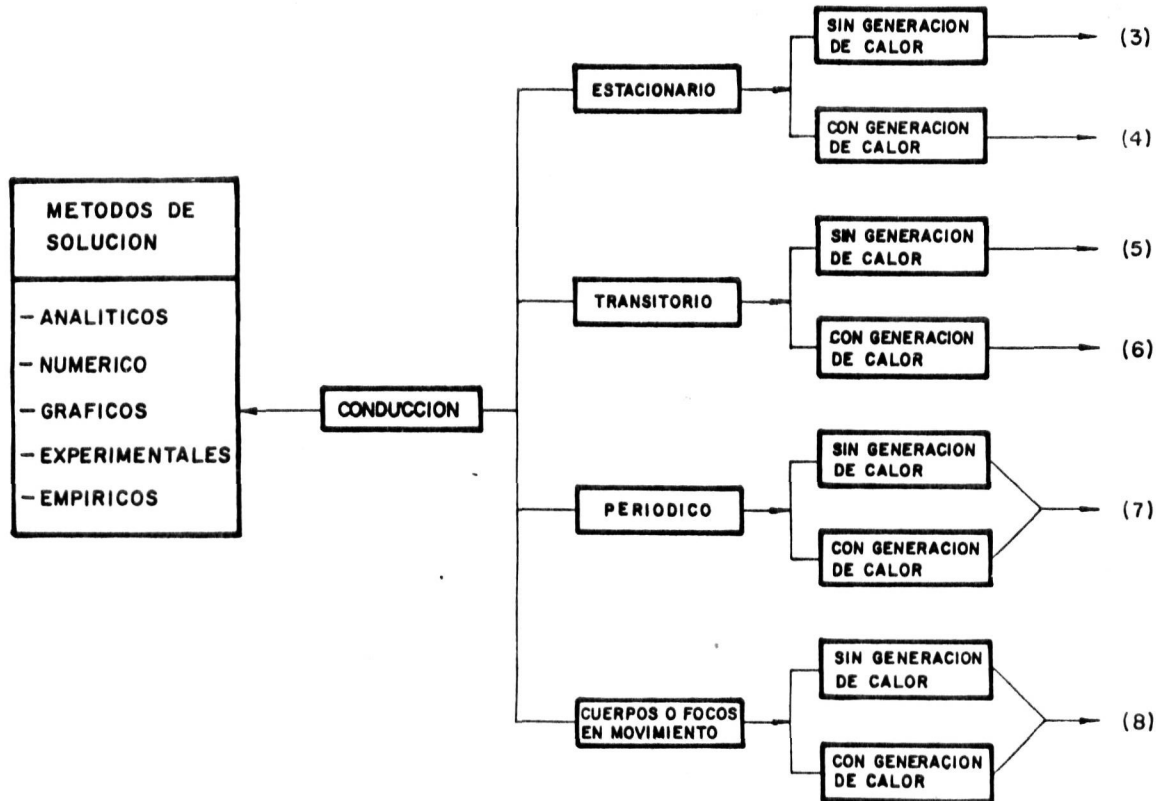
2.7. *Propiedades térmicas de los materiales*

2.7.1. *Conductividad térmica de gases.*

La conductividad térmica de los gases se explica por la teoría cinética. Los átomos o moléculas en sus movimientos intercambian energía térmica con sus vecinos y el calor se transmite desde las zonas de mayor temperatura a zonas donde la temperatura es menor. Las variables que determinan los valores de la conductividad en los gases son la velocidad, y el camino libre medio de los componentes, y así k aumenta cuando lo hace la temperatura. Por otra parte, el camino libre medio es inversamente proporcional al diámetro de los componentes y por ello las moléculas de estructura complicada tienen k más bajas. Dado que la k en gases es baja hay que evitar en su medida los efectos de los otros modos de transmisión de calor, radiación o convección. La radiación es mayor a temperaturas altas y las medidas de k solamente son aceptables a temperaturas moderadas. Si el volumen de gas que se mide es elevado, aparecen corrientes de convección tanto mayores cuanto más elevado es el gradiente de temperatura entre distintas zonas. A bajas presiones el efecto de la convección es menor.

La conductividad térmica de un gas a presiones moderadas de acuerdo con la teoría cinética es de la forma

$$k = \frac{1}{3} C_v \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad (1)$$



donde C_v calor específico \bar{v} velocidad media de las moléculas $\bar{\lambda}$, camino libre medio ρ densidad del gas.

La viscosidad puede expresarse por una ecuación análoga a (1)

$$\mu = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2)

$$k = K \mu C_v \quad (3)$$

donde K es el módulo de Maxwell. Para un determinado gas K es casi constante en un amplio intervalo de presiones y temperaturas. Para moléculas con más de 3 átomos, $K \approx 1,30$ para moléculas diatómicas $K \approx 1,90$ y para moléculas triatómicas $K \approx 1,70$ y con gases monoatómicos $K \approx 2,5$. El valor de K puede calcularse también por la relación de Eucken

$$K = \frac{9 \frac{C_p}{C_v} - 5}{4} \quad (4)$$

Por consideraciones de las contribuciones individuales al movimiento de las moléculas Bromley obtiene las ecuaciones:

a) Para gases monoatómicos

$$k = 2,5 \frac{C_v \mu}{M} \quad (5)$$

donde M es el peso molecular.

b) Gases con moléculas lineales

$$k = \frac{\mu}{M} (1,32 C_v + 3,40 - 0,70 T_r) \quad (6)$$

c) Gases con moléculas no lineales

$$k = \frac{\mu}{M} \left(1,30 C_v + 3,60 C^* - \frac{0,69}{T_r} - 3\alpha \right) \quad (7)$$

donde, k , ($\text{cal}/\text{cm.s.}^\circ\text{C}$); μ (poise); C_v ($\text{cal}/\text{mol.}^\circ\text{C}$); T_r = temperatura reducida (T/T_c)

c^* contribución de la notación interna de las moléculas a la capacidad térmica total

$$d = \frac{3 \rho L}{M} \left(\frac{L}{T_e} - 8,75 - R \ln T_e \right),$$

T_e , temperatura de ebullición;
 ρ , densidad del líquido a T_e ;
 L , calor de vaporización

valores de c^* y α se dan en las tablas de Reid y Sherwood (véase bibliografía). Otra forma de estimar k es a partir del número de Prandtl.

$$k = \frac{C_p \mu}{Pr} \quad (8)$$

o

$$Pr = \frac{q - \frac{5C_v}{C_p}}{4} = \frac{C_p}{C_p + 2,46} \quad (9)$$

o la ecuación de Hilsenrath y Touloukian

$$Pr = \frac{C_p}{1,204 C_p + 1,47} \quad (10)$$

Para C_p ($\text{cal}/\text{mol.}^\circ\text{C}$) < 15 ecuación 9, y si $C_p > 15$ ecuación (10). En ambos casos el error es $\pm 15\%$.

La variación de k con la temperatura se puede hallar por la relación

$$\log \frac{k}{(k)_{T_c}} = a \log T_r + b \log T_r^2 + c \log T_r^3 \quad (11)$$

| | a | b | c |
|--------------------------------|--------|---------|---------|
| Gases diatómicos ($T_r < 1$) | 1,0 | 0 | 0 |
| " triatómicos ($T_r < 1$) | 1,325 | -0,6311 | -1,54 |
| " diatómicos ($T_r > 1$) | 0,9340 | -0,0323 | -0,0511 |
| " triatómicos ($T_r > 1$) | 1,44 | +0,0115 | +0,2141 |

La variación de k con la presión puede calcularse

$$\frac{k_p}{k_0} = \frac{1}{1 + \frac{v_c}{v}} + F(C_p - C_0) \quad (12)$$

v_c y v volúmenes específicos del gas en el punto crítico y a T y P respectivamente $F = 0,071$ (gases diatómicos) y $0,035$ (gases poliatómicos).

Para mezclas gaseosas con componentes polares y no polares se puede utilizar la ecuación de Lehmann con error máximo de $\pm 10\%$

$$k_m = (k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots) \left(1 + \frac{x_p - x_1^2}{2,5}\right) \quad (13)$$

donde x_1, x_2, \dots son las fracciones molares de los componentes de la mezcla y x_p la fracción molares de los componentes polares.

Para mezclas de gases a altas presiones el cálculo de k se hacen con los conocidos parámetros pseudocríticos

Ejemplo.- 2.7-1(1)

Estimar la conductividad térmica del CO a presión de 1 atmósfera y temperatura de 300°C

Datos:

Peso molecular 28

$$\mu(0^\circ\text{C}) = 1,65 \cdot 10^{-4} \quad \text{poises}$$

$$\mu(300^\circ\text{C}) = \mu(0^\circ\text{C}) \frac{273+C}{T+C} \left(\frac{T}{273}\right)^{2/3} = 1,65 \cdot 10^{-4} \frac{273+101,2}{573+101,2} \left(\frac{573}{273}\right)^{2/3} = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ poises}$$

$$C_p = 6,40 + 0,0012 T = 7,28 \text{ (cal/mol } ^\circ\text{C)}$$

$$C_v = 6,40 \text{ (cal/mol } ^\circ\text{C)}$$

$$T_c = 134,3 (^\circ\text{K}) \quad v_c = 90,3 \text{ (cm}^3/\text{mol)} \quad \rho_c = 0,31 \text{ (g/cm}^3) \quad T_r = 4,26$$

a) Por la ecuación (3)

$$k = \frac{(q \frac{G}{G} - 5)}{4} \mu C_w = 1,30 \cdot 14,2 \cdot 10^{-5} \cdot 0,22 = 4,09 \cdot 10^{-5} \text{ (cal/cm.s.}^\circ\text{C)}$$

b) Por la ecuación (10)

$$k = \frac{0,26 \cdot 14,2 \cdot 10^{-5}}{0,747} = 4,95 \cdot 10^{-5} \text{ (cal/cm.s.}^\circ\text{C)}$$

c) Por la ecuación (6)

$$k = \frac{14,2 \cdot 10^{-5}}{28} (1,32 \cdot 6,40 + 3,40 - 0,7 \cdot 4,26) = 4,50 \cdot 10^{-5} \text{ (cal/cm.s.}^\circ\text{C)}$$

2.7.2. Conductividades térmicas de líquidos

Los líquidos presentan un comportamiento intermedio entre gases y sólidos y el estudio de los fenómenos de transporte es complicado. La conductividad térmica de los líquidos es muy superior a la de los gases y en contraste con éstos, disminuye cuando aumenta la temperatura aunque existen casos como el agua y compuestos de azufre, entre otros, en los cuales k aumenta con T . El efecto de la presión es positivo y k aumenta del orden de 20% hasta 700 kg/cm^2 , a presiones y temperaturas altas puede llegar a ser 2 - 3 veces superiores.

Los mecanismos de transmisión de calor por conducción en líquidos se basan en el modelo de Bridgman. Las moléculas se suponen en una red cúbica con movimientos vibratorios que transmiten calor a través de capas con diferentes temperaturas. La ecuación más sencilla para este modelo es

$$k = 4,04 \cdot 10^{-16} v_L \sqrt[3]{\frac{N g_L}{M}} \quad (1)$$

donde M peso molecular, g_L densidad, N número de Avogadro y v_L la velocidad del sonido en el líquido. La ecuación (1) da sólo resultados aproximados y lo mismo sucede con la ecuación de Denbigh basada en la teoría de los agujeros en los líquidos. Relacionando la viscosidad y la conductividad térmica por medio del número de Prandtl se obtiene

$$\log P_r = 0,1 \frac{L}{T_e} - 1,8 \quad (2)$$

donde L/T_e es la entropía de vaporización a la temperatura normal de ebullición.

Las ecuaciones empíricas o semiempíricas dan mejores resultados que las ecuaciones teóricas. Una de estas es la conocida ecuación de Weber

$$k = 1,29 C_p g V^{1/3} \quad (3)$$

k , (Kcal/h.m.z); C_p , (Kcal/kg.z); g , densidad V volumen molar ($l/kg.mol$) con error medio 13% y máximo de 60%.

El cálculo con ecuaciones obtenidas con la contribución de grupos conduce igualmente a expresiones poco satisfactorias y la complejidad aumenta cuando se trate de mezcla, por ello, se recomienda utilizar ecuaciones limitadas a líquidos análogos a intervalos de temperatura moderados.

2.7.3. Conductividad térmica de sólidos

El estudio de la conductividad térmica de cuerpos en estado sólido ha experimentado un gran avance en tres últimas décadas debido al desarrollo de la Física del estado sólido. Entre las dificultades que presenta la conductividad térmica de materiales industriales se encuentra la gran variedad de cuerpos tanto simples como compuestos con diferencias aparentemente pequeñas pero que pueden cambiar notablemente los valores de la conductividad térmica tanto más cuanto mayor es el intervalo de temperaturas.

Los mecanismos más importantes de conducción en cuerpos sólidos son:

- Conducción por fonones o vibraciones reticulares de átomos situados en mallas cristalinas, como sucede en el caso de óxidos que presentan enlaces iónicos y son aislantes eléctricos.

- Conducción por electrones que se mueven entre los iones positivos situados en el retículo como es el caso de metales y en menor proporción los cuerpos conocidos como se miconductores.
- Conducción por radiación cuando los cuerpos son transparentes a radiaciones de cuerpos negros o grises tal como se ha indicado en el apartado 1,4-2.
- A bajas temperaturas puede presentarse conducción por *magnones* en cuerpos ferromagnéticos.

Los mecanismos anteriores intervienen en mayor o menor extensión en la conductividad térmica principalmente los dos primeros y en casos específicos también los dos últimos.

a) *Cuerpos aislantes eléctricos*

Son ejemplos clásicos los óxidos cerámicos conocidos como refractorios si bien hay que aclarar que en un sentido más amplio debe considerarse como refractario todo material que resiste temperaturas altas prescindiendo de su estructura y de que sea conductor o aislante térmico.

Los átomos situados en el retículo de un cristal para mantener el equilibrio entre fuerzas atractivas y repulsivas ejecutan movimientos vibratorios. Si cada átomo tiene 3 modos normales de vibración, en n átomos, existen $3n$ grados de libertad. A cada grado de libertad corresponde una forma de vibración que responde a las ecuaciones de un oscilador armónico. Los modos están cuantizados y solo toman o desprenden energía en la cantidad, $E = (n + \frac{1}{2}) \frac{h_p \nu}{2\pi}$ donde h_p es la constante de Plank y ν la frecuencia de vibración. Los saltos de energía sólo tienen lugar por *cuantos* denominados *fonones*, por analogía con los cuantos de luz o *fotones*, y así, los fonones son los cuantos de excitación de los modos normales de vibración de una red cristalina. Los fonones no se conservan, al igual que los átomos, su número no es fijo, pero si lo es, su energía total, y su tratamiento es análogo al de los fotones.

Si en un cristal existe una diferencia de temperatura en términos cuánticos, la concentración de fonones es mayor en la zona de mayor temperatura y en consecuencia se establece una corriente por difusión fonónica. En un cristal perfecto siempre están presentes fenómenos de aparición de más fonones o desaparición de algunos de ellos produciéndose términos no armónicos. Por otra parte los fonones sufren dispersión en el medio que los rodea. Un proceso que tenga lugar sin aportar resistencia al paso de fonones se denomina normal-N y resistivo en el caso contrario.

La mayor parte de los cristales presentan retículos imperfectos que afectan a la conducción de fonones siendo los más importantes, la presencia de átomos distintos o de distinta masa, dislocaciones y átomos intersticiales. Los cuerpos de estructura desordenada como vidrios, polímeros o sustancias amorfas presentan mayor resistencia al paso de fonones que los cristales y en consecuencia sus conductividades térmicas son inferiores a la de estos últimos.

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto la dificultad de un tratamiento cuantitativo riguroso en las conductividades térmicas en esta clase de sólidos. Cuando aumenta la temperatura el desorden también lo hace y $k \sim T^{-1}$ mientras que a temperaturas bajas predominan los efectos de impurezas y átomos de distinta masa y $k \sim T^{-3}$. A temperaturas muy bajas intervienen eficazmente el fenómeno de dispersión en bordes de grano y los valores de k son más imprecisos.

Las conductividades térmicas de los cuerpos aislante eléctricos son inferiores a la de los metales con excepciones en cuerpos muy puros y cristalinos como el diamante con $k > 1000$ Kcal/hm°C conductividad superior a la del mejor metal conductor, plata $k = 420$ Kcal/hm°C.

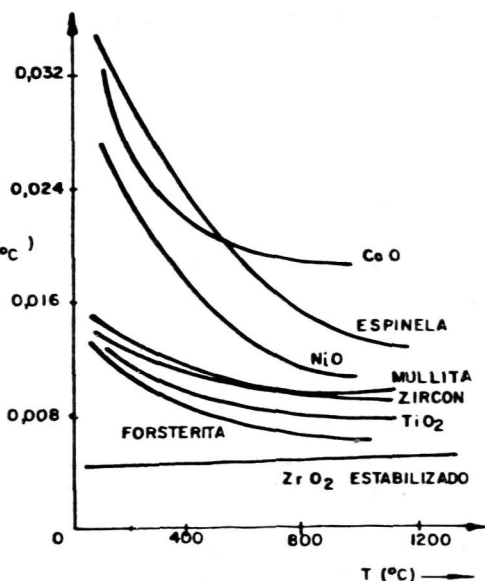
En cuerpos anisótropos la conductividad térmica depende de la estructura del cristal así el cuarzo en la dirección paralela al eje principal a temperatura ambiente $k = 16$ Kcal/hm°C mientras que en la dirección perpendicular $k = 8$ Kcal/hm°C. En el grafito la anisotropía es aún mayor pues la relación llega a ser

200/1 . En la gráfica 7,7-3(a) se indican valores de k para cuerpos cerámicos frecuentes.

A altas temperaturas el mecanismo de radiación también interviene y puede ser predominante. Los vidrios y cristales claros tienen un coeficiente de absorción bajo para luz visible y cerca del infrarrojo pero pueden ser opacos en la zona de mayor longitud de onda, que se corresponde con temperaturas del orden de 500°C .

En cuerpos cerámicos traslúcidos, los efectos de la radiación son importantes a temperaturas superiores a 1500°C . La sílice fundida a temperatura ambiente es aislante térmico y a temperatura del orden de

1000°C presenta tanta conductividad térmica como la alúmina, debido al efecto de las radiaciones térmicas que aumentan con la cuarta potencia de la temperatura. Así pues en general, a altas temperaturas las conductividades térmicas están más afectadas por la radiación en la zona visible e infrarrojo que por la composición química y cristalográfica de los materiales.



Conductividades de cuerpos cerámicos

Fig. 2,7-3(a)

b) Metales y semiconductores

En los metales y semiconductores la conducción térmica se realiza con electrones libres y con fonones. La proporción de cada uno de estos mecanismos viene impuesta por el carácter metálico más o menos acusado y por la estructura cristalina de cuerpo.

En un metal los electrones libres se mueven entre los iones positivos localizados en el retículo del cristal y la distribución de electrones responde a la estadística de Fermi-Dirac. En un sólido aislante eléctrico las bandas de valencia están llenas mientras que las bandas de conducción están vacías. En un semiconductor de diferencia de energía entre bandas de valencia y conducción es pequeña y por simple excitación térmica algunos electrones pasan a la banda de conducción. Estos electrones también pueden proceder de impurezas próximas a la banda de conducción y en cualquier caso los electrones son libres y las vacantes de las bandas de valencia se comportan como cargas libres positivas conocidas como huecos.

El tratamiento cuantitativo de la conducción por electrones libres y huecos se hace por la ecuación de Wiedermann-Frank

$$\frac{k}{\sigma_e T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 2,45 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\text{volt}}{^\circ\text{K}} \right)^2 = \text{número de Lorentz} \quad (1) \quad (2)$$

donde k conductividad térmica ($\text{W/cm}^\circ\text{C}$) conductividad eléctrica (ohm.cm)⁻¹, k_B constante de Boltzmann ($1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$) y e , carga del electrón $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

La ecuación (2) relaciona k con σ_e y puesto que las conductividades térmicas se miden más difícilmente que las eléctricas, se pueden medir éstas y calcular las primeras. La relación anterior se cumple con mayor o menor grado en metales y semiconductores teniendo en cuenta las características en cada caso pero no se cumple en el estado de superconductividad que manifiestan algunos sólidos a bajas temperaturas, es decir, no existe correspondencia entre superconductividades eléctricas y térmicas sino todo lo contrario. El estado superconductor puede considerarse como el paso de electrones a un nivel energético de entropía cero donde pueden transportar corriente eléctrica sin resistencia pero no transportan calor ni presentan fenómenos de dispersión de fonones. Como consecuencia de éste fenómeno la conducción térmica por electrones queda disminuida e incluso anulada si todos los electrones están condensados y sólo permanece la conductividad térmica por fonones a través de la estructura cristalina que presenta el sólido.

En la tabla 2.7.3(b) se indican valores del número de Lorentz para algunos metales en el intervalo 0-100°C

TABLA 2.7-3(b)

Valores del n° de Lorentz

| Metales simples | $L \times 10^8$ | | Metales de transición | $L \times 10^8$ | |
|--------------------|-----------------|-------|--------------------------|-----------------|-------|
| | 0°C | 100°C | | 0°C | 100°C |
| Cu | 2,23 | 2,33 | Fe | 2,47 | 2,56 |
| Ag | 2,31 | 2,37 | Ni | 1,77 | 2,28 |
| Au | 2,35 | 2,40 | Mo | 2,61 | 2,79 |
| Zn | 2,31 | 2,33 | Pd | 2,59 | 2,74 |
| Cd | 2,41 | 2,43 | W | 3,04 | 3,20 |
| Al | 2,12 | 2,23 | Rc | 2,57 | 2,57 |
| Sn | 2,52 | 2,49 | Ir | 2,49 | 2,49 |
| Pb | 2,47 | 2,56 | Pt | 2,51 | 2,60 |
| Bi | 3,31 | 2,89 | | | |

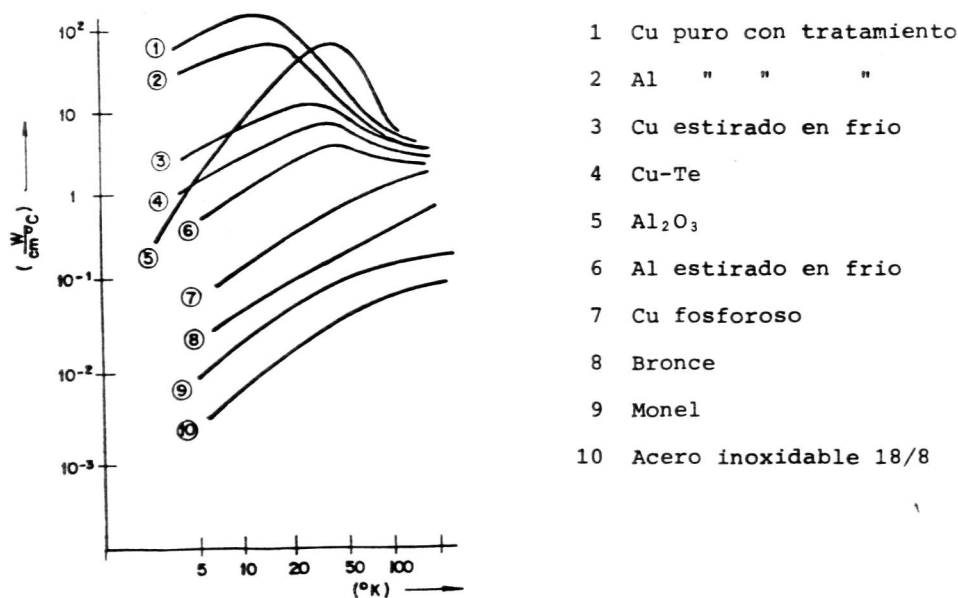
En los metales que tienen una gran conductividad eléctrica como sucede con los alcalinos y alcalinos térreos, la conducción térmica es prácticamente por electrones libres y en los metales de transición aunque es importante aparecen contribuciones de conducción por fonones.

La influencia de las impurezas es importante y así en Cu, Al, Fe y Ni a 0°C con 0,1% de impurezas k disminuye 2-3%. Esta disminución se atribuye a los efectos producidos por la dispersión de fonones. Por otra parte en monocristales naturales de cobre se han medido conductividades de 9000 (Kcal/hm°C) frente a 318 (Kcal/hm°C) para el cobre puro a 18°C.

En las aleaciones el efecto fonónico es más importante que en los metales, depende de los elementos y de sus constituyentes, así, la conductividad térmica de la ferrita es de 62 (Kcal/hm°C) y la cementita $k = 8,8$ (Kcal/hm°C) y sin embargo

la perlita eutectoide de la ferrita y cementita, con 0,1% de C $k = 44(\text{Kcal/hm}^{\circ}\text{C})$, tomando aun valores superiores si hay Si, Mn, Ni, Cr, Mo, W.

A bajas temperaturas la intervenci3n de los fonones es acusada y las impurezas dan una disminuci3n de la conductividad t3rmica superior al aumento que pudiera derivarse por disminuci3n de temperatura. En la gr3fica 2.7-3(c) se aprecian estas variaciones en distintos cuerpos.



Gr3fica 2.7-3(c)

c) Metales l3quidos

La conducci3n t3rmica en los metales l3quidos al igual que en los metales s3lidos es fundamentalmente por electrones libres. El grado de desorden es mayor que en los s3lidos, y por ello, las conductividades t3rmicas son menores que las correspondientes a los mismos metales en estado s3lido. Por otra parte en estado l3-

quido la estructura es homogénea y el efecto de las impurezas es pequeña cumpliéndose bastante bien la ecuación de Wiedemann-Frank. Cuando los metales se encuentran en forma de vapor saturado no tienen electrones libres y la conductividad térmica puede calcularse por la teoría cinética considerando al vapor como un gas monoatómico, y los valores que se obtienen son lógicamente despreciables frente a sus correspondientes en estado líquido.

En la tabla 2.7-3(c) se dan temperaturas normales de ebullición (T_e) y críticas (T_c) de metales (Grosse A.V.)

TABLA 2,7-3(c)

| <i>Metal</i> | $T_e(^{\circ}K)$ normal | $T_c(^{\circ}K)$ |
|--------------|-------------------------|------------------|
| Hg | 629,9 | 1733 |
| Cs | 958 | 2150 |
| Rb | 974 | 2190 |
| K | 1039 | 2440 |
| Pb | 2024 | 5400 |
| Sn | 2753 | 8000 |
| Ni | 4200 | 12500 |
| Mo | 5100 | 17000 |
| Re | 5900 | 20000 |
| Ta | 5700 | 22000 |
| W | 5800 | 23000 |

Las conductividades térmicas de los metales líquidos pueden obtenerse a partir de las medidas de conductividades eléctricas y la relación entre ambas por la ecuación 2.7-3(2). En todos los metales líquidos (normales) excepto Na y K (anormales) la conductividad térmica en función de la temperatura aumenta a partir del punto de fusión pasando por un valor máximo y disminuyendo posteriormente para llegar a valores muy pequeños en el punto crítico Tabla 2.7-3(d)

TABLA 2.7-3 (d)

| Metal | k_{\max} (W/cm°C) | T (°K) de k_{\max} . |
|-------|---------------------|------------------------|
| Ag | 1,98 | 2300 |
| Cu | 1,84 | 2350 |
| Au | 1,25 | 2800 |
| Al | 1,16 | 2500 |
| Na | 0,90 | T de fusión |
| Li | 0,59 | 1200 |
| K | 0,54 | T de fusión |
| Te | 0,46 | 2800 |
| Rb | 0,34 | 350 |
| Cs | 0,21 | 500 |
| Hg | 0,13 | 750 |

En la tabla 2.7-3(e) se dan valores de la resistividad $1/\sigma_e$ para distintos metales líquidos así como valores del número de Lorenz.

TABLA 2.7-3 (e)

| | | |
|----|--|---|
| Na | $\sigma_e^{-1} = 5,904 + 3,695 \cdot 10^{-2} t - 9,35 \cdot 10^{-3} t^2 + 2,29 \cdot 10^{-8} t^3$ | $L = 2,33 \cdot 10^{-8}$ |
| K | $\sigma_e^{-1} = 10,324 + 5,302 \cdot 10^{-2} t + 4,55 \cdot 10^{-5} t^2 + 3,140 \cdot 10^{-8} t^3$ | $L = 2,16 \cdot 10^{-8}$ |
| Rb | $\sigma_e^{-1} = 19,522 + 7,88 \cdot 10^{-2} t + 1,301 \cdot 10^{-5} t^2 + 5,441 \cdot 10^{-8} t^3$ | $L = 2,44 \cdot 10^{-8}$ |
| Cs | $\sigma_e^{-1} = 34,383 + 1,124 \cdot 10^{-1} t - 2,869 \cdot 10^{-5} t^2 - 1,007 \cdot 10^{-9} t^3$ | $L = 2,44 \cdot 10^{-8}$ |
| Li | $\sigma_e^{-1} = 21,934 + 2,548 \cdot 10^{-2} t + 2,581 \cdot 10^{-6} t^2 - 1,819 \cdot 10^{-9} t^3$ | $L = 2,44 \cdot 10^{-8}$ |
| Cu | $\sigma_e^{-1} = 0,0102 T(^{\circ}K) + 6,2$ | $L = 2,44 \cdot 10^{-8}$ |
| Ag | $\sigma_e^{-1} = 0,087 T(^{\circ}K) + 6,40$ | $L = 2,44 \cdot 10^{-8}$ |
| Au | $\sigma_e^{-1} = 0,0150 T(^{\circ}K) + 11,21$ | $L = 2,44 \cdot 10^{-8}$ |
| Al | $\sigma_e^{-1} = 0,0146 T(^{\circ}K) + 10,56$ | $L = 2,44 \cdot 10^{-8}$ |
| Hg | $(\sigma_e + 2,30)(T_r + 2,30) = 7,59$ | $L = 2,62 \cdot 10^{-8}$, $T_r = \frac{T(^{\circ}K) - 234,28(^{\circ}K)}{1733(^{\circ}K) - 234,28(^{\circ}K)}$ |

donde σ_e^{-1} ($10^{-4} \Omega \cdot \text{cm}$) ; t (°C) ; L (C/K)² ó ($\frac{\text{W} \cdot \Omega}{^{\circ}\text{K}^2}$)

d) Materiales compuestos

En numerosas aplicaciones industriales del calor los materiales tienen una estructura heterogénea bien en forma sólida como sucede en los sólidos cerámicos, maderas, plásticos o con huecos ocupados por gases o fluidos dentro de una matriz continua o discontinua, tales como, ladrillos porosos, lechos granulares o polvos más o menos compactados. Los valores de la conductividad térmica para estos materiales son muy variables ya que en la transmisión de calor pueden intervenir los tres modos de transmisión de calor, conducción, convección y radiación con sus correspondientes mecanismos. Los datos de tablas deben ser cuidadosamente elegidos cuando no son cuerpos o sistemas muy normalizados.

Es frecuente que la conductividad térmica de materiales compuestos se de como conductividad global o equivalente obtenida por consideraciones de las resistencias térmicas parciales. Admitamos como ejemplo un material de dos componentes de conductividades térmicas k_1 y k_2 y volúmenes V_1, V_2 . En dos situaciones extremas de material se puede agrupar según las configuraciones de la Fig. 2.7-3(f).

Si el flujo térmico tiene lugar según el eje X la resistencia térmica es suma de las resistencias de cada pared y la conductividad equivalente de acuerdo con la ecuación 1.5(1) puede escribirse

$$(k_e)_x = \frac{k_1 k_2}{v_1 k_2 + v_2 k_1} \quad (1)$$

siendo $v_1 + v_2 = 1$

Si el flujo térmico tiene lugar en la dirección Y

$$(k_e)_y = v_1 k_1 + v_2 k_2 \quad (2)$$

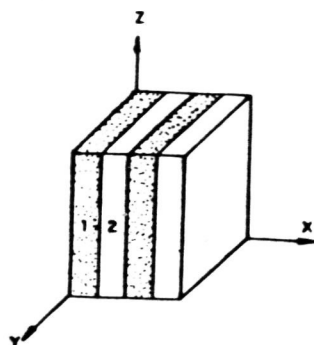


Fig. 2.7-3(f)

En la ecuación (1) controla el conductor térmico más bajo y k_e toma el valor mínimo mientras que en la ecuación (2) sucede lo contrario y la k_e es máxima, obsérvese que la posición de las paredes es independiente de k_e siempre y cuando k_1 y k_2 no varíen con la temperatura, así, el resultado es el mismo si se coloca todo el material 1 primero y a continuación el material 2 o divididos en cualquier espesor en paredes alternadas o no.

Si en k_e interviene el modo de radiación simultáneamente al de conducción la posición de cada pared debe estar perfectamente determinada puesto que la cantidad de calor que se intercambie es función de la cuarta potencia de la temperatura.

La situación real en los materiales compuestos es más complicada y los modelos anteriores marcan dos límites de k_e . Las paredes deben sustituirse por volúmenes de formas irregulares alterando la distribución de temperaturas dentro del sólido. Los campos de temperaturas en superficies complejas pueden resolverse considerando celdillas modelo y aplicando los métodos que se indican en el capítulo 3. Otra forma de resolver el problema es utilizar modelos que se basan en la ley de Ohm manteniendo los criterios de las ecuaciones (1) y (2).

La distribución de volúmenes en el sólido se determina experimentalmente por microscopio o medidas físicas y su tratamiento conduce a funciones de distribución tridimensionales que se acoplan por la independencia del orden de resistencias en la forma que se indica en la Fig. 2.7-3(g).

La aplicación de ecuaciones integradas de k_1 y k_2 conducen a valores de la conductividad equivalente para relaciones conocidas V_1/V_2 .

Cuando una de las fases es continua y la otra fase está formada por poros gaseosos de dimensiones inferiores a 4 mm pueden

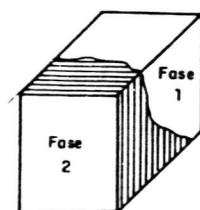


Fig. 2.7-3(g)

despreciarse los fenómenos de convección y los modos de transmisión, que afectan a k_e son conducción y radiación. A temperaturas altas la radiación es importante y la conductividad por radiación puede escribirse para un poro

$$k_r = 4FL\epsilon\sigma T^4 \quad (3)$$

donde F es un factor geométrico de valor; 1, para poros laminares paralelos al flujo térmico; $2/3$ para esferas; $\pi/4$ para cilindros con ejes perpendiculares al flujo térmico; L la dimensión mayor en la dirección del flujo térmico; ϵ , emisividad si se admite que la diferencia de temperaturas es pequeña, en primera aproximación los poros con radiación son independientes de su posición en el sólido y las ecuaciones (1) y (2) toman la forma

$$k_e = \frac{k_r k_i}{V_i k_r + k_i V_r} \quad (4) \quad k_e = V_r k_r + V_i k_i \quad (5)$$

donde V_r es la proporción de volumen de poros en la mezcla. Con la hipótesis de independencia de la posición de los poros las ecuaciones (4) y (5) pueden tratarse con los modelos de la ley de Ohm.

Nomenclatura del Capítulo 2

| | |
|-----------------|---|
| Bi | número adimensional de Biot |
| C | concentración |
| Cv | Calor específico a volumen constante |
| Cp | Calor específico a presión constante |
| E | módulo de Young |
| F | fuerza |
| F _o | número adimensional de Fourier |
| e _{xx} | deformación referida al eje X ect. |
| G | módulo de fuerza cortante |
| g | gravedad (m/h^2) |
| Gr | número adimensional de Grashof |
| H | entalpía |
| h | coeficiente de transmisión de calor ($Kcal/hm^2^{\circ}C$) |
| K | módulo de volúmen |
| k | conductividad térmica |
| kr | módulo de rigidez |
| k _B | constante de Boltzmann |
| Nu | número adimensional de Nusselt |
| P | presión |
| Pr | número adimensional de Prandtl |
| Q | caudal volúmico de calor ($Kcal/hm^3$) |
| q | caudal de calor ($Kcal/h$) |
| q' | flujo térmico ($Kcal/hm^2$) |
| Re | número adimensional de Reynolds |
| S | entropía o superficie |
| T | temperatura en sólidos ($^{\circ}C$) o absoluto ($^{\circ}K$) |
| t | temperatura en fluidos ($^{\circ}C$) |
| V | energía interna |

| | |
|---------------|---|
| v | velocidad (m/s) |
| V' | volumen |
| α | difusividad térmica (m^2/h) |
| β | coeficiente expansión ($1/^{\circ}K$) |
| ∇ | operador nabra |
| Δ | operador Laplaciano |
| σ | constante Stefan-Boltzmann de radiación térmica |
| σ_e | resistividad eléctrica |
| σ_{xx} | tensión referida al eje x , ect. |
| ρ | densidad |
| τ | tiempo |
| ν | módulo de Poisson |
| μ | viscosidad |

Bibliografía

- BAURMEISTER, K.J. and HAMILL T.D., Hyperbolic Heat Conduction Equations. A Solution for the Semiinfinite Body Problem. J. Heat.Transfer. ASME, 91, C, 543-48 (1969).
- BEER, F.J., Thermal Stresses and Thermal Fatigue. Butterworths, London (1971).
- BOLEY, B.A., Survey of Recents Developments in the Fields of Heat Conduction in Solids and Thermoelasticity, Nucl.Eng.Sc. and Design 18, 3, 377 (1972).
- BOLEY, B.A. and WIENER, Theory of Thermal Stresses. Jhon Wiley and Sons. New-York.
- BRETSNAJ DER S., Prediction of Transport and other Physical Properties of Fluids. Pergamon Press. London (1971),
- BOSWORTH, R.C.L., Heat Transfer Phenomena, Jhon Wiley and Sons,

New-York (1952).

BUBNOV, V.A., Wave Concepts in the Theory of Heat. Int.J.Heat and Mass. Transfer, 19, 245 (1976).

CAMPBELL, I.E. and SHERWOOD, E.M., High Temperature Materials and Technology, Jhon Wiley and Son. New-York (1967).

CHENG, S.C., VACHON, R.I., The Prediction of the Thermal Conductivity of two and three Phase Solid Heterogeneous Mixtures. Int.J. of Heat and Mass. Transfer. 12, 249 (1969).

CRANE, R.A. and VACHON, R.I., A Prediction of the Bounds on the Effective Thermal Conductivity of Granular Materials. Int.J.of Heat and Mass. Transfer. 20, 711 (1977).

COHEN, B.M., Heat Transfer by Conduction and Radiation with temperature Dependent Thermal Conductivity. J.Heat Transfer. ASME, 91 C 159 (1960).

FREUDENTHAL, A.M., BOLEY, B.A. and Liebowitz, H., High Temperature Structure and Materials, Pergamon Press. New-York (1964).

GATEWOOD, B.E., Thermal Stresses. Mc Graw Hill, New-York (1957).

GROSSE, V.A., Electrical and Thermal Conductivity of Metals over their entire Liquid Range. (Propriétés Physico-Chimiques et Mécaniques des Matériaux Refractaires a Haute Temperature, Centre National de la Recherche Scientifique) 3, 115 (1966).

HIMMELBLAN, D. and BISCHOFF, K.B., Process Analysis and Simulation. Jhon Wiley and Sons, New-York (1968).

HIRCHFELDERS, I.O., CURTISS, C.F. and BIRD, R.B. The Molecular Theory of Gases and Liquids. Jhon Wiley and Sons. New-York (1964).

HOLY, J.Z., Temperature and Stresses in Reactor Fuel Elements due to Time and Space Dependent Heat Transfer Coefficients. Nucl. Eng. and Design, 18, 45 (1972).

KAISER, L., Structure quantique de la conductivité thermique, Int.

- J.of Heat and Mass. Transfer. 18, 1110 (1975).
- KERAMIDAS, G.E. and TING, C.E., A Finite Element Formulation for Thermal Stresses Analysis. Nucl.Eng.and Desig. 39, 263 (1976).
- KINGERY, W.D. and McQUANIE, M.C., Thermal Conductivity, J.of the American Ceramic Soc., 37, 2, (1954).
- KLEMENS, P.G., Theory of the Thermal Conductivity of Solids, Academic Press (1969).
- LYON, R.N., Liquid Metals Handbook, 2nd Ed. Report NAVEXOS P-733 (1952).
- LUIKOV, A.V., BUBNOV, V.A., SOLOVIEV, I.A., On Wave Solutions of the Heat Conduction Equation, Int.J.of Heat and Mass. Transfer. 19, 245 (1976).
- MORENO, A., DIMCO. Un nuevo sistema de cálculo termomecánico de combustibles nucleares. Junta de Energía Nuclear, N° 396, Madrid (1977).
- MORENO, A., Teoría y aplicación a los combustibles nucleares de un nuevo modelo de respuesta de un sólido elasto-viscoso-plástico. Junta de Energía Nuclear, Madrid, N° 388 (1977).
- MORRIS, R., Analysis of Multidimensional Thermoelastic Dynamic Response of Reactor Fuel Elements, BNL-13311.
- NOWACKI, W., Thermoelasticity, Addison-Wesley, Publ. Reading Mass. (1962).
- PERZYNA, P. and SAWCZUK, A., Problems of Thermoplasticity, Nucl.Eng. and Desig. 24, 1 (1973).
- PARROT, J.E. and STUKES, A.D., Thermal Conductivity in Solids, Pion Limited, London (1975).
- ROHSENOW, W.M. and HARTNETT, P.J., Handbook of Heat Transfer. McGraw Hill, New-York (1973).
- REISBIG, R.L. and SANER, H.J. Editores, Advances in Thermal Conduc-

- tivity, University of Missouri, Rolla (1974).
- SHERIFF, I.I., AMMAR, A.S.A. The Effect of Pore Shape-Configuration and orientation on the Thermal Conductivity of Porous Materials. Int.J.of Heat and Mass. Transfer. 19, 227 (1976).
- STREETER, V.L., Mecánica de Fluidos (Traducción en castellano) Ediciones del Castillo. Madrid (1970).
- TOULOUKIAN, Y.S. et al. Thermophysical Properties of Matter, Vol. I Pergamon Press, New-York (1970).
- VERNOTTE, P., Paradoxes in the Continuous Theory of the Heat Equation, Compt.Rend., 246, 3154 (1958).

CAPITULO 3

TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION Y REGIMEN ESTACIONARIO

INTRODUCCION

La transmisión de calor por conducción en campos con superficies perpendiculares a las líneas de flujo térmico, presenta un tratamiento sencillo, como es el caso de paredes, cilindros y esferas. Las aplicaciones son numerosas dado que las citadas formas geométricas son frecuentes en instalaciones industriales. En el caso de cilindros y paredes, apartado (3.1), se considera una de las dimensiones suficientemente grande para admitir la perpendicularidad de las superficies al flujo térmico. Los problemas que se plantean están relacionados, por una parte, con las cantidades de calor que se transmiten a través de los cuerpos y, por otra parte, con la distribución de temperaturas dentro de éstos, que permite conocer la compatibilidad de los materiales durante el funcionamiento del equipo en régimen estacionario. La simplicidad de las expresiones matemáticas que se obtienen para los casos mencionados anteriormente hace que se obtengan soluciones para cuerpos yuxtapuestos que mantengan las mismas formas geométricas. Como se verá posteriormente cuando se trata de paredes o cilindros finitos y yuxtapuestos el tratamiento es complicado y, en régimen no estacionario o transitorio, por ejemplo, hay que acudir frecuentemente a soluciones por métodos numéricos.

Por otra parte, las propiedades térmicas de los cuerpos son función de la temperatura, como se ha visto en el capítulo 2, y, para los casos que se estudian en este apartado, se obtienen soluciones relativamente simples de aplicación frecuente. Por todo ello el tratamiento simple de la transmisión de calor por conducción en régimen estacionario es muy utilizado, no solo en casos donde se cumple con un cierto rigor, sino, también, en casos más complicados para tener una idea aproximada de cantidades de energía y temperaturas en los cuerpos a través de los cuales se transmite.

calor.

En los apartados (3.2), (3.3) se dan tratamientos para la transmisión de calor en 2 y 3 dimensiones, completando el espectro de posibles aplicaciones de la transmisión de calor en régimen estacionario sin generación de calor.

3.1.1. Paredes planas

Cuando la conductividad térmica del material que forma la pared es independiente de la temperatura, de acuerdo con la ecuación de Fourier la cantidad de calor viene dada por la expresión

$$q = k S \frac{(T_i - T_e)}{L_x} \quad (1)$$

donde T_i y T_e son las temperaturas en la superficie de la pared, Fig.

(3.1-1(a)). La distribución de temperaturas dentro de la pared es una línea recta. Si la pared separa dos fluidos a temperaturas t_i y t_e respectivamente y los coeficientes de transmisión de calor que incluye convección y radiación son h_i y h_e , la ecuación (1) se transforma en

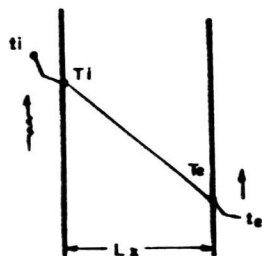


Fig. 3.1-1(a)

$$t_i - t_e = \frac{q}{S} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{L_x}{k} + \frac{1}{h_e} \right) \quad (2)$$

Si la conductividad térmica es función de la temperatura, la ecuación (1) puede ponerse de la forma

$$\int \frac{dx}{S} = \frac{1}{q} \int_{T_e}^{T_i} k(T) dT \quad (3)$$

Si la función $k(T)$ es complicada, se acude a una integración gráfica, utilizando los valores de \bar{k} en las ecuaciones (1) ó (2).

En el caso de metales, es frecuente que k sea una función

lineal de la forma $k_0(1+aT)$ y la ecuación (1) se transforma en

$$q = \frac{S}{L_x} k_0 (T_i - T_o) \left[1 + \frac{a}{2} (T_i + T_o) \right] \quad (4)$$

Paredes planas compuestas

En el caso de paredes planas suficientemente grandes Fig. (3.1-1(b)) y yuxtapuestas de forma tal, que el contacto entre superficies es perfecto y las conductividades térmicas de las distintas paredes 1, 2...n son independientes de la temperatura, la ecuación (2) se transforma en:

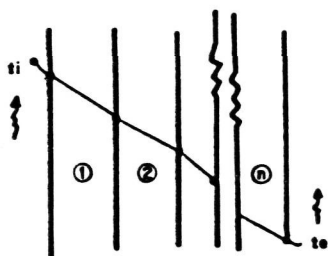


Fig. 3.1-1(b)

$$t_i - t_o = \frac{q}{S} \left[\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e} + \sum_{n=1}^n \left(\frac{L_n}{k} \right) \right] \quad (5)$$

donde t y h , con sus correspondientes subíndices, son las temperaturas y coeficientes de transmisión de calor de los fluidos que rodean las superficies extremas de la pared compuesta.

Resistencias térmicas de contacto

La situación real de la transmisión de calor a través de paredes compuestas se complica por el hecho de que las conductividades térmicas pueden ser función de la temperatura y, por otra parte, el contacto entre las distintas superficies no es perfecta y aparece una caída de temperatura en la zona de separación de las citadas superficies. La variación de las conductividades térmicas pueden resolverse como se ha mencionado anteriormente, si bien hay que considerar los efectos de una aproximación de este tipo y, para casos extremos, puede hacerse por desarrollos en serie de la función que relaciona k con T .

Las resistencias térmicas de contacto se suelen expresar, bien en caídas de temperatura, por relaciones como la ecuación (1), considerando una conductividad térmica equivalente del medio de se-

paración entre superficies, bien en coeficientes de convección h que engloban la resistencia de contacto.

La importancia de las resistencias de contacto depende del tipo de aplicación. Cuando se trata de aislamientos, la resistencia de contacto es favorable a la disminución de pérdidas de calor, mientras que, cuando se trata de extraer calor de un sistema con flujos térmicos elevados, la resistencia de contacto debe ser baja, para evitar un elevado gradiente de temperatura.

La resistencia térmica de contacto depende principalmente:

- Estado de la superficie
- Presión de contacto
- Temperatura del contacto
- Naturaleza del fluido entre las superficies

Se pueden establecer como casos límites, resistencia de contacto pequeña, cuando la unión entre superficies presenta muchos puntos de contacto, y elevada, si los puntos son pocos. En la Fig. (3.1-1 (c)) se indica el perfil de una superficie donde el grado de rugosidad esté expresado por los valores

$$R_a = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad (6')$$

y

$$R_s = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}{n}}$$

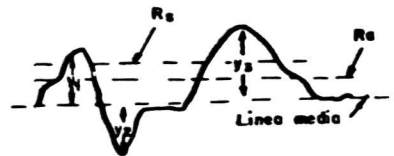


Fig. 3.1-1(c)

El contacto es tanto mejor cuanto menor es el valor de R_a ó R_s . Para materiales blandos la unión es mayor que con materiales duros y, en ambos casos, la presión favorece el contacto. La temperatura y el tiempo también favorecen el contacto debido a efectos pseudoplásticos en la unión de las superficies. En la tabla 3.I se dan valores de h_c para las situaciones más frecuentes.

TABLA 3.1.1(a)

Resistencias térmicas de contacto expresadas en h_c (Kcal/hm °C), P (kg/cm²), R_s (cm) y T (°C) .

| Material | Fluido | $R_s \cdot 10^6$ | P | T | h_c |
|---|--------|------------------|-----|-----|-------|
| Al | Aire | 25-100 | 0,5 | 100 | 4000 |
| Al | " | 25-100 | 0,5 | 200 | 6000 |
| Al | " | 300 | 0,5 | 100 | 1500 |
| Al | " | 300 | 0,5 | 200 | 40000 |
| Acero inoxidable | " | 50 | 0,5 | 100 | 4800 |
| " | " | 50 | 0,5 | 250 | 6000 |
| " | " | 250 | 0,5 | 100 | 1000 |
| " | " | 250 | 0,5 | 250 | 2000 |
| " | " | 80 | 30 | 100 | 9000 |
| " | " | 80 | 30 | 250 | 12000 |
| Acero inoxidable soldadura por puntos | | | | | 500 |
| Cu limpio al vacío | | | 1 | | 1200 |
| Ag | | | 1 | | 2500 |
| Acero al carbono | Aire | 500 | 15 | | 2000 |
| " | Argon | 50 | 100 | | 24000 |
| Emparedados de acero inoxidable con 0,2 mm de amianto | Aire | 100 | 5 | | 500 |

Cuando los materiales que constituyen las paredes son fibras polvos o láminas aglomeradas, el problema de la resistencia térmica de contacto es complicado y, por ello, resulta más fácil considerar una conductividad térmica equivalente que tenga en cuenta los mecanismos de transmisión de calor por conducción, convección y radiación.

En un espectro amplio las resistencias térmicas de contacto aparecen también por alteración de la superficie de los cuerpos. Estas resistencias se denominan de incrustación o ensuciamiento cuando se producen por cambios superficiales debidos al medio y condiciones de operación. Es bien conocido, el caso de intercambios de calor que disminuyen su rendimiento térmico después de un cierto período de operación y en los que para volver a las condiciones normales hay que proceder a la limpieza y eliminación de la capa de ensuciamiento. Cuando ésta capa se adhiere fuertemente a la superficie hay que evitar un aumento excesivo del espesor acudiendo a sistemas auxiliares de purificación. En otros casos se producen alteraciones dimensionales en la superficie, bien por ataque químico con desprendimiento de capas, como sucede en productos refractarios, bien por resquebrajaduras de los materiales, como sucede en el caso de los combustibles nucleares de tipo cerámicos. Esta clase de fenómenos presenta efectos marcados cuando existen variaciones de cantidades de calor que alteran el campo de temperaturas estacionario.

Teniendo en cuenta estos posibles efectos y para mantener una generalización de la ecuación (2), la ecuación (5) se escribe

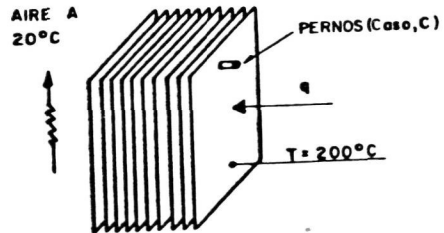
$$t_i - t_e = \frac{q}{S} \left[\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e} + \sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{h_n} + \sum_{n=1}^n \left(\frac{\gamma}{k} \right)_n \right] \quad (6)$$

donde h_i incluye el coeficiente de convección y radiación, además de la resistencia de contacto por ensuciamiento en la pared interior; e, se refiere a la pared exterior. El primer sumatorio se refiere a las superficies de contacto donde se incluyen todos los posibles fenómenos del contacto y el segundo sumatorio comprende el paso de calor por conducción a través de n capas o paredes del sistema.

Ejemplo.- 3.1-1(a)

10 láminas de acero de 0,1 mm de espesor y rugosidad, $R_s = 250 \times 10^{-6}$ cm se disponen según se indica en la Figura 3.1-1(a). Calcular las pérdidas de calor en los siguientes casos:

- Las láminas se someten a una presión de $0,5 \text{ kg/cm}^2$
- Entre cada dos láminas de acero se intercala fibras de amianto de 2 mm de espesor y conductividad media $k = 0,07 \text{ (Kcal/hm}^\circ\text{C.)}$



Ejemplo 3.1-1(a)

- Las láminas de acero se separan entre ellas 1 mm y el conjunto se mantiene a vacío. La separación de placas se logra con 10 pernos/m².

Solución:

Caso a): Las caídas de temperaturas a través de las láminas valen

$$\Delta T = \frac{q}{S} \left(\frac{q}{1000} + \frac{10 \cdot 10^{-4}}{40} \right) \approx \frac{q}{S} \frac{q}{1000}$$

donde 1000 ($\text{Kcal/hm}^2\text{e}$) es el valor del contacto (véase tabla de resistencias de contacto). 40 es la conductividad térmica del acero. Para lámina-aire

$$\Delta t = \frac{q}{S} \left(\frac{1}{h_c + h_r} \right)$$

$$h_r = \epsilon \sigma \frac{(T + 273)^4 - 293}{T - 293}$$

y $(h_c L / k_a) = 0,139 (G_r Pr)^{0,33}$ para $G_r Pr > 10^9$ (véase tabla II,9 Apéndice II)

$$y \quad \frac{\Delta t}{200-20} = \frac{111}{111 + (h_c + h_r)} \quad y \text{ si } (GrPr)^{0,33} = \left(g \frac{q^2}{\mu^2} \beta (T-20) \frac{C_p \mu}{k} \right)^{0,33} \\ \approx C (\Delta t)^{0,33} L$$

$$h_c = 0,139 C k_a \Delta t^{0,33}; \quad \frac{T-20}{180} = \frac{111}{111 + C_1(\bar{T})(T-20) + \epsilon \sigma \frac{(T+273)^4 - 293^4}{T-20}}$$

con los datos de las tablas de aire seco $\bar{T} = \frac{T+20}{2}$ y $\epsilon = 0,70$
para acero se obtiene

| | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| T(°C) | 40 | 60 | 80 | 150 | 160 | 170 | 180 |
| hr | 3,8 | 4,20 | 4,64 | 6,46 | 6,75 | 7,0 | 7,41 |
| hc | 3,59 | 4,42 | 4,89 | 5,93 | 6,05 | 6,19 | 6,25 |

y por la ecuación (a) la temperatura de la lámina en contacto con
aire $T = 180^\circ C$

$$\frac{q}{S} = (180-20) \cdot 13,66 = 2185 \left(\text{kcal/h.m}^2 \right)$$

b) Las pérdidas de calor están controladas por la fibra de
amianto

$$\frac{T-20}{180} = \frac{q \cdot 2 \cdot 10^{-3} / 0,07}{\frac{q \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0,07} + C_1(\bar{T})(T-20)^{0,33} + \epsilon \sigma \frac{(T+273)^4 - 293^4}{T-20}}$$

Por interpolación lineal en la tabla anterior resulta $T \approx 26^\circ C$

$$\frac{q}{S} = (26-20) \cdot 8,2 = 49,2 \left(\text{kcal/h.m}^2 \right)$$

c) (ver ejemplo 1,4-3(1))

$$\frac{\epsilon}{\left(\frac{2}{\epsilon} - 1 \right) (8+1)} \left[(200+273)^4 - T^4 \right] = (T-20) \left[C_1(t)(T-20)^{0,33} + \epsilon \sigma \frac{(T+273)^4 - 293^4}{T-20} \right] + (q)_p$$

$$(q)_p (\text{pernos}) = 10 \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot 13,66 (180-20) = 0,42 \text{ kcal}; \quad \frac{q_p}{S} = 0,42 \left(\text{kcal/h.m}^2 \right)$$

si se admite para acero $\epsilon = 0,70$ el término de radiación disminuye en $1/27$

$$\frac{T-20}{180} = \frac{h_r/27}{h_r(T) + h_c} \approx \frac{h_r}{25h_c} \quad T \approx 20,5$$

y

$$\frac{q}{s} = (20,5-20) \cdot 3,8 + 0,42 = 2,34 \text{ (Kcal/hm}^2\text{)}$$

3.1-2. Tubos

Los tubos son formas geométricas muy utilizados en la transmisión de calor por conducción debido a su facilidad de fabricación y su comportamiento mecánico en general.

Los problemas que se presentan en este apartado se relacionan con la cantidad de calor que se intercambia por conducción entre dos cuerpos sólidos, líquidos o gases, separados por la pared de una tubería, y la distribución de temperaturas en esta última.

La Fig. 3.1-2(a), representa un tubo de espesor $R_i - R_e$, de longitud axial suficientemente grande para que el flujo de calor tenga lugar sólo en la dirección radial. La ecuación de Fourier toma la forma

$$q = -k 2\pi r L \frac{dT}{dr} \quad (1)$$

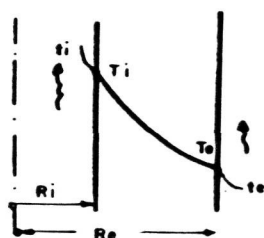


Fig. 3.1-2(a)

y por integración de (1)

$$q = 2\pi k L \frac{(T_i - T_e)}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \quad (2)$$

donde L representa la longitud del tubo. Para un radio r tal que $R_i < r < R_e$

$$q = 2\pi L k (T_i - T) / \ln(r/R_i) \quad (3)$$

La ecuación (3) pone de manifiesto que la distribución de temperaturas dentro del material del tubo responde a una ley logarítmica. La resistencia térmica para un radio r vale

$$R_T = \frac{\ln(r/R_i)}{2\pi kL} \quad (4)$$

comparando las ecuaciones de la pared plana 3.1(1) y la ecuación (2)

$$q = 2\pi kL \frac{(T_i - T_e)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \cdot \frac{R_e - R_i}{R_e - R_i} = k \frac{(S_e - S_i)}{\ln\frac{S_e}{S_i}} \frac{(T_e - T_i)}{(R_e - R_i)} \equiv k S_m \frac{(T_e - T_i)}{R_e - R_i}$$

donde S_m , es la superficie media logarítmica y, en forma análoga, se designa r_m , como radio medio logarítmico

$$r_m = \frac{R_e - R_i}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \quad (5)$$

Para pequeños espesores del tubo $r_m \approx (R_e + R_i)/2$ o $S_m = (S_e + S_i)/2$ cuando la conductividad térmica del material es función de la temperatura, se siguen los criterios mencionados en el apartado 3.1-1. En el caso particular de metales, cuya k es función lineal de T

$$q = \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} (T_i - T_e) \left[k_0 + \frac{a}{2} (T_i - T_e) \right] \quad (6)$$

donde a es el coeficiente de variación de k con T .

Cuando las superficies del tubo se encuentran rodeadas de medios a temperaturas t_i y t_e y con coeficientes de convección y radiación h_i y h_e respectivamente

$$t_i - t_e = \frac{q}{2\pi L} \left(\frac{1}{R_i h_i} + \frac{1}{R_e h_e} + \frac{\ln(R_e/R_i)}{k} \right) \quad (7)$$

y para valores próximos de R_e y R_i

$$t_i - t_e = \frac{q}{2\pi L r_m} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e} + \frac{R_e - R_i}{k} \right) \quad (8)$$

Tubos compuestos

Los criterios térmicos son análogos a los seguidos en el caso de las paredes compuestas. Los tubos compuestos con resistencia térmica de contacto despreciable son frecuentes en el placado de recipientes a presión, donde el material resistente suele ser acero al carbono, con recubrimiento interno de aleaciones especiales, con espesores desde 1 a 10 mm que resisten los agentes corrosivos del medio ambiental. Los recubrimientos con materiales plásticos son también frecuentes en conductores eléctricos y recipientes donde las temperaturas de funcionamiento no producen alteraciones en el recubrimiento. La distribución de temperaturas para estos casos se indica en la Fig. 3.1-2(b) y la ecuación de transmisión de calor teniendo en cuenta los coeficientes de convección y radiación

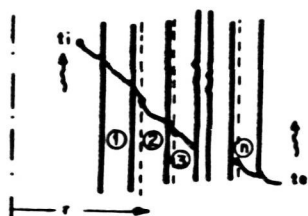


Fig. 3.1-2(b)

$$t_i - t_e = \frac{q}{2\pi L} \left(\frac{1}{R_i h_i} + \frac{1}{R_e h_e} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{k_n} \ln \left(\frac{R_{n+1}}{R_n} \right) \right) \quad (9)$$

Los tubos compuestos con huelgo entre ellos, son frecuentes en casquillos o vainas con un alma generalmente maciza, como sucede en los ejes de piezas mecánicas o en las barras de elementos

combustibles para reactivos nucleares de fisión. En estos casos y otros análogos, la resistencia térmica de contacto está sometida a las variaciones dimensionales producidas por la distribución radial de temperaturas o por alteraciones más profundas del material encerrado en la vaina. El resultado de ello es la aparición de puntos o zonas con menor resistencia de contacto, perdiéndose la uniformidad radial del flujo térmico.

En los casos en que los fenómenos de puntos de contacto no son importantes por sus consecuencias mecánicas, y la variación del flujo térmico no es elevada, puede escribirse una ecuación equivalente a la ecuación (6)

$$t_i - t_e = \frac{q}{2\pi L} \left(\frac{1}{R_i h_i} + \frac{1}{R_e h_e} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{h_n} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{k_n} \ln \left(\frac{R_{n+1}}{R_n} \right) \right) \quad (10)$$

donde h'_i y h'_e son los coeficientes que incluyen las capas de ensuciamiento en las superficies extremas, y el sumatorio de tiene en cuenta las resistencias térmicas de contacto entre las superficies que constituyen las distintas zonas o capas del tubo compuesto.

Ejemplo.- 3.1-2(1)

Calcular las pérdidas de calor en función del espesor de aislamiento en una tubería de acero comercial de 0,20 m de diámetro y 4 mm de espesor que transporta vapor de agua saturado a 150°C. La conductividad térmica del aislamiento es de 0,03 (Kcal/hm°C) entre 150°C y 10°C. La temperatura del aire ambiente es de 0°C. La superficie exterior del aislamiento tiene una emisividad de 0,025.

Solución:

Admitamos que las resistencias de contacto son despreciables

El coeficiente de transmisión de calor del vapor saturado es del orden de 5000 (Kcal/hm²°C). La película de incrustación del vapor-acero es de resistencia térmica despreciable y si la conductividad térmica del acero vale 45 (Kcal/hm°C) de la ecuación (10) se tiene

$$150-0 = \frac{q}{2\pi L} \left(\frac{1}{5000 \cdot 0,10} + \frac{1}{Re h_e} + \frac{0,04}{45} + \frac{\ln(R_e/R_i)}{k_e} \right) \approx \frac{q}{2\pi L} \left(\frac{1}{Re h_e} + \frac{\ln(R_e/R_i)}{k_e} \right) \quad (a)$$

donde k_e es la conductividad térmica del aislante y h_e el coeficiente de transmisión de calor al aire

$$h_e = h_r + h_c$$

siendo $h_r = \epsilon \sigma (T_e^4 - t_e^4) / (T_e - t_e)$, T_e , temperatura de la superficie del aislante y $t_e = 0^\circ\text{C}$; h_c para convección natural puede calcularse por la ecuación

$$\delta \quad \frac{h_c 2Re}{k_a} = 0,54 (Gr Pr)^{0,25} \quad \text{para tubos horizontales y } 10^4 < Gr Pr < 10^9$$

$$h_c = 0,54 k_a^{0,75} \left(\beta g \frac{q^2}{\mu} C_p \right)^{0,25} \left(\frac{T_e - 0}{2 Re} \right)^{0,25}$$

Para aire a 5°C

$$g = 1,27 \text{ (kg/m}^3\text{)}; \quad \beta = \frac{1}{273} \left(\frac{1}{^\circ K} \right); \quad C_p = 0,24 \text{ (kcal/kg}^\circ\text{C)}; \quad \mu = 0,061 \text{ (kg/m.h)}$$

$$k = 0,021 \text{ (kcal/h.m.}^\circ\text{C)} \quad g = 9,81 \cdot 3,6^2 \cdot 10^6 \text{ (m/h}^2\text{)}$$

$$h_c = 1,03 \left(\frac{T_a - 0}{Re} \right)^{0,25}$$

| T (°C) | $h_c Re^{0,25}$ | $h_r (\epsilon = 1)$ | $h_r (\epsilon = 0,025)$ |
|--------|-----------------|----------------------|--------------------------|
| 10 | 1,83 | 4,24 | 0,106 |
| 20 | 2,17 | 4,45 | 0,111 |
| 30 | 2,41 | 4,69 | 0,117 |
| 40 | 2,59 | 4,94 | 0,123 |

Si el aislamiento se recubre con una lámina de aluminio reflector

$\epsilon = 0,025$ h_r es menor que h_c , es decir la presencia de reflector equivale a disminuir el espesor de aislante, y puede darse el caso que una superficie reflectora sin aislante pierda menos calor que la misma superficie con aislante y emisividad elevada.

Si en primera aproximación se desprecia la radiación, la relación entre caídas de temperaturas superficie-aire y en el aislante vale

$$\frac{(\Delta t)_q}{(\Delta t)_a} = \frac{T_a}{T_i - T_a} = \frac{1}{Re h_c} \frac{k_e}{\ln(R_e/R_i)} = \frac{k_e}{1,03 (T_a/Re)^{0,25} Re \ln(R_e/R_i)}$$

$$\frac{T_a^{1,25}}{T_i - T_a} = \frac{k_e}{1,03 Re^{0,75} \ln(R_e/R_i)} \quad \frac{q}{L} = 2\pi Re h_c T_a \quad (a)$$

Dando valores a Re se obtiene T_a y por la ecuación (a), $\frac{q}{L}$

(Kcal/m tubería), $R_i = 0,104(m)$

| $\frac{R_e}{R_i}$ | $T_a(^{\circ}C)$ | $\frac{q}{L}$ | $R_e - R_i$ (cm) | h_c | R_e |
|-------------------|------------------|---------------|---------------------|-------|-------|
| 1,24 | 31,5 | 103,8 | 2,5 | 4,07 | 0,129 |
| 1,48 | 19,3 | 64,2 | 5 | 3,44 | 0,154 |
| 1,72 | 14,5 | 50,3 | 7,5 | 3,09 | 0,179 |
| 1,96 | 11 | 39,3 | 10 | 2,79 | 0,204 |
| 2,20 | 9 | 33,26 | 12,5 | 2,57 | 0,229 |

3.1-3. Esferas

El empleo de la forma esférica en las aplicaciones industriales tiene su base en la economía de material, frente a otras formas geométricas, para determinadas dimensiones y condiciones de operación. Formas esféricas cuasi perfectas son, por ejemplo, recipientes de almacenamiento de gases o líquidos. Las cabezas y fondos de recipientes cilíndricos presentan forma esférica o modificaciones de formas elípticas que, para el tratamiento de los problemas de transmisión de calor de este apartado, se consideran de flujo radial. Un tratamiento más riguroso puede hacerse con ecuaciones transformadas con flujo térmico en dos direcciones como se verá en capítulos posteriores. En el caso de una capa esférica de radios R_i y R_e Fig. 3.1-(a) en régimen estacionario

$$q = -k 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \quad (1)$$

que integrada resulta

$$q = k 4\pi \frac{R_i R_e}{R_e - R_i} (T_i - T_e) \quad (2)$$

y para un radio r tal que

$$q = k 4\pi \frac{r R_i}{r - R_i} (T_i - T) \quad (3)$$



Fig. 3.1-(a)

La ecuación (3) da la distribución de temperatura dentro del material de la capa esférica.

Comparando la ecuación (2) con la ecuación 3.1(1)

$$k S_m \frac{(T_i - T_e)}{R_e - R_i} = 4\pi k \frac{R_i R_e}{R_e - R_i} (T_i - T_e) \quad (4)$$

y

$$S_m = 4\pi R_i R_e = \sqrt{S_i S_e} \quad (5)$$

donde S representa la superficie de la esfera correspondiente a los radios interior (R_i), exterior (R_e) o medio (r_m).

Si las superficies interna y externa de la capa esférica están en contacto con fluidos a temperaturas t_i y t_e y coeficientes de convección h_i y h_e respectivamente, la ecuación (3) toma la forma

$$t_i - t_e = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{h_i R_i^2} + \frac{1}{h_e R_e^2} + \frac{R_e - R_i}{k R_e R_i} \right) \quad (6)$$

Capas esféricas compuestas

Capas esféricas unidas con resistencia térmica de contacto despreciable se encuentran en casos de protección de las superficies interna o externa con capas placadas de distintos materiales, metálicos, cerámicos o plásticos como en el caso de cilindros compuestos y la ecuación correspondiente generalizada a n capas

$$t_i - t_e = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{h_i R_i^2} + \frac{1}{h_e R_e^2} + \sum_{n=1}^n \frac{1}{k_n} \frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+1} R_n} \right) \quad (7)$$

Es frecuente el aislamiento de capas esféricas. En unos casos para evitar pérdidas de calor al exterior y en otros casos para mantener el interior del recipiente a baja temperatura. En estas aplicaciones, las capas esféricas presentan resistencias térmicas de contacto con los problemas mencionados anteriormente y la ecuación de transmisión de calor para n capas es

$$t_i - t_e = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{h'_i R_i^2} + \frac{1}{h'_e R_e^2} + \sum_{n=1} \frac{1}{h_n R_n^2} + \sum_{n=1} \frac{1}{k_n} \frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+1} R_n} \right) \quad (8)$$

donde h'_i y h'_e son los coeficientes de transmisión de calor que incluyen convección, radiación y ensuciamiento de las superficies extremas, en forma análoga a las ecuaciones 3.1-(6) y 3.1-1(10).

3.1-4. Aislamientos térmicos

Los aislamientos térmicos son necesarios para evitar pérdidas de energía térmica al medio ambiente que rodea los elementos de una instalación, tales como recipientes, tuberías y otros accesorios. La cantidad de energía térmica que se consume en la tierra es creciente y el desarrollo de buenos aislamientos térmicos contribuye a una utilización más racional de aquella. El consumo de energía en forma general se distribuye en 50% en usos industriales 25% en transportes y 25% en usos domésticos. Las industrias de mayor consumo de energía son: acero, aluminio, productos químicos, petroquímicas, papel, vidrio, arcillas y cemento, alimentación. El 50% de la energía que se pierde tiene lugar a temperaturas inferiores a 100°C, 25% a temperaturas menores de 250°C a temperaturas superiores a 250°C. Se estima que con buenos aislamientos las pérdidas pueden reducirse en 15% respecto a la situación actual compensando positivamente los precios de coste de materiales, amortización y mantenimiento. En la gráfica 3.1-1(a) se indica el flujo térmico para aislamientos con óxido de magnesita de 85%.

Los aislamientos térmicos se caracterizan por valores bajos de la conductividad térmica aunque la elección de un determinado aislante hay que tener en cuenta otros factores como son:

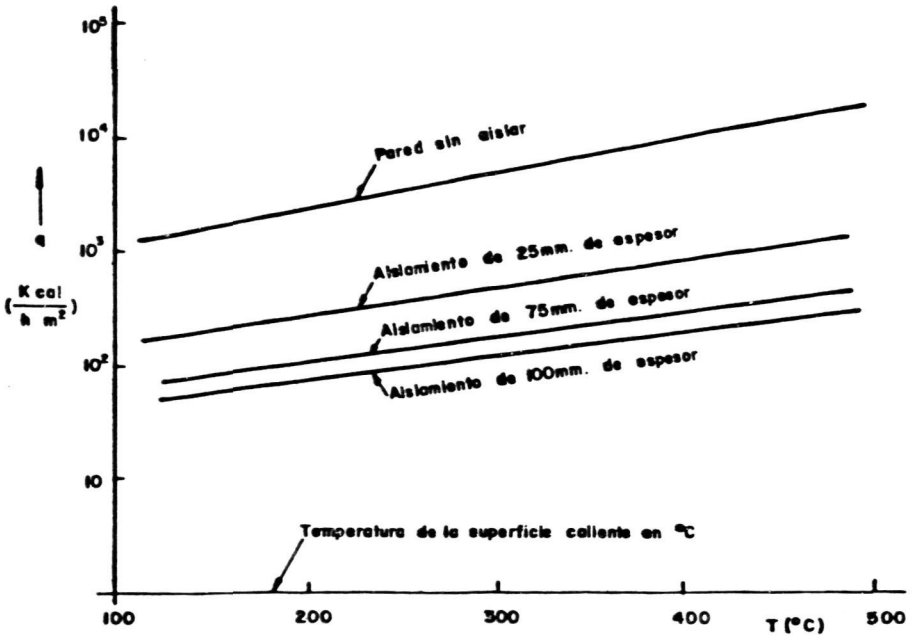
- a) Formas geométricas y tamaños.
- b) Propiedades que afectan a la conductividad térmica, tales como temperatura, humedad, sinterización, emisividad.

- c) Propiedades mecánicas: resistencia a tracción y compresión, resistencia al choque térmico, fatiga, cambio de dimensiones con la temperatura, abrasión.
- d) Propiedades eléctricas resistencia a distintas temperaturas y humedades.
- e) Propiedades químicas, corrosión con y sin humedad, puntos de inflamación en medios ambientales de gases, polvos, etc.
- f) Propiedades de trabajo: cortes y preparación de formas, adhesivos, secado manejabilidad, aspectos sanitarios, olores, irritación de ojos o de la piel, toxicidad por polvos o disolventes de los materiales de juntas.

La elección de un material aislante exige buen juicio y análisis de sus propiedades para la función específica a que se destina. Los datos procedentes de casas comerciales son frecuentemente escasos y los resultados de medidas experimentales en laboratorios están dispersados en revistas no específicas sin que en muchos casos se tenga en cuenta el comportamiento en servicio o los problemas de uniones o anclajes a los elementos principales del equipo, degradación del material y variación de las propiedades con el tiempo.

Los modos de transmisión en un aislante son los de conducción, convección y radiación como ya se ha visto en los apartados anteriores. El aislamiento térmico se logra aumentando la resistencia térmica de un material a la transmisión de calor por cualquiera de los modos anteriores. De acuerdo con el intervalo de temperaturas de funcionamiento los aislantes suelen agruparse en

- 1) Aislantes para temperaturas elevadas $T > 500^{\circ}\text{C}$
- 2) " " " intermedias $500^{\circ}\text{C} > T > 100^{\circ}\text{C}$
- 3) " " " bajas $100^{\circ}\text{C} > T > -100^{\circ}\text{C}$
- 4) " " " criogénicas $-100^{\circ}\text{C} > T > -270^{\circ}\text{C}$



Gráfica 3.1-1(a)

Pérdidas de calor al ambiente de una pared plana sin aislar y con distintos espesores de aislamiento de MgO (85%) .

1. Aislantes para temperatura elevadas

A temperaturas superiores a 500°C los aislantes térmicos son generalmente de tipo cerámico tanto más refractarios cuanto mayor es la temperatura de operación. Estos materiales en una sola fase presentan conductividades térmicas elevadas frente a las conductividades que pueden obtenerse cuando estos mismos materiales se preparan, con poros en su interior, en forma de fibra agrupadas en haces, tejidos o aglomerados de ambos tipos. En casos especiales como sucede en los aislamientos de componentes de reactores nucleares el aislamiento se logra con capas múltiples de metales sin puntos o zonas de contacto, y son conocidos como aislamientos *reflectores*, en los cuales la resistencia a la conducción, se logra por la proximidad de las láminas y la resistencia a la radiación por el bajo poder emisivo de los metales. Esta distancia se puede aplicar a cualquier temperatura, como se ha descrito en el apartado 1.4, y es adecuado en equipos que puedan tener contaminación, necesidades frecuentes de inspección o limpieza especial. Su precio es elevado pero sus ventajas y vida de funcionamiento hacen que éste sistema se extienda últimamente a otros procesos industriales que utilizaban los aislamientos clásicos. Entre los aislantes para temperaturas superiores a 500°C pueden citarse:

- a) Ladrillos cerámicos aislantes
- b) Morteros y sus mezclas
- c) Silicato cálcico
- d) Fibras minerales
- e) Fibras cerámicas de $Al_2O_3-SiO_2$
- f) Fibras de SiO_2 , Al_2O_3 , ZrO_2 , carbón
- g) Aislamientos reflectores de láminas metálicas.

Los ladrillos aislantes se obtienen por mezclas dosificadas de material refractario con productos combustibles que se eliminan por calentamiento resultando un ladrillo poroso con densidad aparente comprendida entre 25-50% de la densidad teórica.

Por dosificación de materiales y granulación, se obtienen morteros o hormigones para temperaturas hasta 1400°C con mezclas desde cemento Portland con arenas y gravas ordinarias hasta refractarios sílico aluminosos. El carácter aislante puede aumentarse además de los poros, por materiales también aislantes como vermiculita en las zonas exteriores.

A temperaturas superiores a 500°C la conductividad térmica de los aislantes se ve afectada por la radiación, que puede llegar a ser el mecanismo de transmisión de calor predominante. En los materiales transparentes como sílice fundida el aumento de la conductividad comienza a 500°C , mientras que los materiales traslúcidos Al_2O_3 , MgO , porcelanas, el efecto es importante a partir de 1000°C . A temperaturas elevadas, resulta difícil conocer el efecto de la radiación aunque las estimaciones son de 2-3 veces el valor de la conductividad térmica del sólido. El ZrO_2 presenta menor aumento por radiación.

En los materiales porosos, el tamaño de los poros afecta notablemente a los valores de la conductividad térmica. El fluido que llena los poros es normalmente aire y para tamaños de poros $5 \cdot 10^{-3}$ (mm) la convección es despreciable y el camino libre medio de las moléculas es superior al tamaño del poro, y la contribución a la conductividad térmica del gas disminuye cuando aumenta la temperatura. El efecto de radiación es mayor cuando el diámetro del poro aumenta de acuerdo con la ecuación

$$k_r = 4\epsilon\sigma T^3 D_p \quad (1)$$

donde, D_p es el diámetro del poro y las restantes variables han sido consideradas en los capítulos anteriores.

Considerando el sólido como una matriz con poros aislados se puede escribir

$$k_e = v_s k_s + v_p (k_g + 4\epsilon\sigma T^3 D_p) \quad (2)$$

Para diámetros pequeños $k_e \rightarrow v_s k_s$

Si se agrupan los poros en serie, el aislamiento es más efectivo y de acuerdo con las consideraciones del apartado 2.7 se puede escribir

$$k_e = \frac{k_g + 4\epsilon\sigma T^3 D_p}{1 - v_s \left(1 - \frac{k_g + 4\epsilon\sigma T^3 D_p}{k_s}\right)} \quad (3)$$

donde v_s es el % de volumen del sólido. La ecuación (3) supone capas continuas de poros en forma análoga a polvos aislantes. Los valores más bajos de k_e deben obtenerse con poros pequeños y materiales opacos. Para aislantes de alta temperatura, los materiales porosos presentan fenómenos de sinterización lo que obliga a elegir materiales poco sinterizables, es decir puros y con tamaños de poro lo más uniforme posible.

Para temperaturas superiores a 1100°C , los materiales se sustituyen por sólidos, que normalmente tienen mayor conductividad térmica que los aislantes porosos, pero presentan facilidad de preparación y aplicación. Los ladrillos de carbón porosos constituyen una excepción, y la conductividad térmica puede alcanzar valores de $0,86(\text{Kcal/hm}^\circ\text{C})$ en un amplio intervalo de temperaturas $1500-2000^\circ\text{C}$, lo que indica un efecto despreciable de la radiación en el margen considerado.

Las fibras aislantes de alta temperatura se han desarrollado en los últimos años, siendo las más importantes: carbón, sílico aluminosas y de óxidos puros SiO_2 , Al_2O_3 y ZrO_2 . Se emplean en forma de ramas, matas o tejidos, y sus temperaturas máximas de operación son del orden de 1300°C aunque en periodos de tiempo no muy largos pueden alcanzar 1500°C . La conductividad térmica de estos materiales varía con la temperatura y la densidad de las fibras, tal como se indica en las figuras 3.1-4(b) y 3.1-4(c).

Ejemplo.- 3.1-4(1)

Se desea estimar el aislamiento para un horno de tratamientos que debe funcionar a 2000°C de vacío y cuyas dimensiones interiores son $0,30\text{ m}$ de diámetro y 1 m de longitud. Temperatura de

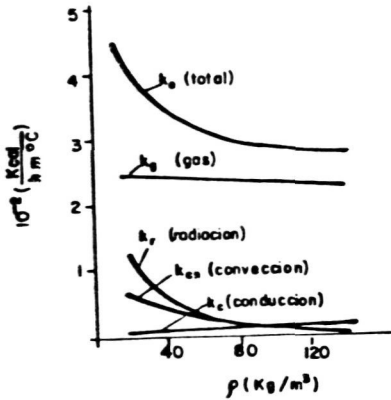


Fig. 3.1-4(b).- Conductividad de materiales fibrosos en función de la densidad y de las contribuciones por conducción, convección y radiación.

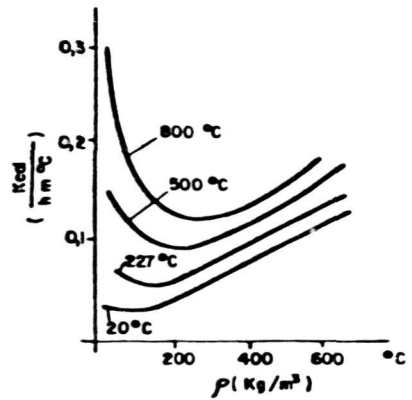


Fig. 3.1-4(c).- Conductividad térmica k_e de materiales fibrosos-densidad.

la pared exterior 40°C).

Solución:

A 2000°C) y en vacío se pueden elegir

- a) materiales densos
- b) materiales de fibras
- c) reflectores

Los materiales densos tipo circona tienen conductividades térmicas elevadas frente a los materiales de fibras, y por ello, se eligen:

- 1) Grafito en tela de 5 (mm) de espesor
- 2) Circona con Y_2O_3 en tela de 2 (mm) de espesor.
- 3) Láminas finas de volframio.

1) Grafito

| | | | |
|---------------|------|------|------|
| T (°C) | 500 | 1500 | 2500 |
| k (Kcal/hm°C) | 0,08 | 0,25 | 0,5 |

En forma analítica puede hallarse $k = a + b T (^{\circ}\text{C})^2$ y a partir de los datos se tiene $a = 0,07$; $b = 0,07 \cdot 10^{-6}$.

Para una temperatura en la superficie externa del horno de 40°C

$$\bar{k} = \frac{1}{2 \cdot 10^3 - 40} \int_{40}^{2000} (a + b T^2) dT = a + \frac{b}{2} (2000 + 400) \approx a$$

admitiendo que las partes superior e inferior están más aisladas que la superficie lateral

$$q = \bar{k} 2\pi L \frac{2000 - 40}{\ln\left(\frac{R_e}{0,15}\right)}$$

Obteniéndose

| | | | | | | | |
|---|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----|
| $\frac{q}{L} \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}} \right)$ | 26,2 · 10 ³ | 1,3 · 10 ⁴ | 5,5 · 10 ³ | 2,9 · 10 ³ | 1,6 · 10 ³ | 1,2 · 10 ³ | 878 |
| Número de capas aislantes | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 | 30 | 50 |

2) Circonio

| | | | | |
|---|------|------|------|------|
| T (°C) | 500 | 1000 | 1700 | 2000 |
| $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^{\circ}\text{C}} \right)$ | 0,05 | 0,14 | 0,32 | 0,47 |

$$k_e \approx 0,033 + 0,109 \cdot 10^{-6} T^2 (^{\circ}\text{C})^2$$

y se obtiene

| | | | | | |
|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------|-----|
| $\frac{q}{L} \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}} \right)$ | 6,2 · 10 ³ | 4,9 · 10 ³ | 2,5 · 10 ³ | 1200 | 723 |
| Nº Capas aislantes. | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |

3) Láminas de volframio

La emisividad de volframio vale

| T(°C) | 40 | 500 | 1000 | 2000 |
|------------|------|------|------|------|
| ϵ | 0,02 | 0,08 | 0,15 | 0,3 |

Por la ecuación

$$q = \frac{S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} \quad \text{Si } \frac{S_1}{S_2} \approx 1 \quad \epsilon_1 \approx \epsilon_2 = 0,08$$

$$\frac{q}{L} = \frac{2\pi \cdot 488 (22,73^4 - 3,23^4)}{\left(\frac{2}{\epsilon} - 1 \right) (n+1)}$$

donde n es el número de láminas, véase ejemplo 1.4-3(1) y

| $\frac{q}{L} \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}} \right)$ | $6,6 \cdot 10^4$ | $5,4 \cdot 10^3$ | 533 |
|---|------------------|------------------|-----|
| Número láminas | 5 | 50 | 500 |

En consecuencia el orden de preferencia sería: circona, grafito, reflector.

2. Aislantes para temperaturas intermedias:

Cubren un gran número de aplicaciones industriales, generalizadas en sistemas de producción y distribución de vapor, industrias de transformación e industrias químicas. Entre los materiales más utilizados se encuentran:

- Polvo de caparazones de diatomeas;
- Ladrillos cerámicos de baja densidad;
- Silicato cálcico con amianto.
- Oxido de magnesita en polvo y aglomerado con amianto;
- Lanas o fibras de roca;
- Lanas o fibras de vidrio;
- Vermiculita expandida con y sin cementos;
- Fibras cerámicas
- Vidrio celular;
- Sistemas metálicos reflectores.

Los materiales anteriores se preparan en placas, tubos o telas, rígidos, semirígidos o flexibles según modelos y normas de aplicación de las firmas comerciales. En estos intervalos de temperatura, son muy utilizados, las fibras de roca o de vidrio que sustituyen con ventaja a los aislamientos de silicato cálcico con amianto, debido a los efectos nocivos para la salud de este último. La conductividad térmica varía generalmente en forma lineal entre 100-400(°C) y sus valores son del orden de $6,02 \cdot 10^{-2}$ (Kcal/n.m.°C) Tablas véase Apéndice II.

3) Aislantes para temperaturas bajas

Las aplicaciones de éste intervalo de temperatura son: usos domésticos, alimentación y un amplio espectro de procesos físico-químicos tales como separación de gases, acondicionamiento de aire, almacenamiento de gases, recuperación de disolventes, fermentaciones, etc.

Los materiales aislantes son muy numerosos, se extienden desde productos naturales tratados convenientemente como, corcho, madera fibras, vegetales, hasta productos orgánicos gomas, plásticos en placas o fibras. Los materiales de fibras minerales mencionados en los apartados anteriores también tienen aplicación en temperaturas bajas. Dada la gran variedad de materiales resulta más conveniente agruparlos por su estructura:

- a) Materiales sólidos utilizados frecuentemente en construcción, ladrillos, cementos, yesos, morteros y estructuras compuestas, entre otros.
- b) Fibras o lanas de vidrio, rocas, maderas, papel, cerámicas.
- c) Estructuras celulares porosas y no porosas; materiales orgánicos e inorgánicos, vidrio celular, espumas de cloruro de vinilo, poliuretano, poliestireno, polivinilacetato.
- d) Polvos inorgánicos, diatomeas, vermiculita, óxido cerámicos.

- e) Láminas finas generalmente Al , recubiertas con materiales aislantes.

Un aspecto importante en los aislamientos para bajas temperaturas es la presencia de humedad. Los materiales aislante suelen ser higroscópicos, del orden del 10% para presión de una atmósfera y humedad relativa del 50-60% . Si la presión de vapor de agua en el exterior del aislamiento es superior a la correspondiente al interior, se produce una difusión y el vapor pasa a la estructura del aislante.

La conductividad del agua es del orden de 25 veces superior a la del aire y así, un aislante que presente baja conductividad térmica, cuando está seco, puede afectarse por la humedad ambiental, cuando está instalado, y comportarse peor que un aislante de conductividad más elevada, pero menos sensible a la humedad. La distribución de humedad dentro del aislante es no lineal y la concentración de agua es mayor en las partes más frías. Y si la temperatura es baja, se producen puentes de hielo con aumento notable de la conductividad térmica. Por otra parte la condensación de agua desprende el calor latente que se transmite a través del vapor de agua si la estructura no es muy cerrada, además de favorecer los fenómenos de convección.

Una forma empírica para calcular, la conductividad térmica en función de la humedad, y utilizar los factores de convección sobre la conductividad térmica de los materiales en estado seco, es la siguiente:

| humedad (%) | 1 | 2,5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|------|------|------|------|------|------|------|
| factor de multiplicación de k (en estado seco). | 1,30 | 1,55 | 1,75 | 2,10 | 2,35 | 2,55 | 2,75 |

Un método efectivo de evitar la pérdida de capacidad de un aislante por humedad es disponer barreras al vapor de agua utilizando varios materiales donde la última capa presente un cierre cuasi estanco. Se deben cuidar especialmente los puntos o zonas débiles ta

les como sujeciones, uniones de ángulos, válvulas y salidas de elementos de instrumentación, colocando cementos o materiales plásticos que no se afecten por las dilataciones contracciones o vibraciones de la instalación. Estos cuidados deben ser tanto mayores cuanto menores son las temperaturas de operación.

Los problemas de humedad han dado origen al desarrollo de materiales de estructura celular o expandidos, conocidos como espumas, tanto inorgánicos vidrios y cementos, como orgánicos, poliestireno, cloruro de poli vinilo, uretanos. Los huecos o poros contenían aire o gases de conductividad baja y por las dimensiones de los poros la convección es prácticamente despreciable. La fase gaseosa ocupa un elevado volumen del material, y el mecanismo que predomina es la conducción. Estos materiales son sensibles el envejecimiento y una disminución de su resistencia al vapor de agua afecta notablemente a sus propiedades aislantes.

El aislamiento con capas múltiples, se logra con fibras o polvos de baja conductividad térmica entre láminas de aluminio de baja emisividad. Estos materiales son también sensibles a la humedad por lo cual es frecuente la necesidad de vacío, tanto mayor cuanto menor es la temperatura. Con estructuras de 60 capas/cm pueden obtenerse conductividades térmicas equivalente de $1,54.10^{-5}$ (Kcal/hm°C).

Los materiales en polvo también se utilizan para temperaturas bajas en vacío, y la conducción se hace a través del material del aislamiento rodeado de una capa de gas lográndose un sistema equivalente al aislamiento de capas múltiples. Presenta la ventaja de utilizar vacíos moderados de 10^{-2} (mm de Hg) si bien hay que asegurar la ausencia de humedad. Con tierra de diatomeas, o perlita pueden obtenerse conductividades térmicas equivalentes de (Kcal/hm°C) . Tablas, véase Apéndice II

Aislamientos domésticos

Los seres humanos desarrollan sus actividades físicas e intelectuales con esfuerzo mínimo cuando gozan de un clima agradable, y para ello, los edificios deben estar protegidos para temperatu-

ras extremas en invierno y verano, además de condiciones adecuadas de humedad y ausencia de gases nocivos, en el aire. Por otra parte, el consumo racional de energía en cualquier sistema impone la necesidad de buenos aislamientos y así el acondicionamiento climático de las casas debe ser estudiado en el doble aspecto: humano y energético.

El aislamiento térmico de un edificio depende de las estructuras compuestas utilizadas en su construcción, proporciones volumétricas, orientación y huecos de ventanas, puertas posibles, etc. Normalmente se introducen aislamientos suplementarios, lana de vidrio o roca, materiales de estructura celular o mezclas con cementos, en conjuntos normalizados. El tratamiento térmico es análogo al desarrollado en los capítulos anteriores, simplificado por el intervalo de temperaturas ambientales. Dado la variedad de estructuras de materiales compuestos que se utilizan en la construcción, se insiste en el análisis térmico de estas estructuras porque los efectos de humedad o disposición alteran considerablemente las hipótesis de cálculo.

El calor o frío necesario para acondicionar un edificio puede estimarse en primera aproximación compuesto de tres factores:

- a) Ventilación
- b) Pérdidas por paredes
- c) Orientación.

El calor de ventilación se expresa por la ecuación

$$q_v = c_p V (t_i - t_e) \quad (1)$$

donde; $V, (m^3/h)$ aire a renovar; $t_i(^{\circ}C)$, temperatura interior; $t_e(^{\circ}C)$, temperatura exterior $c_p (kcal/kg^{\circ}C)$ calor específico por unidad de volumen a presión constante. Las pérdidas por las paredes

$$q_p = U.S. (t_i - t_e) \quad (2)$$

donde $U (kcal/h.m^2.^{\circ}C)$ es el coeficiente de transmisión de calor com

Puesto para la estructura que se considere con aire a $t_i(^{\circ}\text{C})$ en el interior del edificio y $t_e(^{\circ}\text{C})$ en el exterior.

Las pérdidas por orientación se expresan en % de las pérdidas por las paredes.

El calor total necesario

$$Q = Q_v + Q_p + Q_o \quad (3)$$

En la tabla 2.1-3,3(a) se indican valores para calcular los términos de la ecuación (3) para elementos estructurales simples.

Ejemplo.- 2.1-4(3)

Estimar las pérdidas de calor en una nave de las características siguientes:

- 7.12 (m^2) de superficie; orientación NE y NO para la longitud de 12 m y la longitud de 7 m es pared medianera a naves a 15($^{\circ}\text{C}$).

3 plantas de 3,8 (m) de altura con 36 ventanas metálicas de doble vidrio de 2.1 (m) , 18 en cada fachada.

Azotea compuesta de suelo de losetas cerámicas, vigas de hormigón armado con cuñas cerámicas y enlucido de yeso interior.

Suelo de la nave con cemento de 20 cm de espesor.

Puertas de entrada, metálicas de 4.3,5 (m^2) .

Renovación de aire 25 m /h cada 100 (m^3) .

Temperatura interior 22($^{\circ}\text{C}$). Temperatura mínima exterior 0($^{\circ}\text{C}$) . Funcionamiento continuo.

Paredes fachada y medianeras de ladrillo hueco, cámara de aire y aislamiento de 7 (cm) con espesor total de 40 (cm) .

Solución:

- Volumen interior aproximado $7.12.3 = 957 \text{ (m}^3\text{)}$

$$q_v = 0,29 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} \right) \cdot 10.25 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right) \cdot (22-0)(^\circ\text{C}) = 1595 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

Pérdidas en ventanas

$$36.2 \text{ (m}^2\text{)} \cdot 3,69 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) \cdot (22-0)(^\circ\text{C}) = 5844 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

Pérdidas en puertas

$$4.3,5 \text{ (m}^2\text{)} \cdot 6,27 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) (22-0)^\circ\text{C} = 1931 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

Pérdidas en suelo nave

$$96 \text{ (m}^2\text{)} \cdot 3,6 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) (22-0)(^\circ\text{C}) = 7603 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

Pérdidas en azotea

$$96 \text{ (m}^2\text{)} \cdot 1,3 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) (22-0)(^\circ\text{C}) = 2745$$

Pérdida paredes fachada

$$12.3,8.3,2 - 36.2 = 187,5 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$187,5 \text{ (m}^2\text{)} \cdot 0,68 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) (22-0)(^\circ\text{C}) = 2805 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

Paredes medianeras

$$2.7.3,8 \text{ (m}^2\text{)} \cdot 0,68 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) (22-15) = 253 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

Pérdidas por orientación

$$2805 \cdot 0,1 = 280,5 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

Pérdidas por disposición

$$2805 \cdot 0,3 = 841 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

$$\begin{aligned}\text{Calor total} &= 1585 + 5844 + 1931 + 7603 + 2745 + 2805 + 253 + 280,5 + 841 \\ &= 23897 \text{ (Kcal/h)}\end{aligned}$$

TABLA 3.1-4.3

COEFICIENTES TOTALES DE TRANSMISION DE CALOR EXPRESADOS EN
(Kcal/hm²°C).

Paredes exteriores

Piedra dura con revestimiento interior

| | |
|------------------|------|
| 30 cm de espesor | 2,40 |
| 45 cm " " | 2,06 |
| 60 cm " " | 1,72 |

Piedra semidura con revestimiento interior

| | |
|------------------|------|
| 30 cm de espesor | 2,15 |
| 45 cm " " | 1,97 |
| 60 cm " " | 1,63 |

Ladrillo macizo con revestimiento interior

| | |
|------------------|------|
| 30 cm de espesor | 1,29 |
| 45 cm " " | 1,03 |
| 60 cm " " | 0,94 |

Ladrillo hueco revestido por las dos caras

| | |
|------------------|------|
| 15 cm de espesor | 1,54 |
| 20 cm " " | 1,37 |
| 30 cm " " | 0,94 |

Hormigón (composición normal)

| | |
|------------------|------|
| 12 cm de espesor | 1,97 |
| 20 cm " " | 1,37 |
| 30 cm " " | 1,11 |

Ladrillos huecos de hormigón

40 cm de espesor 1,03

Paredes exteriores compuestas

Composición de la pared: ladrillo macizo,
cámara de aire de 5 cm , pared interior
de ladrillo hueco de 5 cm , revestimien-
to de 2 cm .

| | |
|------------------------|------|
| 20 cm de espesor total | 1,37 |
| 35 cm " " " | 1,03 |
| 45 cm " " " | 0,86 |

La misma pared con aislante de 7 cm .

| | |
|------------------------|------|
| 20 cm de espesor total | 0,86 |
| 35 cm " " " | 0,77 |
| 45 cm " " " | 0,68 |

Ladrillo hueco revestido, cámara de aire de 5 cm
ladrillo hueco de 5 cm , revestimiento 2 m .

| | |
|------------------------|------|
| 25 cm de espesor total | 1,1 |
| 30 cm " " " | 0,94 |
| 40 cm " " " | 0,77 |

La misma pared con aislante de 7 cm .

| | |
|------------------------|------|
| 30 cm de espesor total | 0,77 |
| 35 cm " " " | 0,68 |
| 40 cm " " " | 0,68 |

Suelos y techos

Suelo, madera. Techo, Vigas madera (20-25) cm

| | |
|-------|------|
| Suelo | 1,63 |
| Techo | 1,8 |

Suelo, madera sobre ladrillo. Techo, listones maderas con yeso, vigas madera, ladrillo, espesor total 20-25 cm

| | |
|-------|------|
| Suelo | 0,86 |
| Techo | 0,94 |

Suelo, madera sobre hormigón. Techo, yeso, vigas, hierro, hormigón. Espesor total 20-25 cm.

| | |
|-------|------|
| Suelo | 0,86 |
| Techo | 0,94 |

Suelo madera sobre bovedilla ladrillo. Techo, yeso vigas hierro bovedilla ladrillo. Espesor 20-25 cm.

| | |
|-------|------|
| Suelo | 0,86 |
| Techo | 0,94 |

Suelo vidrio 3 cm . Techo, vigas hierro, vidrio

| | |
|-------|------|
| Suelo | 3,18 |
| Techo | 3,87 |

Suelo madera, vigas hormigón armado. Techo, yeso zona intermedia hormigón. Espesor 25 cm .

| | |
|-------|------|
| Suelo | 0,04 |
| Techo | 1,11 |

Igual que el caso anterior con suelo de cemento

| | |
|-------|------|
| Suelo | 1,97 |
| Techo | 2,06 |

Suelo madera. Vigas de hormigón armado. Techo yeso zona intermedia, cuña cerámica. Espesor 25 cm

| | |
|-------|------|
| Suelo | 0,86 |
| Techo | 1,03 |

Puertas y ventanas

| | |
|--|------|
| Ventana exterior de madera (30% madera, vidrio simple) | 4,98 |
| Ventana exterior metálica | 6,02 |
| Ventana exterior de madera y doble vidrio | 3,18 |
| Ventana exterior metálica y doble vidrio | 3,69 |
| Doble ventana de madera | 3,18 |
| Doble ventana metálica | 3,18 |
| Puerta madera | 3,18 |
| Puerta metálica | 6,27 |
| Ventanas interiores de madera | 3,09 |
| Ventanas interiores metálicas | 3,61 |
| Puertas interiores de madera | 2,49 |
| Puertas interiores de madera de doble pared | 1,97 |

Paredes interiores

Ladrillo macizo

| | |
|------------------|------|
| 15 cm de espesor | 1,89 |
| 25 cm " " | 1,37 |
| 35 cm " " | 1,03 |

Ladrillo hueco

| | |
|------------------|------|
| 10 cm de espesor | 1,72 |
| 15 cm " " | 1,37 |
| 35 cm " " | 1,03 |

Hormigón

| | |
|------------------|------|
| 25 cm de espesor | 1,8 |
| 40 " " " | 1,46 |

Tabiques

| | |
|-------------------------------|------|
| 10 cm espesor ladrillo macizo | 2,06 |
| 10 cm " " hueco | 1,72 |

Azoteas

Suelo, losetas cerámicas

Vigas, hormigón armado

Techo yeso

Zona entre suelo y techo cuñas cerámicas

Espesor 30 cm

Suelo o techo 1,4

Suelo, losetas cerámicas

Vigas hormigón armado

Techo yeso

Espesor 20 cm

Suelo o techo 2,4

Suelo, cemento

Vigas madera

Espesor 5 cm 4,5

10 cm 4,0

15 cm 3,6

Cubiertas

Pizarra con recubrimiento 5,8

Placas de uralita sobre madera 4,4

Orientación

En paredes orientadas a N , NE y NO aumentan 10%.

Clima

En zonas de humedad aumentan 10% en paredes exteriores

Vientos

Para velocidades superiores a 4 m/s aumentan el coeficiente de transmisión de calor en 5% si $V = 1$; 10% si $V = 2$ y 15% si $V = 5$.

Disposición de paredes exteriores

| | | |
|---|--|-----|
| | Paredes contiguas en ángulo recto aumentar | 20% |
| | " opuestas entre si aumentar | 30% |
| 3 | " unidad " " " | 40% |
| 4 | " " " " " | 50% |

Alturas

Hasta 4 m aumentar 2%

Para alturas superiores a 4 m aumentar 4% hasta un máximo de 20% .

Ventilación

| | | | |
|---------------|----------------------|--------------|-------------------------|
| Salas comunes | 25 m ³ /h | para locales | 0-100 m ³ |
| | 20 " | | 100-500 m ³ |
| | 15 " | | 500-1000 m ³ |

Salas de muchas personas o presencia de gases nocivos renovaciones de acuerdos con las necesidades.

4) Aislamiento para temperaturas criogénicas

Los materiales para aislamientos de temperaturas muy bajas son generalmente los mismos que los mencionados para temperaturas bajas con la salvedad de una mayor calidad, distribución de estructuras, vacíos superiores y perfección de las instalaciones, generalmente, se realizan por firmas especializadas. Los tipos de aislamientos más frecuentes son

- a) Reflectores con vacío
- b) capas múltiples
- c) Polvos

Los reflectores son metales muy pulidos con emisividades muy bajas del orden de 0,01. Estos metales se obtienen por deposición en los más caros como oro o plata, o por pulido con eliminación de vestigios de impurezas de grasa o aceites, en materiales estructurales de cobre o aluminio. La transmisión de calor por conducción en el gas del medio, se reduce por vacío superior a $10^{-3}(\text{mm})$ de Hg. Las pérdidas por radiación se calculan por las ecuaciones del apartado 1.4-3 y las pérdidas por conducción por la ecuación de Kundsén para gases en vacío

$$\frac{q}{S} = A \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \sqrt{\frac{R}{8\pi M T}} \cdot P (T_1 - T_2) \quad (1)$$

donde A es el coeficiente de acomodación

$$A = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{A_2} - 1 \right)}$$

A_1 y A_2 son los coeficientes de acomodación a las temperaturas T_1 y T_2 y que definen los intercambios de energía entre las moléculas del gas y la superficie. En superficies limpias metálicas a 300°K, A vale 0,3 para H_2 y He, 0,7 para Ne y 0,8-0,9, para N_2 y O_2 . En el punto de condensación del gas, tienden a valor unidad. $T \approx (T_1 + T_2)/2$; γ es la relación de calores específicos \bar{C}_p/\bar{C}_v ; P es la presión del gas; M, peso molecular; S superficie.

En los aislamientos de capas múltiples, se disponen capas

alternadas de láminas de aluminio con láminas de fibras de vidrio de 0,01 mm de espesor formando conjuntos de 15-40 (capas/cm) y densidades globales de 50-300 (kg/m³). La resistencia térmica a la radiación la dan las láminas de aluminio y la resistencia a la conducción el material de fibra de vidrio. Para aumentar la resistencia a la conducción, el sistema se pone a vacío, obteniéndose valores de la conductividad térmica equivalente, de $2,6 \cdot 10^{-3}$ (Kcal/hm°C) a 10^{-4} mm de Hg, hasta $2 \cdot 10^{-5}$ (Kcal/hm°C) a 10^{-5} mm de Hg, para un intervalo de temperatura de la pared fría comprendido entre 20°K - 75°K.

Los materiales pulverulentos de bajas temperaturas son de naturaleza orgánica, como esférica fenólicas, o inorgánicas, como perlita, obtenida por calcinación con agua de cristalización de rocas volcánicas, o los aerógeles de sílice, obtenidos por vaporización de gel de sílice con expansión y condensación posterior. Las conductividades térmicas de estos materiales oscilan entre $2,4 \cdot 10^{-3}$ (Kcal/hm°C) con densidades de 100 (kg/m³). Su resistencia a la radiación puede aumentarse por recubrimiento con polvo de aluminio obteniéndose conductividades equivalentes del orden de $4 \cdot 10^{-4}$ (Kcal/hm°C). El vacío aumenta la resistencia a la conducción, y con valores 100 veces inferiores al vacío de capas múltiples, es decir, del orden de 10^{-3} mm de Hg, se obtienen conductividades térmicas equivalentes con gel de sílice de $4,5 \cdot 10^{-4}$ (Kcal/hm°C). Los polvos, presentan la desventaja de la abrasión, propiedades higroscópicas y combustión con aire, si son orgánicos, consideraciones a tener en cuenta, en la elección y diseño de estos aislamientos.

Los aislamientos del tipo multicapas se utilizan frecuentemente para líquidos de bajas temperaturas de ebullición He (4,21°K), H₂ (20,39°K), H₂ (p) (20,26°K), Ne (27,07°K) mientras que los polvos se usan para líquidos de temperaturas de ebullición superiores; Aire (78,8 - 81,8°K), Ar (87,27°K), N₂ (77,35°K), O₂ (90,19°K), CO (81,63°K), CH₄ (111,73°K).
Tablas, véase Apéndice II.

Ejemplo: 3.1-4(4)

Un depósito para almacenar oxígeno líquido tiene dimensiones de 2,75 m de diámetro y 17 m de longitud. Se desea conocer el espesor de aislante de perlita expandida de densidad $200 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ y a vacío de 10^{-2} mm de Hg para que las pérdidas por evaporación de oxígeno no superen 0,13% del volumen total por día.

Solución:

La conductividad térmica de la perlita expandida entre la temperatura ambiente 293°K y la temperatura de ebullición normal del O_2 , $90,19^\circ\text{K}$ puede tomarse $0,0017 \text{ Kcal/hm}^\circ\text{C}$.

Volumen del depósito

$$\frac{\pi D^2}{4} L = 3,14 \cdot \frac{2,75^2}{4} \cdot 17 = 100,9 \text{ (m}^3\text{)}$$

Volumen ocupado por O_2 gas $\approx 5\%$ del volumen total $\approx 5 \text{ (m}^3\text{)}$

Volumen de oxígeno líquido $95,9 \text{ (m}^3\text{)}$.

Pérdidas de oxígeno por día $95,9 \cdot 0,0013 = 0,124 \text{ (m}^3\text{/día)}$

Calor de vaporización del oxígeno $50,9 \text{ Kcal/kg}$; densidad $1140 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ en estado líquido.

Calor admitido a través del aislamiento

$$0,124 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{día}}\right) \cdot 1140 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot 50,9 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{kg}}\right) \cdot 1,1 \text{ (10\% a través de anclajes)} = 7914 \text{ (Kcal/día)}$$

ó 329 (Kcal/h)

$$q = k \left(\frac{258}{\Delta x} + \frac{2\pi L}{\ln(R_e/R_i)} \right) (293 - 90,19) = k \left(\frac{2\pi D_i}{4} \cdot \frac{1}{\Delta x} + \frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{R_i + \Delta x}{R_i}\right)} \right) \cdot 202,8 = 329 \text{ (Kcal/h)}$$

$$\text{y finalmente } 2,15 \left(\frac{1,89}{\Delta x} + \frac{17}{\ln\left(\frac{1,35 + \Delta x}{1,375}\right)} \right) = 329 \text{ (Kcal/h)}$$

$$\Delta x = 0,175 \text{ (m de espesor)}$$

3.2. Superficies extendidas

En el apartado (3,1) se han tratado los problemas relacionados con cuerpos de espesor constante y la tercera dimensión infinita y, en consecuencia, las superficies interna y externa son normales a las líneas de temperatura y el calor fluye en una sola dirección cuando la disposición de un cuerpo es de la forma que se indica en la Fig. 3.2(1), la distribución de temperaturas no es uniforme sino que las líneas isotérmicas son perpendiculares a las líneas adiabáticas y si $L_y \gg l_z$ ó L_x se cumple la ecuación de Laplace en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Si la transmisión de calor al fluir tiene lugar por convección con un coeficiente h , constante en toda la superficie del cuerpo, la ecuación (1) tiene que resolverse con las condiciones

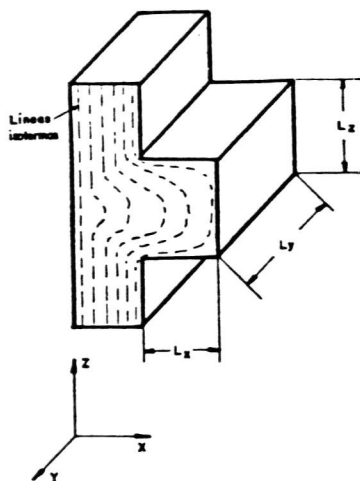


Fig. 3.2(1)

$$q_x = -k L_y L_z \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_x} = h L_y L_z (T-t)$$

$$q_z = -k L_x L_y \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=L_z} = h L_x L_y (T-t) \quad (2)$$

o

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_x} + \frac{h}{k} (T-t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{z=L_z} + \frac{h}{k} (T-t) = 0$$

donde t es la temperatura del fluido y k es la conductividad térmica del sólido.

Si el espesor del cuerpo se reduce a valores pequeños, del orden de milímetros, la distribución de temperaturas dentro del sólido

lido se modifica de forma tal, que puede admitirse una distribución de temperaturas constante en los planos $z=x$ de la dirección Ox Fig. 3.2(2). Esta simplificación permite obtener soluciones analíticas por métodos sencillos, teniendo en cuenta que las soluciones correctas se obtienen a partir de la ecuación (1).

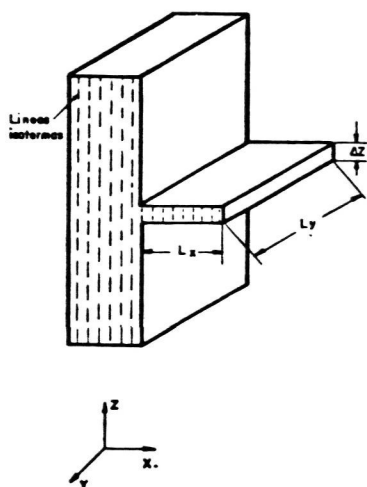


Fig. 3.2(2)

Las superficies extendidas tienen amplias aplicaciones en la transmisión del calor, desde los conocidos radiadores de automóviles o equipos de aire acondicionado hasta los elementos combustibles de reactores nucleares refrigerados por gases, elementos de absorción y eliminación de energías en vehículos espaciales, o equipos de refrigeración y calentamiento de la industria química. Antes de resolver los problemas

de transmisión de calor en superficies específicas es conveniente considerar una interpretación intuitiva de la necesidad de superficies extendidas.

Consideremos nuevamente el caso de una pared plana que calienta a un fluido a temperatura t figura 3.2(3)

$$q = k S_1 \frac{(T_0 - T)}{\Delta x_1} = \frac{(T_0 - T)}{r_{tc}} S_1 \quad (3)$$

$$q = h S_1 (T - t) = \frac{T - t}{r_{t, cn}} S_1 \quad (4)$$

$$S(T_0 - t) = q(r_{tc} + r_{t, cn}) \quad (5)$$

donde r_{tc} y $r_{t, cn}$ son las resistencias térmicas por unidad de superficie, de conducción y convección respectivamente. En una superficie extendida como en la Fig. 3.2(2) la resistencia r_{tc} disminuye respecto a la misma superficie sin ale

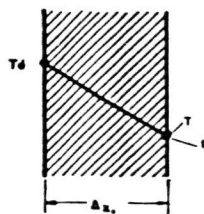


Fig. 3.3(3)

ta puesto que $\Delta x_1 = \Delta z/2$ y q aumenta, pero no en forma proporcional porque $(T_s - t)$ es menor a medida que aumente L_x . Por otra parte, para valores pequeños de h , como es el caso de gases r_{Tc} es bastante menor que r_{Tca} en superficies sin aletas, y un aumento r_{Tc} por la presencia de aletas, supone un mayor q , debido al incremento de la superficie de intercambio. Así pues, las superficies extendidas, son tanto más convenientes cuanto mayor es la resistencia térmica de convección frente a la resistencia térmica de conducción.

Las superficies extendidas se conocen con el nombre genérico de aletas y sus secciones rectas o perfiles, son superficies que se corresponden a figuras geométricas con posibilidades de fabricación en serie, tales como: rectangulares, triangulares, trapezoidales parabólicas e hiperbólicas como se indica en la Fig. 3.2(4). Las dimensiones de las aletas son variables, desde una re

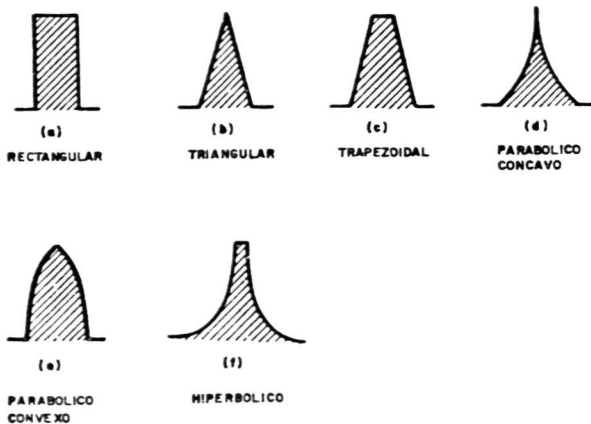


Fig. 3.2(4)

lación de longitud a espesor de 5-50, para espesores de 0,5-10 mm.

Las aletas se pueden disponer sobre superficies planas o curvas tal como se indica en la Fig. 3.2(5). Cuando la disposición es del tipo longitudinal se admite que la superficie base donde se apoya la aleta es plana, siempre y cuando el radio del

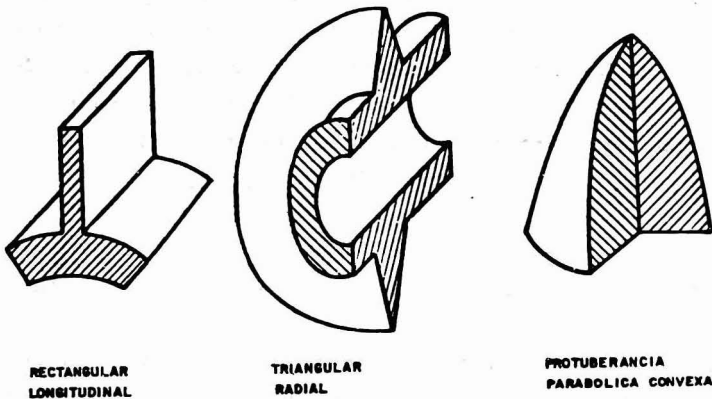


Fig. 3.2(5)

tubo sea elevado frente al espesor de la aleta. Cuando las aletas son sólidos de revolución o paralelepípedos se denominan *protuberancias* y su disposición puede admitirse sobre superficies planas, cuando la superficie de la protuberancia en la base sea pequeña frente a superficie de esta última. Es conveniente insistir, que las protuberancias se tratan en este apartado, con distribuciones de temperatura constantes para cada sección recta, normal a la superficie base, lo cual equivale a admitir que la relación de altura de la protuberancia, a diámetro o dimensión equivalente es elevada. Cuando esta hipótesis no se cumple hay que estudiar el fenómeno de transmisión de calor en tres dimensiones con las correspondientes condiciones en los límites.

Las aletas o protuberancias se disponen en las superficies base constituyendo un *elemento*. El elemento más frecuente es un tubo donde el número de aletas o protuberancias es variable, del orden de 1-6/cm para las aletas, y una distribución de retículo cuadrado o triangular para las protuberancias. Los elementos se acoplan en serie o paralelo para satisfacer las necesidades térmicas constituyendo un intercambiador de calor. Cuando el fluido que circula por las aletas está confinado y se mueve por una bomba de circulación hay que tener en cuenta la energía necesaria para mantener el coeficiente h de convección a través de los elementos con aletas, tratando de lograr que la energía térmica ex-

traída sea máxima frente a la energía gastada para mover el fluido. Esta situación conduce a un estudio de los métodos y costes de fabricación mantenimiento y rendimiento de elementos de aletas, cuyos valores óptimos pueden no coincidir necesariamente con los óptimos térmicos, por ello, un análisis de estos últimos es importante, tanto desde el punto de vista de fabricación de modelos normalizados, como de la elección del modelo más adecuado por parte del usuario.

3.2-1,1. Aletas en superficies planas: Perfiles rectangulares

Los perfiles rectangulares sobre superficies planas constituyen el caso más simple de superficies extendidas. Se pueden disponer en una pared plana, sobre la longitud axial de un tubo en dirección longitudinal, con hélices de paso elevado o sobre superficies arbitrarias de gran radio de curvatura. El tipo de elemento con aletas longitudinales rectangulares es de fácil fabricación por extrusión o fundición. En casos especiales, como sucede con las aletas de elementos combustibles de reactores nucleares de uranio natural y refrigerados por dióxido de carbono, las aletas longitudinales, con estructura de *esqueleto de pescado*, se mecanizan sobre el material de aleación *Magnox* de la base. El material *Magnox* tiene una baja sección de captura a los neutrones, condición indispensable para cualquier material utilizado en los reactores de uranio natural, para los cuales la economía neutrónica es imperativa. Las aletas unidas a la base sin discontinuidades por soldadura o presión no tienen resistencias térmicas de contacto y son adecuadas para temperaturas elevadas dado que la base no se altera por dilataciones térmicas diferenciales siempre que no sufran efectos corrosivos o excesiva deformación.

En la Fig. 3.2-1,1, se representa una aleta longitudinal cuya temperatura en la base es T_b , con un fluido al exterior de coeficiente de convección h y con un gradiente de temperaturas entre la superficie de la aleta y el fluido, suficientemente bajo para que la transmisión de calor por radiación sea despreciable.

En régimen estacionario, el calor que pasa por conducción a través del elemento dx es el mismo que se pierde por convección

en la superficie de aleta, correspondiente al elemento dx

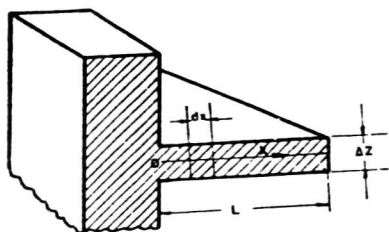


Fig. 3.2-1,1

$$k \gamma \Delta z \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx = 2 h \gamma (T-t) \Delta z$$

o

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2h}{k \Delta z} (T-t) = m^2 (T-t) \quad (1)$$

La solución de la ecuación (1) necesita condiciones en los límites. Estas condiciones pueden ser:

- a) Condiciones teniendo en cuenta el calor perdido por la cabeza de la aleta, es decir:

$$T = T_o \quad \text{en} \quad x=0$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{h}{k} (T-t) \quad \text{en} \quad x=L_x$$

- b) Condiciones aproximadas, despreciando el calor perdido por la cabeza de la aleta; tanto más aproximada cuanto menor es Δz

$$T = T_o \quad \text{en} \quad x=0$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad x=L_x$$

Aplicando las transformadas de Laplace Apéndice I con las condiciones de a) resulta

$$L \left[\frac{d^2 T}{dx^2} \right] = s^2 f(s) - C_1 s - C_2$$

$$\text{donde} \quad f(s) \equiv L[T]$$

$$L \left[\frac{2h}{k \Delta z} T \right] = \frac{2h}{k \Delta z} f(s) = m^2 f(s)$$

o

$$f(s) [s^2 - m^2] = C_1 s + C_2$$

pasando a las transformadas inversas

$$T = L^{-1} \left[\frac{C_1 s}{s^2 - m^2} \right] + L^{-1} \left[\frac{C_2}{s^2 - m^2} \right] = C_1 \cosh(mx) + \frac{C_2}{m} \sinh(mx) \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dT}{dx} = -\frac{h}{k}(T - t)$ y suponiendo $t = 0$ para facilidad de cálculos

$$m C_1 \sinh(mL) + C_2 \cosh(mL) = -\frac{h}{k} \left[C_1 \cosh(mL) + \frac{C_2}{m} \sinh(mL) \right]$$

por la condición $T = T_0$ en $x = 0$; $C_1 = T_0$

$$C_2 \left(\cosh(mL) + \frac{h}{k m} \sinh(mL) \right) = -T_0 m \sinh(mL) - \frac{h}{k m} T_0 \cosh(mL)$$

y

$$T = T_0 \left[\frac{\cosh[m(L-x)] + \sinh[m(L-x)] \cdot \frac{h}{k m}}{\cosh(mL) + \frac{h}{k m} \sinh(mL)} \right] \quad (3)$$

La ecuación (3), da la distribución de temperaturas en la dirección OX de la aleta rectangular.

La cantidad de calor q que pierde la aleta a través de la superficie, es el calor que pasa por la base, y si $Y=1$

$$q = -k Y \Delta Z \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = k \Delta Z m T_0 \left[\frac{\tanh(mL) + \frac{h}{k m}}{1 + \frac{h}{k m} \tanh(mL)} \right] \quad (4)$$

Se define la eficacia o rendimiento térmico de la aleta η , por la relación entre el calor transmitido y el que se transmitiría si toda la superficie de la aleta estuviese a la temperatura de la base T_0 , es decir:

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{k \Delta Z m T_0}{T_0 (2hL + \Delta Z)} \left[\frac{\tanh(mL) + \frac{h}{k m}}{1 + \frac{h}{k m} \tanh(mL)} \right] \quad (5)$$

Si se consideran las condiciones b) resulta

$$T = \frac{T_0 \cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} \quad (6)$$

para la distribución de temperaturas en la aleta en la dirección OX

$$q = 2 T_0 h Y_{mL} \cdot \tanh(mL) \quad (7)$$

$$\eta = \frac{tgh(mL)}{(mL)} \quad (8)$$

La condición $dq/dL = 0$ aplicada a la ecuación (4) conduce a $\frac{h}{km} = 1$ que teniendo en cuenta el valor de $m = \sqrt{2h/k\Delta z}$

$$\frac{h\Delta z}{2k} = \frac{r_{Te}}{r_{Ten}} = 1 \quad (9)$$

La ec. (9) indica las condiciones para colocar aletas sobre una superficie. Si la resistencia térmica por unidad de superficie de aleta por conducción es menor que la resistencia térmica correspondiente a la convección se debe colocar aletas, mientras que, en el caso contrario, las aletas producen un efecto refrigerante tal como se ha expresado en forma cualitativa en el apartado (3,2). Así pues la existencia de aletas supone

$$\frac{\Delta z h}{2k} < 1 \quad (10)$$

Para gases, h es pequeño y con aletas metálicas la relación es inferior a la unidad; en el caso de aletas de aluminio de 4 mm de espesor y $k \approx 150$ (kcal/hm^2) el límite de h sería

$$h = \frac{2 \cdot 150}{4 \cdot 10^{-3}} = 75000 \left(\text{kcal}/\text{hm}^2 \right)$$

valor muy elevado aún para procesos de cinética rápida en los cuales se alcanzan 20000-30000 $\text{Kcal}/\text{hm}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$.

La comparación de las ecs. (4) y (8) pone de manifiesto que las variaciones entre ambas depende de la relación de resistencias térmicas y del valor de L . Se han propuesto soluciones de aproximación considerando un aumento de L equivalente a $\Delta z/2$ y otras análogas. Cuando se trata de aplicaciones cuya oscilación en h es superior al error de las ecuaciones anteriores puede utilizarse la ecuación simplificada, mientras que, en situaciones más precisas, se pueden utilizar las aproximaciones anteriores o bien métodos analíticos o gráficos de transmisión de calor en dos dimensiones como se verá en el apartado (3,4). En la tabla 3.2-1 y gráfica 3.2-1 se dan valores de la eficacia y de aletas rectangulares sobre superficies planas correspondientes a la ec.

3.2-2,8.

Teniendo en cuenta la superficie que no tiene aletas, la cantidad de calor total que pasa a un fluido a temperatura t

$$q = h S (T_o - t) + h S_A (T_o - t) \eta = h (T_o - t) (S + S_A \eta) \quad (11)$$

donde S_A y S son las superficies con y sin aletas respectivamente. Para otros perfiles $S_A \approx 2 L_X Y$ si $\Delta T/2$ es pequeño.

Ejemplo 3.2-1,1(1)

Una aleta longitudinal de perfil rectangular tiene unas dimensiones de 15 mm de altura y 0,5 mm de espesor. La temperatura en su base es de 90°C y la temperatura del fluido que la rodea es de 20°C con un coeficiente de transmisión de calor de 10 (Kcal/hm² °C) en convección natural y de 100 (Kcal/hm² °C) en convección forzada.

Calcular para materiales de cobre, aluminio y acero, para $h = 10$ y $h = 100$:

- Temperaturas a distancias de 5 , 10 y 15 mm desde la base
- Eficacia
- Calor transmitido al fluido por metro de aleta
- Relación del calor transmitido al fluido por la aleta al calor que se transmitiría si la aleta no existiese.

Solución:

Las conductividades de los materiales, Apéndice II son

$$k_{cu} = 325 \text{ (Kcal/hm}^\circ\text{C)} \quad k_{Al} = 184,5 \text{ (Kcal/hm}^\circ\text{C)} \quad k_a = 44 \text{ (Kcal/hm}^\circ\text{C)}$$

Los valores de $m = \sqrt{2h/k\Delta T}$

$$m_{cu} = 11,08$$

$$m_{Al} = 14,72$$

$$m_a = 30,15$$

a) y b) Por la ec. (3.2-1,6) se calcula la distribución de temperaturas cuyos valores se indican en la tabla adjunta.

| Material | Distancia a la base (mm) | Temperaturas(°C) | | Eficacia(η) | | h (Kcal/hm ² °C) |
|----------|--------------------------------|------------------|------------|--------------------|------------|--------------------------------|
| | | ec. (6) | ec. (3) | ec. (8) | ec. (5) | |
| Cobre | 5 | 89,4 | 89,4 | | | 10 |
| | 10 | 88,9 | 88,9 | | | 10 |
| | 15 | 88,8 | 88,7 | 0,99 | 0,99 | 10 |
| Aluminio | 5 | 88,8 | 88,8 | | | 10 |
| | 10 | 88,1 | 88,1 | | | 10 |
| | 15 | 87,8 | 87,8 | 0,95 | 0,95 | 10 |
| Acero | 5 | 85,2 | 84,6 | | | 10 |
| | 10 | 82,8 | 83,2 | | | 10 |
| | 15 | 81,5 | 81,3 | 0,937 | 0,94 | 10 |
| | | | | | | |
| Cobre | 5 | 83,6 | 83,6 | | | 100 |
| | 10 | 79,9 | 80,9 | | | 100 |
| | 15 | 78,7 | 78,5 | 0,917 | 0,926 | 100 |
| Aluminio | 5 | 79,7 | 80,2 | | | 100 |
| | 10 | 73,8 | 74,1 | | | 100 |
| | 15 | 71,7 | 71,3 | 0,864 | 0,873 | 100 |
| Acero | 5 | 60,70 | 60,44 | | | 100 |
| | 10 | 45,45 | 44,5 | | | 100 |
| | 15 | 40,74 | 39,89 | 0,623 | 0,626 | 100 |

c) Superficie/m aleta = $2L + Z = 2.0,015 + 0,0005 \approx 0,030$ m²/m
Despreciando el calor de la cabeza de la aleta

$$q = h S \eta (T_o - t)$$

Para $h = 10$ (Kcal/hm²°C)

$$q_{cu} = 70.10.0,030.0,99 = 20,7 \text{ (Kcal/h m de aleta)}$$

$$q_{Al} = 70.10.0,030.0,95 = 19,9 \quad "$$

$$q_a = 70.10.0,030.0,94 = 19,7 \quad "$$

Para $h = 100 \text{ (Kcal/h m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$

$$q_{cu} = 70 \cdot 100 \cdot 0,030 \cdot 0,917 = 192,5 \text{ (Kcal/h m aleta)}$$

$$q_{Al} = 70 \cdot 100 \cdot 0,030 \cdot 0,864 = 181,3 \quad "$$

$$q_a = 70 \cdot 100 \cdot 0,030 \cdot 0,623 = 130,7 \quad "$$

d) Calor que se transmitiría sin aleta/m de aleta

$$q = h S (T_o - t) = h \cdot 70 \cdot 0,0005 \text{ (Kcal/h m de sección recta)}$$

Para $h = 10 \text{ (Kcal/h m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$; $q = 0,35 \text{ (Kcal/h m " " ")}$

$$\frac{q_{cu}}{q} = 59 ; \quad \frac{q_{Al}}{q} = 56 ; \quad \frac{q_a}{q} = 55$$

Para $h = 100 \text{ (Kcal/h m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$ $q = 0,35 \text{ (Kcal/h m de sección recta)}$

$$\frac{q_{cu}}{q} = 54 ; \quad \frac{q_{Al}}{q} = 51,7 ; \quad \frac{q_a}{q} = 37$$

Perfil óptimo

El peso de las aletas es proporcional a la densidad y área recta. Cuando se trata de elementos de aletas para vehículos, es importante lograr un valor máximo de q para un área dada. Si se admite que el calor transmitido por la superficie de la cabeza de la aleta es despreciable, la ecuación (7) puede escribirse

$$q = 2 T_o \sqrt{\frac{\Delta z k h}{2}} \operatorname{tgh} \left(\sqrt{\frac{2 h}{\Delta z k}} \cdot L \right) \quad (12)$$

Si el área recta vale $A = \Delta z L$

$$q = 2 T_o \sqrt{\frac{\Delta z k}{2}} \cdot \operatorname{tgh} \left(\sqrt{\frac{2 h}{k}} \cdot \frac{A}{(\Delta z)^{3/2}} \right) \quad (13)$$

El espesor óptimo es aquel que cumple $\frac{dq}{dz} = 0$. Derivando la ecuación (13) e igualando a cero resulta:

$$3 N_1 \operatorname{sech}^2 N_1 = \operatorname{tgh} N_1 \quad (14)$$

donde $N_1 = m L = A \sqrt{\frac{2 T_o}{k}} \cdot (\Delta z)^{-3/2}$

. Resolviendo la ecuación

(14) resulta

$$N_{1,op} = 1,4192$$

y

$$(\Delta z)_{op} = 0,997 \left(\frac{A^2 h}{k} \right)^{1/3}; \quad L_{op} = \frac{A}{(\Delta z)_{op}} \sim \left(\frac{k A}{2 h} \right)^{1/3} \quad (15)$$

Ejemplo 3,2-1,1(2)

Para la aleta del ejemplo 3,2-1,1(1) calcular:

- Valores de h para los cuales el espesor es óptimo
- Eficacias
- Si el valor de h se fija en el óptimo del cobre hallar el valor de q por kg de aleta.

Solución:

a) Por la ecuación (15)

$$h \sim (\Delta z)_{op}^3 \cdot \frac{k}{A^2}; \quad A^2 = (1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3})^2 = 5,62 \cdot 10^{-11}$$

$$(\Delta z)^3 = (0,5 \cdot 10^{-3})^3 = 1,25 \cdot 10^{-10}; \quad h = 2,2 \text{ k}$$

$$h_{Cu} = 325 \cdot 2,22 = 721,5 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$$

$$h_{Al} = 184,5 \cdot 2,22 = 409 \quad "$$

$$h_a = 44 \cdot 2,22 = 96,8 \quad "$$

b) La eficacia es la misma para los tres materiales y los valores de h calculados anteriormente.

c) Los pesos son: $\gamma_{Cu} = 8960 \text{ (kg/m}^3\text{)}; \gamma_{Al} = 2700 \text{ (kg/m}^3\text{)}; \gamma_a = 7840 \text{ (kg/m}^3\text{)}$

- Valores de mL ; para $h = 721,5 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$

$$(mL)_{Cu} = 1,411; \quad (mL)_{Al} = 1,87 \quad (mL)_a = 3,84$$

- eficacias

$$(\eta)_{Cu} = 0,629; \quad (\eta)_{Al} = 0,51 \quad (\eta)_a = 0,26$$

- Superficie/kg aleta, despreciando la superficie de la cabeza

$$\frac{2LY}{Y L \Delta Z Y} = \frac{2}{\Delta Z Y}$$

Calor/kg aleta

$$q_1 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right) = (t_o - t) \eta 2 S_a h = (t_o - t) \eta \frac{4h}{\Delta Z Y} = \frac{70.4 \cdot 1443}{0.0005} \cdot \frac{h}{Y} = 4.04 \cdot 10^8 \frac{h}{Y}$$

y

$$(q_1)_{cu} = 21820 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right) ; (q_1)_{Al} = 55810 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right) ; (q_1)_a = 9.481 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right)$$

3,2-1,2. Aletas sobre superficies planas. Perfiles triangulares

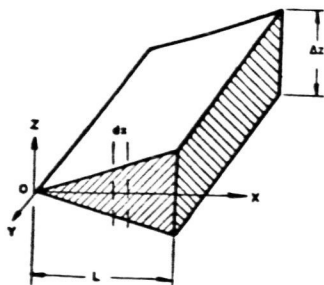
La ecuación de transmisión de calor para un perfil cualquiera de la forma $z=f(x)$ se obtiene haciendo un balance térmico en un elemento dx , con la hipótesis $\sqrt{1+z'^2} \approx 1$, resulta

$$\frac{d}{dx} (2kz \frac{dT}{dx}) = 2h(T-t)$$

6

$$z \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{dz}{dx} \frac{dT}{dx} = \frac{h}{k} (T-t) \quad (1)$$

Para un perfil triangular, Fig. 3,2-1,2, $z = \frac{\Delta Z}{2L} x$ y la ecuación (1) se transforma en



$$x \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{dT}{dx} = m^2 L T \quad (2)$$

donde, $m = (2h/k\Delta Z)^{1/2}$
y la temperatura del fluido se supone valor cero por comodidad del desarrollo matemático.

Fig. 3.2-1,2

La ecuación (2) se identifica con una ecuación de Bessel (Apén

dice I) y, $\alpha=2$; $\beta=0$; $b=0$; $\omega=\alpha\sqrt{a}=2m\sqrt{L}$; $n=\frac{\sqrt{(p)^2-4b}}{2-q+p}=0$
y la solución general es

$$T = C_1 \frac{I_0(2m\sqrt{Lx})}{I_0(2mL)}$$

De la condición $x=0$ $K_0(0)=\infty$ $C_2=0$
y la condición $x=L$ $T=T_0$ $C_1 = \frac{T_0}{I_0(2mL)}$
y la solución de la ec. (2)

$$T = T_0 \frac{I_0(2m\sqrt{Lx})}{I_0(2mL)} \quad (3)$$

La cantidad de calor eliminada por la aleta

$$q = 2h\gamma \int_0^L T dx = 2h\gamma \int_0^L T_0 \frac{I_0(2m\sqrt{Lx})}{I_0(2mL)} dx \quad (4)$$

Integrando término a término y teniendo en cuenta que

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dots ; I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots$$

$$\int_0^L I_0(2m\sqrt{Lx}) dx = I_1(2mL)/m$$

$$q = \frac{2h\gamma T_0 I_1(2mL)}{m I_0(2mL)} \quad (5)$$

y la eficacia de la aleta triangular

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{q}{2h\gamma L T_0} = \frac{I_1(2mL)}{mL I_0(2mL)} \quad (6)$$

Valores de la ec. (6) se indican en la gráfica (3.2-1) y tabla (3,2-1).

Perfil óptimo

El área del perfil es $\Delta z \frac{L}{2}$ y de la ec. (6) para la unidad de γ

$$q = \frac{2h T_0 I_1(2mL)}{m I_0(2mL)}$$

haciendo $2mL = N_2 = 4A \sqrt{\frac{2h}{k(\Delta z)^3}}$ y teniendo en cuenta que el óptimo se cumple para $\frac{dq}{dL} = 0$ resulta

$$\frac{d}{dN_2} \left(\frac{1}{N_2^{1/2}} \frac{I_1(N_2)}{I_0(N_2)} \right) = 0 \quad (7)$$

y finalmente

$$I_0(N_2) I_2(N_2) + \frac{2}{3} \frac{I_0(N_2)}{N_2} I_1(N_2) = I_1^2(N_2) \quad (8)$$

Resolviendo (16) por las tablas de funciones de Bessel, Apéndice I y las ecuaciones de recurrencia se obtiene $N_2 = 2,6188$ y

$$(\Delta Z)_{op} = 1,671 \left(\frac{A^2 k}{k} \right)^{1/3} \quad (9)$$

$$(L)_{op} = \frac{2A}{\Delta Z} = 1,196 \left(\frac{Ak}{h} \right)^{1/3} \quad (10)$$

Ejemplo (3,2-1,2)

Sobre un tubo de una aleación de aluminio de 20 mm de diámetro exterior se desea, colocar aletas longitudinales de perfil triangular. La base de las aletas se estima en 1 mm y la distancia entre bases 2,5 mm para mantener un coeficiente de convección h de 1000 (Kcal/hm °C). La conductividad térmica del material es 100 (Kcal/hm°C) se desea conocer:

a) Dimensiones del perfil óptimo de las aletas.

b) Calor q transmitido por m de tubo si la temperatura de la base es de 165°C y la del fluido 110°C .

Solución:

a) La longitud para el perfil triangular óptimo es ec. (18)

$$(L)_{op} = 1,196 \left(\frac{Ak}{h} \right)^{1/3} = 1,196 \left(\frac{\Delta Z}{2} \frac{k}{h} \right)^{1/3} (L)_{op}^{1/3}$$

$$(L)_{op} = \sqrt[3]{1,196 \frac{\Delta Z}{2} \frac{k}{h}} = \sqrt[3]{1,196 \cdot \frac{0,001 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^3}} = 0,0077 \text{ m}$$

El perfil de la aleta triangular es de 1 mm de base y 7,7 mm de altura

b)

$$q = h(T_0 - t)(S + S_A \eta) ; S_A(\pi \cdot 18.0,001) = 0,044 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$S_A = 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{(7,7^2 + 0,5^2)} \cdot 10^{-6} = 0,27 \text{ m}^2$$

$$mL = L \sqrt{\frac{2h}{k \Delta z}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{100 \cdot 0,001}} \cdot 7,7 \cdot 10^{-3} = 1,088$$

$$\eta = \frac{I_1(2mL)}{mL I_0(2mL)} ; I_1(2,17) = 1,86 ; I_0(2,17) = 2,55$$

$$\eta = \frac{1,86}{1,088 \cdot 2,55} = 0,67 ; q = 10^3 \cdot (165 - 10)(0,044 + 0,27 \cdot 0,67) = 12369 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{m}} \right)$$

3.2-1,3. Aletas sobre superficies planas. Perfiles parabólico con cavos.

El perfil geométrico de la Fig. (3,2-1,3) responde a la ecuación

$$z = \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2$$

y por la ec. (3,2-1,2(1)) se obtiene

$$x^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + 2x \frac{dT}{dx} = m^2 L^2 T \quad (1)$$

que es una ecuación del tipo Euler con solución $T = x^r$. Sustituyendo en (1) resulta

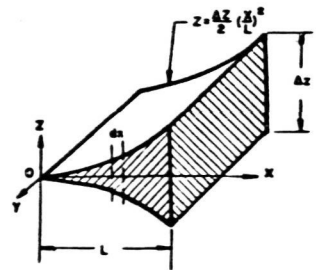


Fig. 3.2-1,3

$$x^2 r(r-1) \frac{x^r}{x^2} + 2x r \frac{x^r}{x} - m^2 L^2 x^r = 0 ; r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 m^2 L^2}}{2}$$

y la solución general de (1)

$$T = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \quad (2)$$

y si para $X=0$; $C_2=0$; $X=L$; $T=T_0$

$$T = T_0 \left(\frac{X}{L} \right)^{r_1} \quad (3)$$

$$q = 2hY \int_0^L T dx = 2hY T_0 \frac{2L}{1 + \sqrt{1 + 4m^2 L^2}}$$

y la eficiencia

$$\eta = \frac{2hY \int_0^L T dx}{2hY T_0 L} = \frac{\int_0^L \left(\frac{X}{L} \right)^{r_1} dx}{L} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4m^2 L^2}} \quad (4)$$

En la tabla (3,2-1) y gráfica (3,2-1) se indican valores de la Ec. (4) en función de mL .

Perfil óptimo

El área del perfil vale $A = \frac{\Delta Z L}{3}$ y de la ec. (4)

$$q = 2hT_0 \frac{L}{1 + \sqrt{1 + 4m^2 L^2}} \quad (5)$$

Haciendo $mL = N_3 = 3A \sqrt{\frac{2h}{k}} \cdot \frac{1}{(\Delta Z)^{1/2}}$ para $\frac{dq}{dL} = 0$ se cumple

$$\frac{d}{dN_3} \left[\frac{N_3^{2/3}}{1 + \sqrt{1 + 4N_3^2}} \right] = 0 \quad \text{que se cumple para } N_3 = \sqrt{2}$$

y

$$(\Delta Z)_{op} = \left[3A \left(\frac{2h}{k} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^{2/3} = 2,08 \left[A^2 \left(\frac{h}{k} \right) \right]^{1/3} \quad (6)$$

$$(L)_{op} = \frac{3A}{(\Delta Z)_{op}} = 1,4423 \left(A \frac{k}{h} \right)^{1/3} \quad (7)$$

Ejemplo 3,2-1,3

Se desea calentar 50000 (kg/h) de un producto de densidad 0,75 (gr/cm³) y calor específico 0,35 (Kcal/kg°C) desde 80°C a 120°C utilizando tubos con aletas longitudinales de perfil parabólico cóncavo de 1,5 mm de espesor sobre tubos de acero de 20 mm de diámetro exterior. La temperatura de la base de las aletas se estima en 150°C en toda la longitud del tubo y el coeficiente de convección es de 500 (Kcal/hm² °C).

Se desea conocer:

- a) Dimensiones de las aletas y número de ellas teniendo en cuenta que la distancia entre bases contiguas es de 2,5 mm y la conductividad térmica del material es de 60 (Kcal/hm°C).
- b) Número de tubos necesarios de 3 m de longitud

Solución:

- a) El perfil óptimo dado por la ec. (7)

$$(L)_{op} = 1,442 \left(A \frac{k}{h} \right)^{1/3} = 1,442 \left(\frac{\Delta T}{3} \cdot (L)_{op} \cdot \left(\frac{k}{h} \right) \right)^{1/3}$$

$$(L)_{op} = \sqrt[3]{1,442 \cdot \frac{\Delta T}{3} \cdot \frac{k}{h}} = \sqrt[3]{1,442 \cdot \frac{115 \cdot 10^{-3}}{3} \cdot \frac{60}{500}} = 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ (m)}$$

El perfil de la aleta es de 1,5 mm de base y 9,3 mm de altura
número de aletas por tubo

$$N_A = \frac{\pi D}{2,5} = 15,7 \quad \simeq 16 \text{ aletas/tubo}$$

- b) Eficacia de las aletas

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{2h}{k \Delta T} \right)^2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{60 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 500 \cdot 9,3^2 \cdot 10^{-6}}{60 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}}}} = 0,62$$

Utilizando la tabla (3,2-1) o gráfica (3,2-1) para $mL = 0,98$;
 $\eta = 0,62$; calor q por metro de tubo

$$q = h(T_o - t)_{mL} (S + \eta S_A)$$

$$S \simeq (\pi D - 16 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}) = (\pi \cdot 20 - 16 \cdot 1,5) 10^{-3} = 0,0388 \text{ (m}^2/\text{m tubo)}$$

$$S_A \simeq 2 \cdot 16 \int_L^{\frac{\Delta T}{L^2}} \sqrt{\left(\frac{L^2}{\Delta T} \right)^2 + x^2} \cdot dx = \frac{32}{\alpha} \left[\frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right]_0^L + a \ln a$$

puesto que

$$dS_A = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + z'^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \frac{\Delta z^2 x^2}{L^4}} \cdot dx$$

$$S_A = 16 \left[\frac{9,3 \cdot 10^{-3} \sqrt{(9,3 \cdot 10^{-3})^2 + 0,0576^2}}{0,0576} + 0,005766 \ln(9,3 \cdot 10^{-3} + \sqrt{(9,3 \cdot 10^{-3})^2 + 0,0576^2}) \right] = 16 \cdot 0,01870 = 0,299 \text{ (m}^2/\text{m aleta)}$$

No debe olvidarse que en la ecuación de partida (3,2-1,2(1)) se ha puesto $\sqrt{1 + (z')^2} = 1$ con lo cual $S_A \approx 16 \cdot 2L$

$$(T_o - t)_{mL} = \frac{(T_o - t)_e - (T_o - t)_s}{\ln \left(\frac{(T_o - t)_e}{(T_o - t)_s} \right)} = \frac{(150 - 80) - (150 - 120)}{\ln \frac{70}{30}} = 47,2 (^{\circ}\text{C})$$

y

$$q = 500 \cdot 47,2 (0,040 + 0,299 \cdot 0,62) = 5318 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h} \cdot \text{m tubo}} \right)$$

Calor a eliminar

$$q_T = 50000 \left(\frac{\text{Kg}}{\text{h}} \right) \cdot 0,35 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^{\circ}\text{C}} \right) \cdot 40 (^{\circ}\text{C}) = 700.000 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

Número de m de tubería

$$\frac{700.000}{5318} \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right) \cdot \left(\frac{\text{h} \cdot \text{m tubo}}{\text{Kcal}} \right) = 131 (\text{m})$$

$$131 (\text{m}) \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\text{tubo}}{\text{m}} \right) = 43,66 \text{ tubos ; } \approx 44 \text{ tubos}$$

3.2-1,4. Aletas sobre superficies planas. Perfiles parabólico convexos.

De acuerdo con la Fig. 3,2-1,4

$$Z = \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2}$$

y la ecuación correspondiente la ecuación 3.2-12(1)

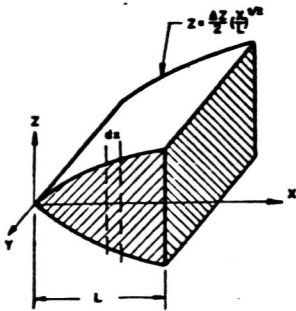


Fig. 3.2-1,4

$$\sqrt{x} \frac{dT}{dx^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{dT}{dx} - m^2 \sqrt{x} = 0 \quad (1)$$

La ec. (1) responde a la ecuación generalizada de Bessel y para los valores (Apéndice I)

$$d = 3/4 \quad \beta = \frac{1}{3} \quad n = 1$$

$$\omega = -i\alpha\sqrt{a} = \frac{4}{3} m L^{1/4}$$

resulta

$$T = x^{1/4} [C_1 I_{1/3}(\frac{4}{3} m L^{1/4} x^{3/4}) + C_2 I_{-1/3}(\frac{4}{3} m L^{1/4} x^{3/4})] \quad (2)$$

$$T = T_0 \text{ en } x = L \text{ y } \frac{dT}{dx} = 0 \text{ en } x = 0$$

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}$$

$$I_{-n}(x) = i^n J_n(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)}$$

Para

$$x=0 ; I_{-1/3}(0) = \infty ; I_{1/3}(0) = 0 ; C_1 = 0 \quad C_2 = \frac{T_0}{I_{-1/3}(\frac{4}{3} m L)}$$

y finalmente

$$T = T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{1/4} \frac{I_{-1/3}(\frac{4}{3} m L^{1/4} x^{3/4})}{I_{-1/3}(\frac{4}{3} m L)} \quad (3)$$

$$q = \int_0^L 2h\gamma T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{1/4} \frac{I_{-1/3}(\frac{4}{3} m L^{1/4} x^{3/4})}{I_{-1/3}(\frac{4}{3} m L)} dx = \frac{I_{2/3}(\frac{4}{3} m L) \cdot 2h\gamma T_0}{m L I_{-1/3}(\frac{4}{3} m L)} \quad (4)$$

y la eficacia de la aleta parabólica convexa

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{2h\gamma \int_0^L T dx}{2h\gamma L T_0} = \frac{I_{2/3}(\frac{4}{3} m L)}{m L I_{-1/3}(\frac{4}{3} m L)} \quad (5)$$

en la tabla (3,2-1) y gráfica 3,2-1 se dan valores de la ecuación 5.

Perfil óptimo

El área del perfil vale, $A = \int_0^L dx = \frac{2}{3} \Delta z L$ y poniendo m en función de Δz

$$mL = L \sqrt{\frac{2h}{k \Delta z}} = \frac{1}{(\Delta z)^{1/2}} \sqrt{\frac{2hA^2}{k}}$$

La condición de perfil óptimo es $da/dz = 0$ y

$$\frac{d}{dN_4} \left[\frac{1}{N_4^{1/3}} \frac{I_{2/3}(N_4)}{I_{1/3}(N_4)} \right] = 0 \quad N_4 = \frac{4}{3} mL = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2h}{k}} \cdot \frac{3}{2} \frac{A}{(\Delta z)^{1/3}}$$

Por las ecuaciones de recurrencia (Apéndice I)

$$I_{-1/3}(N_4) I_{2/3}(N_4) = I_{1/3}^2(N_4) \quad (6)$$

Resolviendo (6) $N_4 = 1,705$ y

$$(\Delta z)_{op} = 1,4013 \sqrt[3]{A^2 h / k} \quad (7)$$

$$(L)_{op} = \frac{3A}{2(\Delta z)_{op}} = 1,07 \sqrt[3]{Ak/h} \quad (8)$$

Ejemplo 3,2-1,4

Aplicar el caso del ejemplo 3,2-1,3 para aletas longitudinales de perfil parabólico convexo.

Solución:

a) El perfil óptimo dado por la ec. (8)

$$(L)_{op} = 1,07 \sqrt[3]{Ak/h} = 1,07 \sqrt[3]{\frac{2}{3} \Delta z L_{op} k/h}$$

$$(L)_{op} = \sqrt{0,934 \Delta z k/h} = \sqrt{0,934 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 60/500} = 0,0129 \text{ m}$$

El perfil de la aleta es de 1,5 mm de base y 12,9 mm de altura, número de aletas por tubo

$$N_A = \frac{\pi D}{4} = 15,70 \approx 16 \text{ aletas/tubo}$$

b) Eficacia de las aletas

$$m_L = \sqrt{\frac{2h}{k\Delta z}} \cdot L = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{60 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}} \cdot 0,0129 = 1,35$$

Por la gráfica (3,2-1) $\eta = 0,61$

Por la tabla (3,2-1) $\eta = 0,615$

Por la ec. (4)

$$\eta = \frac{I_{2/3}(4/3 mL)}{mL I_{-1/3}(4/3 mL)} \quad 4/3 mL = 1,8 ; I_{2/3}(1,8) = 1,616 ; I_{-1/3}(1,8) = 1,944$$

$$\eta = \frac{1,616}{1,944} \cdot \frac{1}{1,35} = 0,615$$

Calor por m de tubo

$$q = h(T_o - t)_{mL} (S + S_A \eta)$$

$$S = 0,0388 \text{ (m}^2\text{/m tubo)}$$

$$S_A = 16 \int_L^0 \sqrt{\frac{x+a}{x}} dx = \left[2\sqrt{L} \sqrt{a+L} - a \ln \left(\frac{\sqrt{a+L} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{a+L} + \sqrt{L}} \right) \right] 16 = 0,414 ; a = \left(\frac{\Delta z}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{L}$$

0

$$S_A \approx 16 \cdot 2L = 32 \cdot 0,0129 = 0,4128 \text{ (m}^2\text{/m aleta)}$$

$$a = \left(\frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{0,0129} = 1,09 \cdot 10^{-5}$$

$$\sqrt{a+L} \approx \sqrt{L}$$

$$(T_o - t)_{mL} = \frac{(T_o - t)_s - (T_o - t)_e}{\ln \left(\frac{(T_o - t)_s}{(T_o - t)_e} \right)} = 47,2 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

$$q = 500 \cdot 47,2 (0,038 + 0,412 \cdot 0,265) = 6895 \text{ (m}^2\text{/m aleta)}$$

$$\frac{700.000}{6895} = 101,5 \text{ (m tubo)} ; 101,5/3 = 33,8 \text{ tubos} \approx 34.$$

(3,2-1,5). Peso mínimo de aletas longitudinales sobre superficies planas.

En la tabla 3,2-1(A) se dan las características de los distintos perfiles de aletas sobre superficies planas. Un aspecto importante es determinar cual es el flujo térmico máximo considerando todas las secciones rectas en la dirección del eje OX. El flujo térmico en un punto x vale

$$\frac{q}{2Y} = -k \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

Para un material de características térmicas dadas, el flujo máximo está en la base, y este valor máximo se extenderá a todos los puntos del eje OX si

$$\frac{q_0}{\Delta z} = \frac{q_1}{\Delta z_1} = \frac{q_2}{\Delta z_2} = \dots \quad (2)$$

puesto que Y es constante.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1) y (2), la aleta que presenta gradiente lineal de temperatura es aquella que mantiene el mismo flujo térmico en la dirección OX. La aleta que cumple estas condiciones, es la correspondientes a un perfil parabólico cóncavo del tipo $z = \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2$. En efecto, la ecuación 3,2-1,3(3) da

$$T = T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{r_1}$$

con $r_1 = (1 + \sqrt{1 + 4m^2 L^2})/2$ Para $r_1 = 1$, $T = T_0 x/L$, $dT/dx = T_0/L$ condición que se cumple para $mL = \sqrt{2}$. Es decir, la aleta de perfil lineal de temperaturas requiere el valor mínimo de material para transmitir una cantidad de calor q determinada.

Para el perfil parabólico cóncavo, el valor óptimo se cumple en $mL = \sqrt{2}$ con una eficacia $\eta = 0,50$. Teniendo en cuen-

ta que $q/q_0 = \eta$ y $q_0 = 2hT_0(L)_{op} = 2hT_0 \cdot 1.442 (kA/h)^{1/3}$

$$q = 2.1,442.0.5 T_0 (kA/h)^{1/3} \quad \text{ó} \quad A = 0.333 \frac{1}{k^2} \left(\frac{q}{T_0} \right)^3 \quad (3)$$

La ecuación (3), da las variaciones del área recta del perfil parabólico convexo en función de las variables térmicas lo que permite establecer relaciones de áreas para distintos materiales o condiciones.

Haciendo las mismas consideraciones con los perfiles rectangulares, triangulares y parabólico convexos se obtienen los valores de la tabla 3,2-1(B)

TABLA 3,2-1(B)

| Perfil | η | Area del perfil |
|-----------------------|--------|--|
| Rectangular | 0,63 | $0,500 \cdot \frac{1}{k^2} \left(\frac{q}{T_0} \right)^3$ |
| Triangular | 0,598 | 0,348 " |
| Parabólico cóncavo | 0,500 | 0,333 " |
| Parabólico convexo | 0,646 | 0,378 " |

De acuerdo con la tabla anterior, el peso para perfiles rectangulares, triangulares, parabólico concavo y parabólico convexo de un mismo material están en la relación 1 ; 0,693 ; 0,666 ; 0,756 respectivamente y transmitiendo la misma q en condiciones dadas de h , t y T .

Ejemplo (3,2-1,5)

Se estudia el diseño para transmitir $5 \cdot 10^5$ (kcal/h) a un fluido con tubos de aletas longitudinales. El coeficiente de convección se estima en 150 (kcal/hm²°C) y la base de las aletas para espesores de los tubos de 2 mm tiene 60°C . Determinar la solución más conveniente utilizando distintos perfiles con

materiales de cobre y aluminio. La longitud de los tubos es de 1,5 m , $k_{Cu} = 325 \text{ (kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$ y $k_{Al} = 184 \text{ (kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$

Solución:

Los perfiles son óptimos, y los pesos, diámetros y número de aletas para los datos térmicos del problema, se hallan en función del calor q transmitido por cada una de las aletas. Para ello, se admiten valores de $q = 300 \text{ (kcal/h.m. aleta)}$ y $q = 150 \text{ (kcal/h.m. aleta)}$

El área de los perfiles está dado en la tabla 3,2-1(B) y las dimensiones en la tabla 3,2-1(A). Así para perfil rectangular de cobre y $q = 300 \text{ (kcal/h.m. aleta)}$

$$A_R = 0,500 \frac{1}{k h^2} \left(\frac{q}{T_0} \right)^3 = 0,500 \cdot \frac{1}{325 \cdot 150^2} \left(\frac{300}{60} \right)^3 = 8,54 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^2\text{)}$$

y dimensiones

$$(L)_{op} = \left(k A / h \right)^{1/3} = \left(\frac{325 \cdot 5,69 \cdot 10^{-6}}{150} \right)^{1/3} = 0,0264 \text{ (m)}$$

$$\Delta Z = A_R / (L)_{op} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ (m)}$$

Si $n_A = 20$, es el número de aletas por tubo, el diámetro exterior del tubo vale

$$D_e \approx \frac{(\Delta Z + 0,003) n_A}{\pi} = \frac{3,2 \cdot 10^{-3} \cdot 20}{\pi} = 0,021 \text{ (m)}$$

El peso por m. de tubo

$$P \approx \left[\frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) + 20 A \right] \gamma = \left[\frac{\pi}{4} (0,021^2 - 0,017^2) + 20 \cdot 8,547 \cdot 10^{-6} \right] \cdot 8960 = 2,60$$

considerando los distintos perfiles, materiales de cobre y alumi-
nio y valores de q de 300 y 150 se obtienen los valores de
la tabla adjunta.

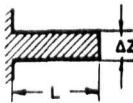
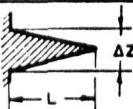

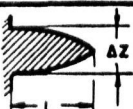
$$h = 300 \text{ (Kcal/h.m aleta)}$$

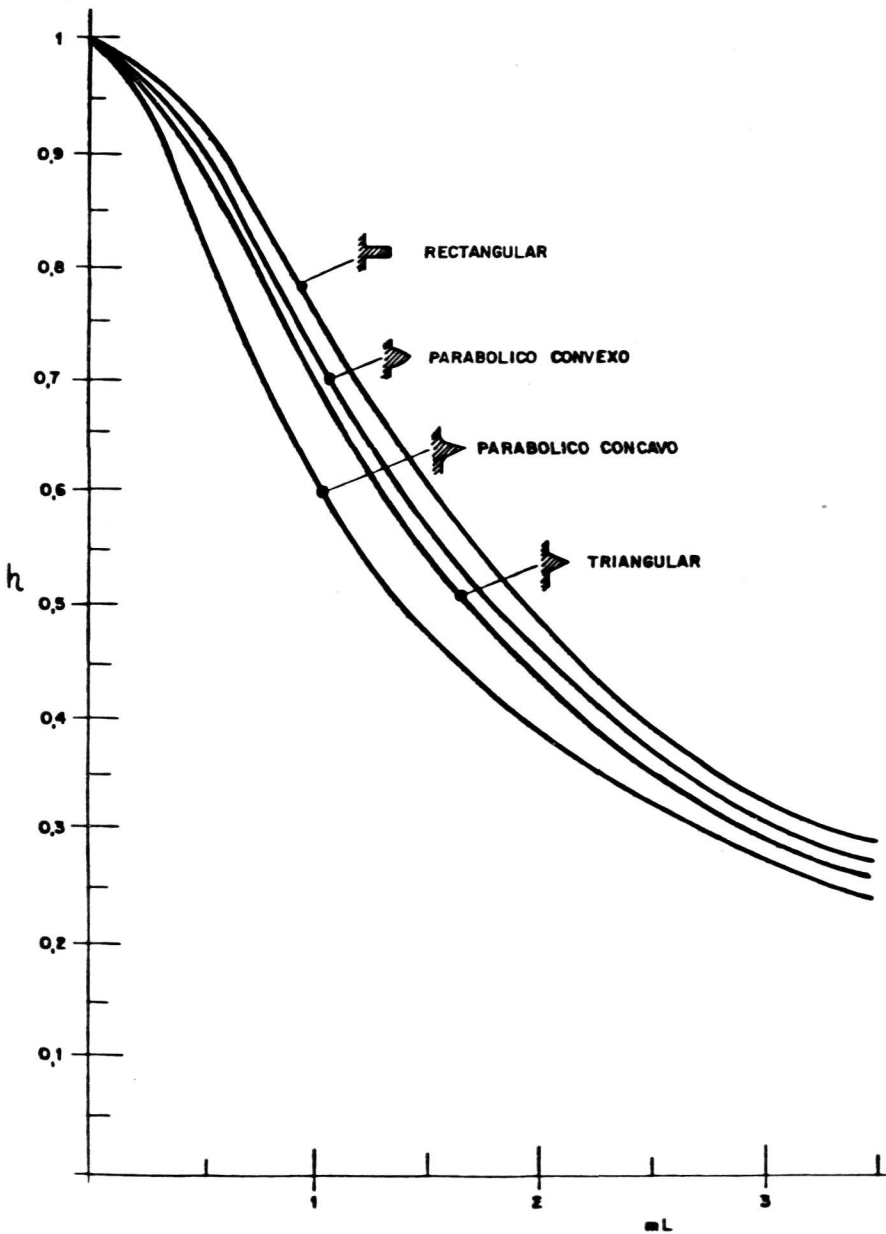
| Material | Perfil | A(m ²) | (L) _{op} (m) | Δz(m) | De(m) | P(kg) | q |
|------------------------------------|--------|------------------------|-----------------------|-----------------------|--------|-------|-----|
| Cobre | 1 | 8,54.10 ⁻⁶ | 0,0264 | 0,00032 | 0,021 | 2,60 | 300 |
| | 2 | 5,91.10 ⁻⁶ | 0,0279 | 0,00042 | 0,0217 | 2,16 | 300 |
| | 3 | 5,68.10 ⁻⁶ | 0,0332 | 0,00051 | 0,0223 | 2,16 | 300 |
| | 4 | 6,45.10 ⁻⁶ | 0,0257 | 0,00037 | 0,0214 | 2,24 | 300 |
| Aluminio | 1 | 15,09.10 ⁻⁶ | 0,0264 | 0,00057 | 0,0227 | 1,16 | 300 |
| | 2 | 10,46.10 ⁻⁶ | 0,0279 | 0,00075 | 0,0238 | 0,93 | 300 |
| | 3 | 10,04.10 ⁻⁶ | 0,0332 | 0,00090 | 0,0248 | 0,92 | 300 |
| | 4 | 11,40.10 ⁻⁶ | 0,0257 | 0,00066 | 0,0232 | 0,97 | 300 |
| $h = 150 \text{ (Kcal/h.m aleta)}$ | | | | | | | |
| Cobre | 1 | 1,06.10 ⁻⁶ | 0,0131 | 8,9.10 ⁻⁵ | | | 150 |
| | 2 | 0,73.10 ⁻⁶ | 0,0139 | 1,1.10 ⁻⁴ | | | 150 |
| | 3 | 0,71.10 ⁻⁶ | 0,0166 | 1,28.10 ⁻⁴ | | | 150 |
| | 4 | 0,8.10 ⁻⁶ | 0,0128 | 9,3.10 ⁻⁴ | | | 150 |
| Aluminio | 1 | 1,87.10 ⁻⁶ | 0,0131 | 1,42.10 ⁻⁴ | | | 150 |
| | 2 | 1,29.10 ⁻⁶ | 0,0139 | 1,85.10 ⁻⁴ | | | 150 |
| | 3 | 1,25.10 ⁻⁶ | 0,0166 | 2,25.10 ⁻⁴ | 0,0203 | 0,37 | 150 |
| | 4 | 1,41.10 ⁻⁶ | 0,0128 | 1,65.10 ⁻⁴ | | | 150 |

1 Rectangular 2 Triangular 3 Parabólico concavo 4 Parabólico convexo.

Como puede observarse, las dimensiones óptimas de los perfiles son sensibles a los valores de q , de acuerdo con las ecuaciones de la tabla 3,2-1(6). De los valores calculados, la solución más adecuada es la de aletas de aluminio de perfil parabólico concavo de 0,00033 m de longitud y 0,9 mm, de base. Generalmente, consideraciones de fabricación hacen que los perfiles rectangula-

Tabla 3.2-1(A). Características de aletas longitudinales en superficies planas.

| Forma | Sección recta | $s_A / \text{m. aleta}$ | $q/q_0 = \eta$ | q ($k_{cal}/h \cdot m \text{ aleta}$) | Perfil óptimo ($a = \text{cte.}$) | |
|---|---|--|---|--|--|---|
| | | | | | $(\Delta Z)_{op}$ | $(L)_{op}$ |
|  RECTANGULAR | $L \Delta Z$ | $2L + \Delta Z$ | $\tanh(mL)/mL$ $m = \sqrt{\frac{2h}{k \Delta Z}}$ | $(T_0 - T) h s_A \eta$ | $0.997 \left(\frac{A^2 h}{k} \right)^{1/3}$ | $\approx \left(\frac{kA}{h} \right)^{1/3}$ |
|  TRIANGULAR | $L \frac{\Delta Z}{2}$ | $\sqrt{L^2 + \left(\frac{\Delta Z}{2} \right)^2} \Delta Z \approx 2L$ | $\frac{I_1(2mL)}{mL I_0(2mL)}$ | $(T_0 - T) h s_A \eta$ | $1.671 \left(\frac{A^2 h}{k} \right)^{1/3}$ | $1.196 \left(\frac{kA}{h} \right)^{1/3}$ |
|  PARABOLICO CONCAVO | $2 \int_0^L \frac{\Delta Z}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 dx$ $= \frac{\Delta Z}{3} \cdot L$ | $2 \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta Z}{L} \right)^2 x^2} dx \approx 2L$ | $\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4m^2 L^2}}$ | $(T_0 - T) h s_A \eta$ | $2.08 \left(\frac{A^2 h}{k} \right)^{1/3}$ | $1.442 \left(\frac{kA}{h} \right)^{1/3}$ |
|  PARABOLICO CONVEXO | $2 \int_0^L \frac{\Delta Z}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} dx$ $= \frac{2}{3} \Delta Z L$ | $2 \int_0^L \sqrt{\frac{x+a}{x}} dx \approx 2L$ $a = \left(\frac{\Delta Z}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{L}$ | $\frac{I_{2/3}(\frac{4}{3}mL)}{mL I_{-1/3}(\frac{4}{3}mL)}$ | $(T_0 - T) h s_A \eta$ | $1.401 \left(\frac{A^2 h}{k} \right)^{1/3}$ | $1.07 \left(\frac{kA}{h} \right)^{1/3}$ |



Gráfica 3.2-1.

Eficacia (η) de distintos perfiles de aletas sobre superficies planas.

TABLA 3,2-1

Eficacias de aletas sobre superficies planas y perfiles: rectangular, triangular, parabólico cóncavo y parabólico convexo.

| mL | Eficacia η | | | |
|------|-----------------|------------|---------------|---------------|
| | Rectangular | Triangular | Parab.concavo | Parab.convexo |
| 0,00 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 0,1 | 1,996 | 0,995 | 0,990 | 0,975 |
| 0,2 | 0,986 | 0,980 | 0,962 | 0,968 |
| 0,3 | 0,971 | 0,957 | 0,923 | 0,965 |
| 0,4 | 0,949 | 0,927 | 0,877 | 0,935 |
| 0,5 | 0,924 | 0,892 | 0,828 | 0,903 |
| 0,6 | 0,895 | 0,854 | 0,780 | 0,877 |
| 0,7 | 0,863 | 0,814 | 0,735 | 0,840 |
| 0,8 | 0,830 | 0,774 | 0,692 | 0,802 |
| 0,9 | 0,795 | 0,735 | 0,653 | 0,769 |
| 1,0 | 0,761 | 0,697 | 0,618 | 0,731 |
| 1,1 | 0,727 | 0,661 | 0,585 | 0,695 |
| 1,2 | 0,694 | 0,629 | 0,555 | 0,666 |
| 1,3 | 0,662 | 0,596 | 0,528 | 0,630 |
| 1,4 | 0,632 | 0,567 | 0,503 | 0,600 |
| 1,5 | 0,603 | 0,540 | 0,480 | 0,572 |
| 1,6 | 0,576 | 0,514 | 0,459 | 0,545 |
| 1,7 | 0,550 | 0,491 | 0,440 | 0,520 |
| 1,8 | 0,526 | 0,470 | 0,422 | 0,497 |
| 1,9 | 0,503 | 0,450 | 0,405 | 0,476 |
| 2,0 | 0,482 | 0,431 | 0,390 | 0,456 |
| 2,1 | 0,462 | 0,414 | 0,376 | 0,437 |
| 2,2 | 0,443 | 0,398 | 0,362 | 0,420 |
| 2,3 | 0,426 | 0,384 | 0,350 | 0,404 |
| 2,4 | 0,409 | 0,370 | 0,338 | 0,389 |
| 2,5 | 0,394 | 0,357 | 0,327 | 0,375 |
| 2,6 | 0,380 | 0,345 | 0,317 | 0,361 |
| 2,7 | 0,367 | 0,334 | 0,308 | 0,349 |
| 2,8 | 0,354 | 0,323 | 0,299 | 0,338 |
| 2,9 | 0,342 | 0,313 | 0,290 | 0,327 |
| 3,0 | 0,331 | 0,304 | 0,282 | 0,317 |
| 3,1 | 0,321 | 0,295 | 0,274 | 0,307 |
| 3,2 | 0,311 | 0,286 | 0,267 | 0,298 |
| 3,3 | 0,302 | 0,279 | 0,260 | 0,289 |
| 3,4 | 0,293 | 0,271 | 0,254 | 0,281 |
| 3,5 | 0,285 | 0,264 | 0,247 | 0,274 |

res o triangulares sean preferidos.

Calor transmitido por tubo de 1,5 m = 300 Kcal/h aleta. 20 aletas. 1,5 m = 9000 Kcal/h tubo

Número de tubos

$$500.000 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h}} \right) \cdot \frac{1}{9000} \left(\frac{\text{h. tubos}}{\text{kcal}} \right) = 55,5 \text{ tubos} \approx 56$$

3.2-2.1. Aletas sobre superficies curvas. Perfiles rectangulares

Los casos más frecuentes son los de aletas sobre la superficie lateral de tubos. Cuando el perfil recto de la aleta es perpendicular al eje axial del tubo, el problema de transmisión de calor se trata como en el caso de las aletas sobre superficies planas, considerando las posibles limitaciones impuestas por las dimensiones del tubo y aletas. Cuando las aletas se disponen con su perfil recto en la dirección del eje axial, se denominan transversales. Las aletas en forma de hélice de paso pequeño se acercan en su comportamiento a las aletas transversales.

De acuerdo con la Fig. (3,2-2(1)) y procediendo en forma análoga al estudio de aletas en superficies planas, la variación de calor dq que pasa por conducción en la dirección or en una aleta de espesor, $z(r)$

$$dq_1 = 2\pi k \frac{d}{dr} \left(r^2 z(r) \frac{dT}{dr} \right) dr$$

y el calor perdido por convección en el elemento dr

$$dq_2 = 2h \cdot 2\pi r dr (T-t)$$

Para simplificar los cálculos, se supone $t = 0$, y en régimen estacionario $dq_1 = dq_2$ y

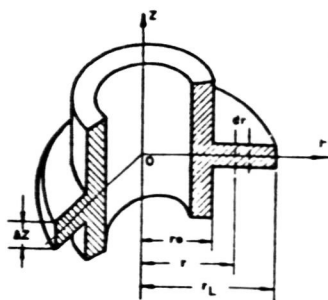


Fig. 3.2-2(1)

$$z \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{z}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{dz}{dr} \frac{dT}{dr} = \frac{h}{k} T \quad (1)$$

Para perfiles rectos $z = \Delta z/2$ y la ec.(1) toma la forma

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} - m^2 r^2 T = 0 \quad (2)$$

siendo $m = 2h/k\Delta z$

La ec.(2) se identifica como una ecuación de Bessel modificada (Apéndice I) y la solución general es

$$T = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr) \quad (3)$$

Despreciando el calor perdido por la cabeza de la aleta, hipótesis tanto más correcta cuanto menor es Δz resultan las condiciones

$$T = T_0 \quad \text{en} \quad r = r_0 ; \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{en} \quad r = r_L$$

Sustituyendo estos valores en (3) se obtiene

$$T = T_0 \frac{I_0(mr) K_1(mr_L) + K_0(mr) I_1(mr_L)}{I_0(mr_0) K_1(mr_L) + I_1(mr_L) K_0(mr_0)} \quad (4)$$

La cantidad de calor q transmitida al fluido por las superficies que forman la corona circular de la aleta

$$q = 4\pi h \int_{r_0}^r r T dr \quad (5)$$

y la eficacia

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{2}{(r_L^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^{r_L} r T dr \quad (6)$$

Integrando la ec.(6) y con las ecuaciones de recurrencia (Apéndice I), resulta

$$q = \frac{4\pi h r_0 I_0}{m} \left[\frac{I_1(mr_L) K_1(mr_0) - K_1(mr_L) I_1(mr_0)}{I_0(mr_0) K_1(mr_L) + I_1(mr_L) K_0(mr_0)} \right] \quad (7)$$

eficacia

$$\eta = \frac{2r_0}{m(r_L^2 - r_0^2)} \left[\frac{I_1(mr_L) K_1(mr_0) - K_1(mr_L) I_1(mr_0)}{I_0(mr_0) K_1(mr_L) + I_1(mr_L) K_0(mr_0)} \right] \quad (8)$$

Para comparar distintos tipos de aletas se introducen los cambios de variables

$$\alpha \equiv \frac{r_0}{r_L} \quad \beta \equiv (r_L - r_0)^{3/2} \sqrt{\frac{2h}{kA}} \quad A = \Delta Z (r_L - r_0)$$

$$m r_L = \frac{r_L (r_L - r_0)^{3/2}}{r_L - r_0} \sqrt{\frac{2h}{kA}} = \beta / (1 - \alpha) \quad m r_0 = \frac{\alpha \beta}{1 - \alpha}$$

$$\eta = \frac{2\alpha}{\beta(1+\alpha)} \left[\frac{I_1(\beta/(1-\alpha)) K_1(\alpha\beta/(1-\alpha)) - K_1(\beta/(1-\alpha)) I_1(\alpha\beta/(1-\alpha))}{I_0(\alpha\beta/(1-\alpha)) K_1(\beta/(1-\alpha)) + I_1(\beta/(1-\alpha)) K_0(\alpha\beta/(1-\alpha))} \right] \quad (9)$$

Valores de la ec. (9) se dan en la tabla (3,2-2,1) y gráfica (3,2-2,1).

Ejemplo (3,2-2,1)

Una aleta rectangular radial de acero $k = 44 \text{ (kcal/h m } ^\circ\text{C)}$ y dimensiones de 0,5(mm) de espesor y 15 (mm) de longitud se dispone en tubos de 20 y 46 (mm) de diámetro exterior. La temperatura de la base de la aleta es de 90°C el coeficiente de convección es $100 \text{ (kcal/h m}^2\text{ }^\circ\text{C)}$ y la temperatura del fluido $20(^\circ\text{C})$. Calcular para los dos tubos:

- Temperaturas en el extremo de la aleta
- Eficacia
- Calor transmitido al fluido por aleta
- Calor transmitido al fluido por unidad de superficie

y comparar con el caso correspondiente obtenido en el ejemplo 3,2-1,1(1).

Solución:

- Por la ecuación (4)

$$T = T_o \frac{I_o(mr_L) K_1(mr_L) + K_o(mr_L) I_1(mr_L)}{I_o(mr_o) K_1(mr_L) + I_1(mr_L) K_o(mr_o)}$$

$$mr_{L1} = \sqrt{\frac{2h}{k\Delta L}} \cdot r_L = \sqrt{\frac{4 \cdot 100}{44 \cdot 10^{-3}}} \cdot 0,025 = 2,38 \quad (\text{para tubo de } 0,020 \text{ m})$$

$$mr_{L2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100}{44 \cdot 10^{-3}}} \cdot 0,038 = 3,62 \quad (\text{para tubo de } 0,046 \text{ m})$$

$$mr_{o1} = 0,95 ; \quad mr_{o2} = 2,19$$

$$T_{L1} = 90 \cdot \frac{3,0 \cdot 0,084 + 0,071 \cdot 2,25}{1,23 \cdot 0,084 + 0,45 \cdot 2,25} = 33,2(^{\circ}\text{C}) \quad \text{ec. (4)}$$

$$T_{L2} = 90 \cdot \frac{8,15 \cdot 0,018 + 0,017 \cdot 6,99}{2,62 \cdot 0,018 + 6,99 \cdot 0,085} = 37,2(^{\circ}\text{C})$$

b) (gráfica y tabla 3,2-2,1)

$$\beta_1 = (r_L - r_o)^{3/2} \sqrt{2h/kA} = 1,42$$

$$\eta_1 = f(\beta_1, \alpha_1) = f\left[0,70, \frac{0,010}{0,025}\right] = 0,50$$

$$\beta_2 = 1,010 \quad \eta_2 = f\left[0,32, \frac{0,023}{0,038}\right] = 0,56$$

c)

$$q = 2h \frac{\pi}{4} (r_L^2 - r_o^2) \eta (T_o - t)$$

$$q_1 = 2 \cdot 100 \cdot \pi (0,025^2 - 0,010^2) \cdot 0,50 \cdot 70 = 11,5 \quad (\text{kcal/h aleta})$$

$$q_2 = 2 \cdot 100 \cdot \pi (0,038^2 - 0,023^2) \cdot 0,56 \cdot 70 = 22,5 \quad "$$

Superficie

$$S_1 = 2\pi (0,025^2 - 0,010^2) = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^2\text{)}$$

$$S_2 = 2\pi (0,038^2 - 0,023^2) = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^2\text{)}$$

y los flujos térmicos

$$\left(\frac{q}{S}\right)_1 = 3593 \quad (\text{kcal/h m}^2)$$

$$\left(\frac{q}{S}\right)_2 = 3947 \quad "$$

En el ejemplo 3,2-1,1(1) para las mismas condiciones

$$\left(\frac{q}{S}\right)_3 = 130,7 / 0,030 = 4353 \quad (\text{kcal/h m}^2)$$

Como puede observarse, el rendimiento de las aletas longitudinales es superior al de las aletas radiales en los mismos perfiles y condiciones. Cuanto menor es el diámetro de las aletas radiales menor es el rendimiento debido a la distribución de material. Dado que la temperatura máxima está en la base de la aleta, es conveniente disponer la superficie de intercambio de calor lo más próxima a ésta. En el caso de las aletas radiales la superficie próxima a la base es proporcional a $(r_0/r_0 + \Delta r)^2$ cuando aumenta el radio de curvatura la relación anterior también aumenta y en el límite, $r_0 \rightarrow \infty$, la relación tiende a 1 y se llega a aletas longitudinales. Análogamente la relación es unidad cuando Δr es pequeño frente a r_0 y las aletas radiales se tratan como aletas longitudinales. Así pues el límite superior de la eficacia de una aleta radial es el correspondiente a una aleta longitudinal o $\alpha = r_0/r \simeq 1$. En la gráfica y tabla 3,2-2, puede apreciarse el aumento de η cuando aumenta α para un valor dado de β .

(3.2-2.2). Aletas sobre superficies curvas. Perfiles hiperbólicos

La variación de z con el radio es

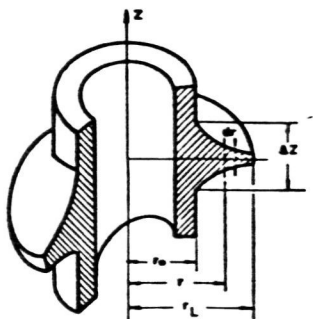
$$z = \frac{C}{r} = \frac{\Delta z}{2} \frac{r_0}{r}$$

Teniendo en cuenta la ec. (3.2-2.1(1) y que

$$dz = -C/r^2$$

$$r_0 \frac{\Delta z}{2} \frac{dT}{dr^2} + \frac{\Delta z}{2} \frac{r_0}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{\Delta z}{2} \frac{r_0}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{h}{k} T r$$

6



$$\frac{dT}{dr^2} = m^2 \frac{r}{r_0} T \quad (1)$$

donde $m = \sqrt{\frac{2h}{k \Delta z}}$ y $N^2 = m^2/r_0$

Procediendo como en los casos anteriores, la ec. (1) es de tipo Bessel cuya solución es

$$T = \sqrt{r} \left[C_1 I_{1/3} \left(\frac{2}{3} N r^{3/2} \right) + C_2 I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} N r^{3/2} \right) \right] \quad (2)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y $I_{1/3}$ y $I_{-1/3}$ las funciones de Bessel modificadas de primera clase y grado $1/3$, $-1/3$ respectivamente. Con las condiciones $T=T_0$ en $r=r_0$ y $dT/dr=0$ en $r=r_L$

$$T = T_0 \sqrt{\frac{r}{r_0}} \left[\frac{I_{1/3}(\frac{2}{3} N r_L^{3/2}) I_{1/3}(\frac{2}{3} N r^{3/2}) - I_{-1/3}(\frac{2}{3} N r_L^{3/2}) I_{-1/3}(\frac{2}{3} N r^{3/2})}{I_{1/3}(\frac{2}{3} N r_L^{3/2}) I_{1/3}(\frac{2}{3} N r_0^{3/2}) - I_{-1/3}(\frac{2}{3} N r_L^{3/2}) I_{-1/3}(\frac{2}{3} N r_0^{3/2})} \right] \quad (3)$$

y la cantidad de calor a través de la superficie de la aleta

$$q = 2\pi h \int_{r_0}^{r_L} r T dr = \pi k r_0 \Delta z N \sqrt{r_0} T_0 B$$

$$B = \frac{I_{1/3}(\frac{2}{3} N r_L^{3/2}) I_{-1/3}(\frac{2}{3} N r_0^{3/2}) - I_{-1/3}(\frac{2}{3} N r_L^{3/2}) I_{1/3}(\frac{2}{3} N r_0^{3/2})}{I_{1/3}(\frac{2}{3} N r_L^{3/2}) I_{1/3}(\frac{2}{3} N r_0^{3/2}) - I_{-1/3}(\frac{2}{3} N r_L^{3/2}) I_{-1/3}(\frac{2}{3} N r_0^{3/2})}$$

y la eficacia

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{\pi k r_0 \Delta z N \sqrt{r_0} T_0}{2\pi (r_L^2 - r_0^2) h T_0} B = \frac{2 r_0 B}{m(r_L^2 - r_0^2)} \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que $A = \int_{r_0}^{r_L} 2 \left(\frac{\Delta z}{2} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right) dr = \Delta z r_0 \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right)$
donde $\alpha = r_0/r_L$ y $\beta = (r_L - r_0)^{3/2} \sqrt{\frac{r_L}{kA}}$ resulta

$$\alpha_0 = \frac{2}{3} N r_0^{3/2} = \frac{2}{3} \beta \left(\ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right) \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{3/2}; \quad \alpha_L = \frac{2}{3} N r_L^{3/2} = \frac{2}{3} \beta \left(\ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right)^{1/2} \frac{1}{(1-\alpha)^{3/2}}$$

y finalmente

$$\eta = \frac{1}{\beta} \left[\frac{2\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2 \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right)} \right] \left[\frac{I_{1/3}(\alpha_L) I_{-1/3}(\alpha_0) - I_{-1/3}(\alpha_L) I_{1/3}(\alpha_0)}{I_{1/3}(\alpha_L) I_{1/3}(\alpha_0) - I_{-1/3}(\alpha_L) I_{-1/3}(\alpha_0)} \right] \quad (6)$$

3.2-3. Protuberancias sobre superficies

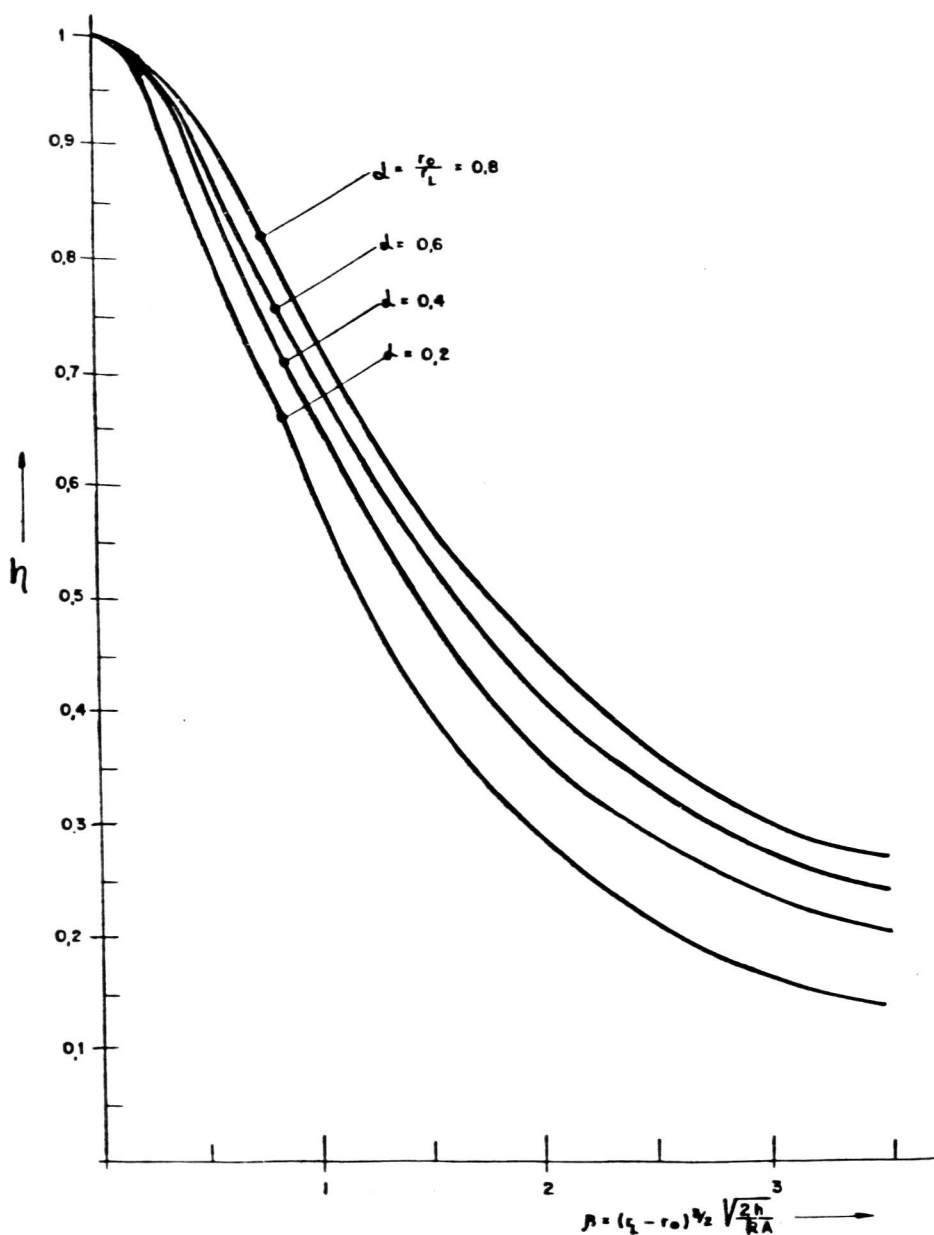
La transmisión de calor en régimen estacionario, sin generación de calor, en cuerpos tridimensionales comprende múltiples aplicaciones industriales de cuerpos sólidos unidos a bases, con temperaturas impuestas por focos térmicos adyacentes, o como conse

TABLA 3,2-2.1

Eficacias de aletas rectangulares sobre superficies tubulares.

Eficacias η

| β/α | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|
| 0,1 | 0.992 | 0.994 | 0,995 | 0.996 |
| 0,2 | 0.971 | 0.979 | 0,983 | 0.985 |
| 0,3 | 0.938 | 0.954 | 0,962 | 0.967 |
| 0,4 | 0.896 | 0.922 | 0,936 | 0.944 |
| 0,5 | 0.847 | 0.884 | 0,904 | 0.916 |
| 0,6 | 0.794 | 0.842 | 0,868 | 0.883 |
| 0,7 | 0.740 | 0.798 | 0,829 | 0.849 |
| 0,8 | 0.684 | 0.754 | 0,790 | 0.813 |
| 0,9 | 0.637 | 0.709 | 0,750 | 0.776 |
| 1,0 | 0.589 | 0.666 | 0,711 | 0.740 |
| 1,1 | 0.544 | 0.625 | 0,673 | 0.711 |
| 1,2 | 0.503 | 0.587 | 0,636 | 0.669 |
| 1,3 | 0.466 | 0.551 | 0,602 | 0.636 |
| 1,4 | 0.432 | 0.517 | 0,569 | 0.605 |
| 1,5 | 0.402 | 0.486 | 0,539 | 0.575 |
| 1,6 | 0.374 | 0.458 | 0,510 | 0.547 |
| 1,7 | 0.349 | 0.431 | 0,484 | 0.522 |
| 1,8 | 0.326 | 0.407 | 0,460 | 0.498 |
| 1,9 | 0.306 | 0.385 | 0,437 | 0.475 |
| 2,0 | 0.287 | 0.365 | 0,416 | 0.454 |
| 2,1 | 0.270 | 0.346 | 0,397 | 0.434 |
| 2,2 | 0.255 | 0.329 | 0,379 | 0.416 |
| 2,3 | 0.241 | 0.314 | 0,362 | 0.399 |
| 2,4 | 0.228 | 0.299 | 0,347 | 0.383 |
| 2,5 | 0.217 | 0.286 | 0,333 | 0.366 |
| 2,6 | 0.206 | 0.273 | 0,319 | 0.354 |
| 2,7 | 0.196 | 0.262 | 0,307 | 0.340 |
| 2,8 | 0.187 | 0.251 | 0,295 | 0.329 |
| 2,9 | 0.179 | 0.241 | 0,285 | 0.318 |
| 3,0 | 0.172 | 0.232 | 0,275 | 0.306 |
| 3,1 | 0.164 | 0.224 | 0,265 | 0.296 |
| 3,2 | 0.158 | 0.216 | 0,256 | 0.288 |
| 3,3 | 0.152 | 0.208 | 0,248 | 0.279 |
| 3,4 | 0.146 | 0.201 | 0,240 | 0.271 |
| 3,5 | 0.141 | 0.195 | 0,233 | 0.263 |



Gráfica 3,2-2,1. Eficacia de aletas rectangulares sobre superficies tubulares.

cuencia de transmitirse calor a través de sólidos compuestos por elementos yuxtapuestos. El tratamiento riguroso de la transmisión de calor en tres dimensiones, será tratado en el apartado 3.3.

Las protuberancias, se consideran como sólidos de pequeñas dimensiones, de tal manera, que una de ellas, es superior a las otras dos. Con ello, se mantiene la hipótesis que las líneas isothermas son perpendiculares a la dirección principal, es decir, constantes en cada una de las secciones perpendiculares al eje de la dimensión mayor. La simplificación anterior, es tanto más exacta cuanto menores son las dimensiones. El tratamiento, es igualmente aplicable para casos donde se desea una estimación aproximada, como sucede: en vigas, pernos, varillas, barras acopladas de distintos diámetros. Las protuberancias, debido a sus dimensiones, se acoplan a superficies planas o curvas, y las dimensiones de la sección de apoyo a la base, son pequeñas, frente a la superficie de esta última. La preparación de protuberancias puede hacerse por soldadura, fundición, o desbaste con máquinas herramientas sobre el material básico, dependiendo de la complejidad de las protuberancias y su disposición sobre la superficie base.

3.2-3.1. Paralelepípedo

La temperatura es constante en las secciones perpendiculares al eje OX Fig. 3.2-3.(1). En régimen estacionario se cumple

$$k \Delta Y \Delta Z \frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta T}{dx} \right) = 2(\Delta Y + \Delta Z) h T \quad (1)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = m^2 T \quad (2)$$

donde

$$m = \sqrt{\frac{(\Delta Y + \Delta Z)^2}{k \Delta Z \Delta Y}} = \sqrt{\frac{h P}{k A}}$$

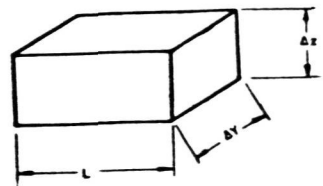


Fig. 3.2-3(1)

donde P y A son el perímetro y área de la sección recta respectivamente. La ecuación (2) es de la misma forma que la ecuación

3.2-1,1(1) de aletas rectangulares longitudinales y procediendo en forma análoga al estudio de éstas, la cantidad de calor a través de la protuberancia paralelepípedica, despreciando los efectos de la cabeza libre

$$q = 2(\Delta Y + \Delta Z) h \int_0^L T dx = 2h(\Delta Y + \Delta Z) \frac{T_0}{m} \tanh(mL) \quad (3)$$

y la eficacia

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{2h(\Delta Y + \Delta Z)}{2hL(\Delta Y + \Delta Z)} \frac{\tanh(mL)}{mL} = \tanh(mL)/mL \quad (4)$$

La ecuación (4) es análoga a la ecuación de la eficacia en aletas rectangulares longitudinales. Valores η se dan en la tabla 3,2-3,1 y gráfica 3,2-31.

Perfil óptimo

Si el volumen del paralelepípedo es $A \cdot L = V$ y la condición de perímetro mínimo $dq/dL = 0$

$$q = \frac{h P \tanh \sqrt{\frac{h}{k} \frac{P}{V}} \cdot L}{\sqrt{\frac{h}{k} \frac{P}{V}}} = \frac{a}{\sqrt{L}} \tanh(bL^{3/2})$$

$$\frac{3bL^{3/2}}{\cosh^2(b) \cdot L^{3/2}} = \tanh(bL^{3/2}) \quad ; \quad bL^{3/2} = mL = 1,4142$$

valor que coincide con el de las aletas rectas longitudinales.

Ejemplo (3,2-3,1)

Una protuberancia paralelepípedica de acero con dimensiones 0,5.0,5.15 (mm³) ésta unida a una superficie por la cara de 0,5.0,5 (mm²). La temperatura de la base es de 90°C. La temperatura del fluido es de 20°C y el coeficiente de convección es de 100 (Kcal/hm² °C). La conductividad térmica del acero es 44 Kcal/hm°C.

Calcular:

- Temperatura en la cabeza
- Eficiencia
- Calor transmitido al fluido
- Flujo térmico y consideraciones respecto a las aletas de las mismas secciones rectas expuestas en los ejemplos (3,2-1,1(1)) y (3,2-2,1).

Solución:

- La distribución de temperaturas despreciando el calor perdido por la cabeza es la expresada por la ecuación 3,2-1,1(6)

$$T = T_0 \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh(mL)}$$

donde en este caso

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 2(2.05 \cdot 10^{-3})}{44 \cdot (0.5 \cdot 10^{-3})^2}} = 134,8 \quad mL = 2,02$$

$$T = T_0 \frac{\cosh(1)}{\cosh(2,02)} = 23,4^\circ\text{C}$$

b)

$$\eta = \frac{t_g h(mL)}{mL} = 0,477 \quad (\text{gráfica 3,2-3 y tabla 3,2-3})$$

c)

$$q = (T_0 - t) h \cdot \eta \cdot S = 70 \cdot 100 \cdot 0,477 (0,5 \cdot 0,015 \cdot 4) \cdot 10^{-6} = 10^{-4} \text{ (Kcal/h)}$$

d)

$$\frac{q}{S} = 10^{-4} / 3 \cdot 10^{-8} = 333,3 \text{ (Kcal/h m}^2\text{)}$$

La comparación con aletas longitudinales y radiales de sección $0,5 \cdot 0,015 \text{ (mm}^2\text{)}$ puede hacerse respecto a los volúmenes de material.

Longitudinales $S/V = 2/\Delta z$

Protuberancia $S/V = 4/\Delta z$

Es decir, la relación superficie a volumen en la protuberancia es el doble que en las aletas consideradas y para el mismo volumen de material el valor de q es

$$q_p = q_0 \eta_R \quad q_p = q_0 \eta_p \quad q_r = q_0 \eta_r$$

$$q_p/q_R = 2 \eta_p/\eta_R ; \quad q_p/q_r = 2 \eta_p/\eta_r$$

donde los subíndices R, r, p , se refieren a rectangulares, radiales y protuberancias respectivamente.

Si se tiene en cuenta el valor de m_L resulta

$$m_R L_R = \left(\sqrt{\frac{2h}{k \Delta z}} \right)_R L_R = \left(\sqrt{\frac{h \cdot S}{k \cdot V}} \right)_R L_R$$

$$m_p L_p = \left(\sqrt{\frac{h \cdot p}{k \cdot A}} \right)_p L_p = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{h \cdot S}{k \cdot V}} \right)_R L_p$$

y si el valor óptimo de L_R es $(L_R)_{op}$ el valor óptimo de $(L_p)_{op}$ vale

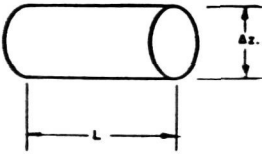
$$(L_p)_{op} = (L_R)_{op} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En la hipótesis de que las aletas rectangulares fuesen óptimas, las protuberancias debieran tener una longitud $L/\sqrt{2}$ lo que equivale a decir, que las protuberancias son desproporcionadas, por lo cual, su eficacia, es inferior a la de valor óptimo.

3.2-3.2. Protuberancias cilíndricas

Las protuberancias cilíndricas son numerosas, por su forma geométrica común a barras y tubos, de frecuentes aplicaciones industriales. Para sección recta, perpendicular al eje axial, Fig. 3,2-3(2) se tiene

Fig. 3.2-3(2)



$$k \pi \frac{\Delta z^2}{4} \frac{d}{dr} \left(\frac{dT}{dr} \right) = 2\pi \frac{\Delta z}{2} h T \quad (1)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = m^2 T \quad (2)$$

donde

$$m = \sqrt{\frac{4h}{k \Delta z}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{2h}{k \Delta z}}$$

La distribución de temperaturas despreciando el calor transmitido por la cabeza

$$T = T_0 \frac{\cosh[m(L-x)]}{mL} \quad (3)$$

El calor perdido al fluido que rodea a la protuberancia cilíndrica

$$q = 2\pi \frac{\Delta z}{2} h \int_0^L T dx = \pi h \Delta z \frac{T_0}{m} \tanh(mL) \quad (4)$$

y la eficacia

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{\tanh(\sqrt{2} mL)}{\sqrt{2} mL} \quad (5)$$

Valores de η se indican en la tabla 3,2-3,1 y gráfica 3,2-3,1.

Perfil óptimo

El volumen de la barra vale $V = \pi \frac{\Delta z^2}{4} L$

$$mL = \sqrt{\frac{4h}{k}} \sqrt{\frac{\pi L}{4V}} \cdot L = \sqrt{\frac{4h}{k} \left(\frac{\pi}{4V} \right)^{1/2}} L^{5/4} = M$$

Para $\frac{dq}{dL} = 0$ se cumple

$$q = A \frac{1}{V^{1/5}} = \frac{B}{M^{3/5}} \tanh(M)$$

6

$$\frac{M^{3/5}}{\omega h^2(M)} = \frac{3}{5} M^{-2/5} \tanh(M) \quad ; \quad mL = 0,925$$

y

$$0,925 = \sqrt{\frac{4h}{k} \cdot \frac{2}{\Delta z}} ; \quad (L)_{of} = \frac{0,925}{2,828} \sqrt{\frac{k \Delta z}{h}} = 0,328 \sqrt{\frac{k \Delta z}{h}}$$

Ejemplo (3,2-3,2)

En un reactor químico, donde se realiza una reacción endotérmica, el control de calentamiento, se hace a través de un tubo grueso de acero que desde el interior del reactor llega a un dispositivo electrónico exterior que no debe pasar de 60°C . El tubo puede considerarse como una barra de 40 cm de longitud y 3 cm de diámetro. Se desea conocer el coeficiente de convección necesario para cumplir las condiciones especiales si la temperatura en el reactor es de 250°C y la temperatura exterior es de 25°C .

Solución:

$$T = T_o \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} \quad \text{Si } x=L \quad T = \frac{T_o}{\cosh(mL)}$$

$$m = \sqrt{\frac{4h}{kz}} \quad L=0,40$$

debe cumplirse

$$596c) = 250 / \cosh(mL) ; \quad \cosh(mL) = 4,237 ; \quad mL = 2,12$$

$$h = \frac{2,12 \cdot 44 \cdot 0,3}{4 \cdot 0,4^2} = 4,37 \quad (\text{Kcal}/\text{h m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C})$$

luego es suficiente la convección natural sin necesidad de otros medios de refrigeración.

3.2-3.3. Protuberancias piramidales rectangulares

Consideremos el caso de sección recta cuadrada, Fig.

Fig. 3,2-3(3) manteniendo la hipótesis

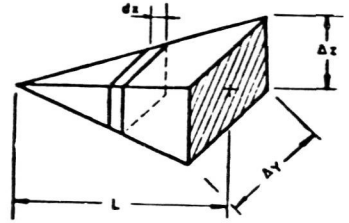
$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \approx 1$$

Superficie lateral

$$S = 2 \times \frac{x}{L} \left(2 \frac{\Delta z}{2} \right) = 2 \Delta z \frac{x}{L}$$

Area recta

$$A = \left(2 \frac{\Delta z}{2} \right)^2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 = \Delta z^2 \left(\frac{x}{L} \right)^2$$



Un balance térmico en el elemento

Fig. 3.2-3(3)

$$k \frac{d}{dx} \left[\Delta z^2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \frac{dT}{dx} \right] = 2h \Delta z \left(\frac{x}{L} \right) T$$

o

$$x^2 \frac{dT}{dx^2} + 2x \frac{dT}{dx} = \frac{2h}{k \Delta z} L x T = m^2 L x T \quad (1)$$

siendo $m^2 = 2h/k \Delta z$

La ecuación (1) es una ecuación de Bessel cuya solución es (Apéndice I)

$$T = x^{-1/2} \left[C_1 I_1(2m \sqrt{L} \sqrt{x}) + C_2 K_1(2m \sqrt{L} \sqrt{x}) \right] \quad (2)$$

con las condiciones $T = T_0$; $x = L$ y $dT/dx = 0$ en $x = 0$.
Para $x = 0$; $k_1 = \infty$ luego $C_2 = 0$ y $C_1 = T_0 \sqrt{L} / I_1(2mL)$ y finalmente

$$T = \frac{T_0 \sqrt{L}}{\sqrt{x}} \frac{I_1(2m \sqrt{L} \sqrt{x})}{I_1(2mL)} \quad (3)$$

donde I_1 es la función de Bessel modificada de grado 1.

La cantidad de calor q que transmite la aleta vale

$$q = 4h \frac{\Delta z}{L} \int_0^L x T dx = 4h \Delta z T_0 I_2(2mL) / m I_1(2mL) \quad (4)$$

y la eficacia

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{4 I_2(2mL)}{2mL I_1(2mL)} \quad (5)$$

Valores de la eficacia η se dan en la tabla 3,2-3,1 y gráfica 3,2-3,1.

Perfil óptimo

Para un volumen fijo $V = \frac{\Delta z^2 L}{3}$

$$2mL = 2 \sqrt{\frac{2h}{k\Delta z}} \cdot L = 2 \sqrt{\frac{2h}{k}} \left(\frac{L}{3V}\right)^{1/4} L$$

y la condición de $(L)_{op}$ se cumple para $dq/dL = 0$

Haciendo $2mL = M$ se cumple $\frac{d}{dM} \left(\frac{1}{M^{4/5}} \frac{I_2(M)}{I_1(M)} \right) = 0$ o

$$I_2'(M) I_1(M) = \frac{4}{5} I_1(M) I_2(M) + I_1'(M) I_2(M)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de recurrencia (Apéndice 1)

$$I_2(M) = I_0(M) - \frac{2}{M} I_1(M) ; \quad \frac{11}{5} I_1(M) = M I_0(M)$$

cuya solución es $M=0,90$

$$0,9 = 2mL = 2 \sqrt{\frac{2h}{k\Delta z}} L$$

$$(L)_{op} = 0,318 \sqrt{\frac{k\Delta z}{h}}$$

(6)

Ejemplo 3,2-3,3

Una placa de $1,1(m^2)$ de un material de conductividad $5 (Kcal/h m^{\circ}C)$ está formada por protuberancias piramidales cuadrangulares cuyos lados son iguales y de valor 1 cm y altura 2 cm . La temperatura de la base de las pirámides es de $50^{\circ}C$. La temperatura del fluido es de $20^{\circ}C$ y el coeficiente de convección es de

10 (Kcal/hm²°C)

Calcular:

- Temperatura a 0,1 mm del vértice de las pirámides
- Eficacia de las protuberancias
- Calor transmitido al fluido

Solución:

Se admite que las líneas isotermales son perpendiculares a la sección recta normal al eje que une el vértice con el centro de la base. En estas condiciones pueden aplicarse las ecuaciones anteriores.

- a) Por la ecuación (3)

$$T = \frac{T_0 \sqrt{L} I_1(2m\sqrt{L}\sqrt{x})}{I_1(2mL)}$$

$$2mL = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 0,01}} \cdot 0,02 = 0,8 \quad I_1(0,8) = 0,432$$

$$2m\sqrt{L}\sqrt{x} = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 0,01}} \cdot \sqrt{0,02} \cdot \sqrt{10^{-4}} = 0,05 \quad I_1(0,05) = 0,027$$

$$T = 50 \cdot \sqrt{\frac{0,02}{10^{-4}}} \cdot \frac{0,027}{0,432} = 44,1(^{\circ}\text{C})$$

- b)

$$I_1(0,8) = 0,4329 \quad ; \quad I_2(0,8) = I_0(0,8) - \frac{2}{0,8} I_1(0,8) = 0,084$$

$$\eta = \frac{4 \cdot 0,084}{0,8 \cdot 0,432} = 0,97$$

- c)

$$q = h S \eta (T_0 - t) \quad ; \quad S = 442 \sqrt{(242)^2 + \frac{\Delta L^2}{4}} = 7,74 \text{ (cm}^2\text{/pirámide)}$$

$$q = 10 \cdot 7,74 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{pirámide}} \right) \cdot 10^4 (\text{pirámides}) \cdot 0,97 (50 - 20) = 2252 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h}} \right)$$

Si no existiesen las piramides se transmitiría

$$q = 10.30 = 300 \text{ (Kcal/h)}$$

Ejemplo 3,2-3,3(1)

Repetir el ejemplo 3,2-3,3 con $k = 0,1 \text{ (KCal/hm}^\circ\text{C)}$.

a)

$$2mL = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{0,1 \cdot 10^2}} \cdot 0,02 = 5,65 \quad I_1(5,65) = 44$$

$$2m \sqrt{L} \sqrt{x} = 0,399 \approx 0,4 \quad I_1(0,4) = 0,204$$

$$T = T_0 \sqrt{\frac{0,02}{10^{-4}}} \cdot \frac{I_1(0,4)}{I_1(5,65)} = 6,42.$$

La aleta en este punto enfría y la eficacia

b)

$$I_2(5,65) = I_0(5,65) - \frac{2}{5,65} I_1(5,65) = 32,5$$

$$\eta = \frac{2 \cdot 32,5}{5,65 \cdot 44} = 0,52$$

c) $q = 612 \text{ (Kcal/h)}$

A 5 mm del vértice la temperatura vale

$$2m \sqrt{L} \sqrt{x} = 2 \cdot 141,4 \cdot \sqrt{0,02} \sqrt{0,005} = 2,82$$

$$I_1(2,82) = 3,3$$

$$T = 50 \sqrt{\frac{0,02}{0,005}} \cdot \frac{3,3}{44} = 7,5(^{\circ}\text{C})$$

3,2-3,4. Protuberancias cónicas

La superficie lateral fig. 3,2-3(4) $S = \frac{2\Delta L}{2} \pi \frac{x}{L} x$

Area recta $A = \pi \left(\frac{\Delta L}{2} x / 2L \right)^2$

Un balance térmico en el elemento

$$k \left[\pi \left(\frac{\Delta z}{2} x \right)^2 \frac{dT}{dx^2} + \pi \Delta z x \frac{dT}{dx} \right] = \pi \Delta z x h T$$

6

$$x^2 \frac{dT}{dx^2} + 2x \frac{dT}{dx} = 2 m^2 L x T \quad (1)$$

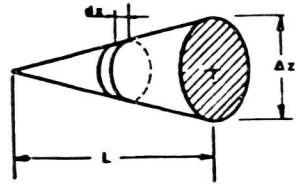


Fig. 3.2-3(4)

La solución de la ecuación (1) haciendo

$$2 m^2 L = N \quad \delta \quad N = \sqrt{2} m \sqrt{L} \quad \text{es}$$

$$T = x^{-1/2} [C_1 I_1(2N x^{1/2}) + C_2 K_1(2N x^{1/2})] \quad (2)$$

Con las condiciones $T = T_0$ en $x = L$ y $dT/dx = 0$ en $x = 0$, resulta $C_2 = 0$ y $C_1 = T_0 \sqrt{L} / I_1(2N \sqrt{L})$ y finalmente

$$T = T_0 \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} \frac{I_1(2N \sqrt{x})}{I_1(2N \sqrt{L})} \quad (3)$$

El calor q transmitido por la protuberancia

$$q = \pi h \Delta z \int_0^L \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} \frac{I_1(2N \sqrt{x})}{I_1(2N \sqrt{L})} T_0 dx = \pi h \Delta z \frac{\sqrt{L}}{N} \frac{I_2(2N \sqrt{L})}{I_1(2N \sqrt{L})}$$

Sustituyendo el valor de N

$$q = \frac{\pi h \Delta z I_2(2\sqrt{2} m L) T_0}{\sqrt{2} m I_1(2\sqrt{2} m L)} \quad (4)$$

y la eficacia

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{q}{\pi \frac{\Delta z}{2} h L T_0} = \frac{2 I_2(2\sqrt{2} m L)}{\sqrt{2} m L I_1(2\sqrt{2} m L)} \quad (5)$$

Perfil óptimo

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta z}{2} \right)^2 L$$

La condición de mínimo es $dq/dL = 0$

$$M = 2\sqrt{2} m L$$

$$\frac{d}{dM} \left[\frac{1}{M^{1/2}} \frac{I_2(M)}{I_1(M)} \right] = 0$$

Haciendo operaciones y teniendo en cuenta las ecuaciones de recurrencia (Apéndice I) resulta

$$\frac{q}{4M} I_1(M) = I_0(M) \quad (6)$$

cuya solución es $M \approx 1$

$$(L)_{OP} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{k \Delta z}{m}} = 0,25 \sqrt{\frac{k \Delta z}{h}} \quad (7)$$

3,2-3,5. Protuberancias parabólico cóncavas

Superficie lateral Fig. 3,2-3(5)

$$S = 2\pi \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 x$$

$$\text{Area recta } A = \pi \left(\frac{\Delta z}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^4$$

El balance térmico en el elemento

$$\pi k \left(\frac{\Delta z}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{L^4} x^4 \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{4}{L^4} x^3 \frac{dT}{dx} \right] = 2\pi h \left(\frac{\Delta z}{2}\right) \left(\frac{x}{L}\right)^2 T$$

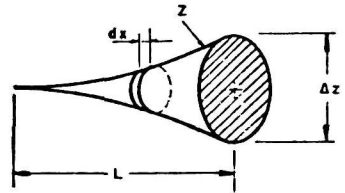


Fig. 3.2-3(5)

o

$$x^4 \frac{d^2 T}{dx^2} + 4x^3 \frac{dT}{dx} = \frac{4h}{\Delta z k} L^2 x^2 T \quad (1)$$

$$\text{siendo } N^2 = \frac{4h}{k \Delta z} L^2 ; \quad N = \sqrt{2} mL$$

La ecuación (1) tiene la solución

$$T = T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{P_1} ; \quad P_1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{q + 4N^2} \quad (2)$$

El calor transmitido por la protuberancia

$$q = 2\pi h \int_0^L \left(\frac{\Delta z}{2}\right) T_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{P_1} dx = \pi h T_0 \frac{\Delta z}{L^{P_1+2}} \frac{L^{P_1+3}}{P_1+3} = \frac{2\pi h \Delta z L}{3 + \sqrt{q + 4N^2}}$$

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{q} m^2 L^2}} \quad (4)$$

Perfil óptimo

Volumen

$$V = \int_0^L \pi \left(\frac{\Delta T}{2} \right)^2 \left(\frac{x}{L} \right)^4 dx = \frac{\pi}{20} \Delta T^2 L$$

Condición de mínimo

$$\frac{dq}{dL} = 0 \quad q = 2\pi h T_0 \sqrt{\frac{20 \cdot V}{\pi}} \frac{L^{1/2}}{3 + \sqrt{q + 4N^2}}$$

$$N^2 = \frac{4h}{\Delta T k} L^2 = \frac{4h}{k} L^{5/2} \sqrt{\frac{\pi}{20 \cdot V}}$$

Sustituyendo en (7) resulta

$$\frac{d}{dN} \left(\frac{N^{4/10}}{3 + \sqrt{q + 4N^2}} \right) = 0$$

cuya solución es $N = 2$ y finalmente

$$(L)_{op} = \sqrt{\frac{\Delta T k}{h}}$$

3,2-3,6. Protuberancias parabólicas convexas

Superficie lateral, Fig. 3,2-3,6,

$$S = 2\pi \left(\frac{\Delta T}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} dx$$

Area recta

$$A = \pi \left[\frac{\Delta T}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} \right]^2$$

Balance térmico en un elemento

$$\pi k \left(\frac{\Delta T}{2} \right)^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{L} \frac{dT}{dx} \right] = 2\pi \frac{\Delta T}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} h T$$

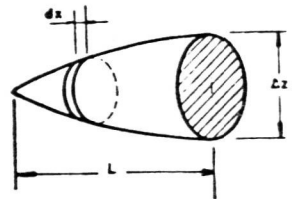


Fig. 3.2-3(6)

6

$$x \frac{dT}{dx^2} + \frac{dT}{dx} = N^2 \sqrt{x} T \quad (1)$$

siendo $N = (2m^2 \sqrt{L})^{1/2}$ y $m = \sqrt{\frac{2h}{k \Delta z}}$

La solución de la ecuación (1) Apéndice (I)

$$T = C_1 I_0 \left(\frac{4}{3} N x^{3/4} \right) + C_2 K_0 \left(\frac{4}{3} N x^{3/4} \right) \quad (2)$$

con las condiciones $T = T_0$ en $x = L$ y $\frac{dT}{dx} = 0$ en $x = 0$
 y $C_2 = 0$ $C_1 = T_0 / I_0 \left(\frac{4}{3} N L^{3/4} \right)$

$$T = T_0 \frac{I_0 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m (L x^3)^{1/4} \right)}{I_0 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m L \right)} \quad (3)$$

y la cantidad de calor q

$$q = 2\pi \frac{\Delta z}{2} h \int_0^L \left(\frac{x}{L} \right)^{1/2} T dx = \frac{3\pi \Delta z h T_0 I_1 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m L \right)}{2\sqrt{2} m L I_0 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m L \right)} \quad (4)$$

y la eficacia

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{6}{4\sqrt{2}} \frac{I_1 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m L \right)}{I_0 \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} m L \right) \cdot m L} \quad (5)$$

Perfil óptimo

$$\text{Volumen} = \pi \int_0^L \left(\frac{\Delta z}{2} \right)^2 \frac{x}{L} dx = \frac{\pi}{8} \Delta z^2 L$$

$$M = \frac{4}{3} \sqrt{2} m L$$

Sustituyendo en la ecuación (4) y con la condición $dq/dL = 0$ resulta

$$\frac{d}{dM} \left[\frac{1}{M^{2/3}} \frac{I_1(M)}{I_0(M)} \right] = 0 \quad ; \quad I_0^2(M) = \frac{5}{3M} I_0(M) I_1(M) + I_1^2(M) \quad (6)$$

cuya solución es $M = 1,05$

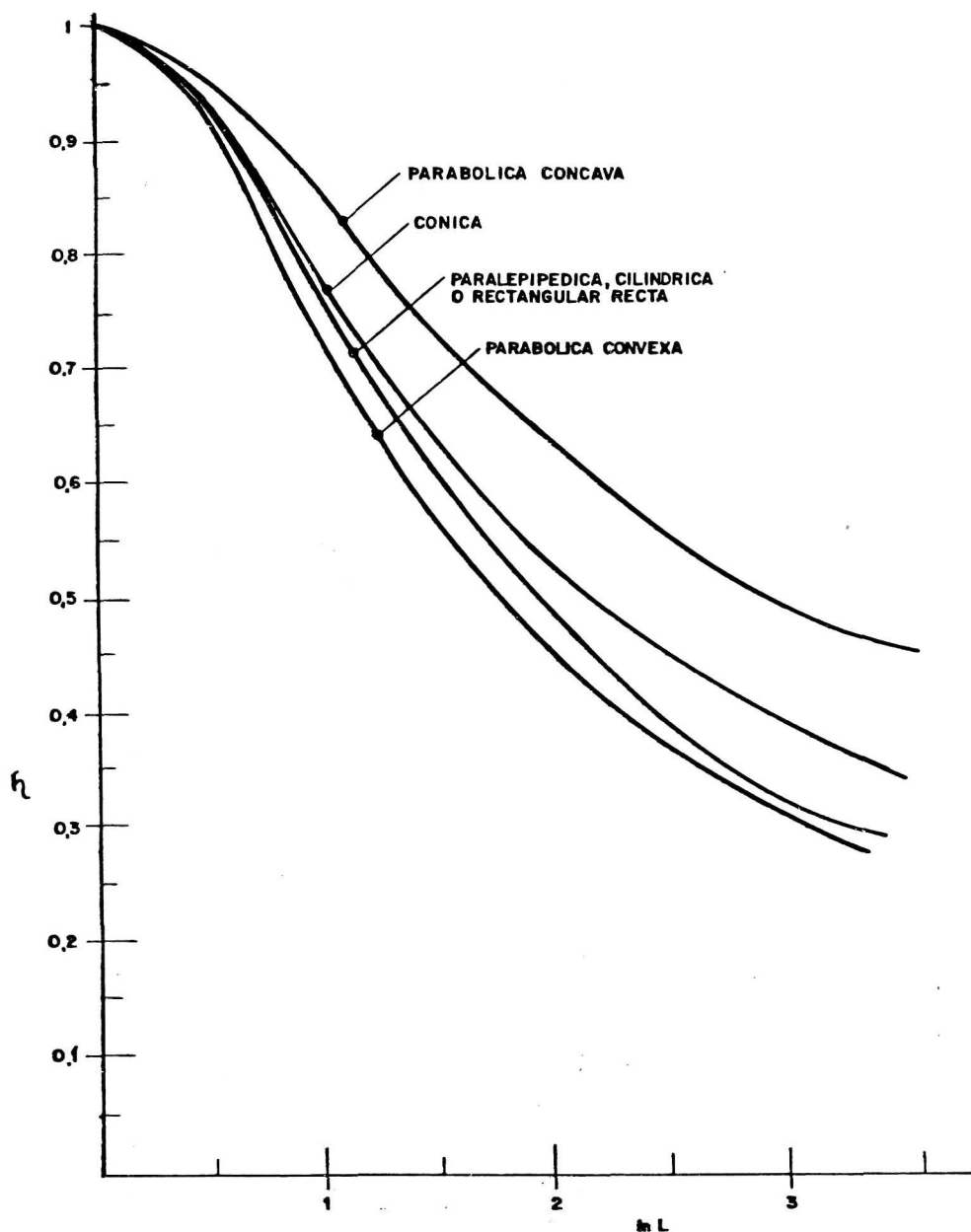
$$(L)_{op} = 0,393 \sqrt{\frac{k \Delta z}{h}}$$

TABLA 3,2-3

Eficacias de protuberancias sobre superficies

EFICACIAS

| mL | Paralelepípedica cilíndrica rectangular | Parabólica concava | Cónica | Parabólica convexa |
|-----|---|-----------------------|--------|-----------------------|
| 0,1 | 0,996 | 0,996 | 0,997 | 0,996 |
| 0,2 | 0,986 | 0,991 | 0,986 | 0,987 |
| 0,3 | 0,971 | 0,980 | 0,971 | 0,968 |
| 0,4 | 0,949 | 0,966 | 0,950 | 0,931 |
| 0,5 | 0,924 | 0,949 | 0,925 | 0,908 |
| 0,6 | 0,895 | 0,980 | 0,898 | 0,867 |
| 0,7 | 0,863 | 0,909 | 0,868 | 0,822 |
| 0,8 | 0,830 | 0,887 | 0,837 | 0,793 |
| 0,9 | 0,795 | 0,865 | 0,806 | 0,756 |
| 1,0 | 0,761 | 0,842 | 0,775 | 0,718 |
| 1,1 | 0,727 | 0,819 | 0,745 | 0,684 |
| 1,2 | 0,694 | 0,796 | 0,716 | 0,650 |
| 1,3 | 0,662 | 0,774 | 0,688 | 0,619 |
| 1,4 | 0,632 | 0,753 | 0,661 | 0,589 |
| 1,5 | 0,603 | 0,732 | 0,636 | 0,562 |
| 1,6 | 0,576 | 0,711 | 0,612 | 0,537 |
| 1,7 | 0,550 | 0,692 | 0,590 | 0,514 |
| 1,8 | 0,526 | 0,673 | 0,568 | 0,492 |
| 1,9 | 0,503 | 0,655 | 0,548 | 0,471 |
| 2,0 | 0,482 | 0,638 | 0,529 | 0,452 |
| 2,1 | 0,462 | 0,621 | 0,512 | 0,435 |
| 2,2 | 0,443 | 0,605 | 0,495 | 0,418 |
| 2,3 | 0,426 | 0,590 | 0,479 | 0,403 |
| 2,4 | 0,409 | 0,575 | 0,464 | 0,389 |
| 2,5 | 0,394 | 0,561 | 0,450 | 0,376 |
| 2,6 | 0,380 | 0,548 | 0,437 | 0,363 |
| 2,7 | 0,367 | 0,535 | 0,424 | 0,351 |
| 2,8 | 0,354 | 0,523 | 0,412 | 0,340 |
| 2,9 | 0,342 | 0,511 | 0,401 | 0,330 |
| 3,0 | 0,331 | 0,500 | 0,390 | 0,320 |
| 3,1 | 0,321 | 0,489 | 0,380 | 0,311 |
| 3,2 | 0,311 | 0,478 | 0,371 | 0,303 |
| 3,3 | 0,302 | 0,468 | 0,361 | 0,294 |
| 3,4 | 0,293 | 0,458 | 0,353 | 0,286 |
| 3,5 | 0,285 | 0,449 | 0,344 | 0,279 |



Gráfica 3.2-3. Eficacias de distintas protuberancias sobre superficies.

Tabla 3.2-3(A). Características de protuberancias,

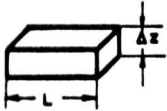
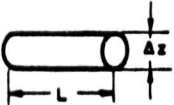
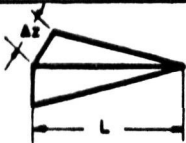
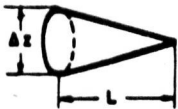
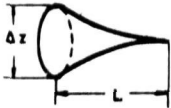
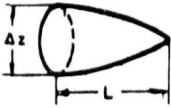
| Forma | Superficie S | Volumen V | Eficacia h | q (Kcal/h) | $(L)_{op}, (V = cte)$ |
|---|--|--|---|----------------------|---|
|  PARALELEPIPEDA CUADRADA | $4 \Delta z L + \Delta z^2$ $\approx 4 \Delta z L$ | $\Delta z^2 L$ | $\frac{t_g h \sqrt{2} mL}{\sqrt{2} mL}$ | $(T_0 - t) \eta s h$ | $\approx 0,75 \left(\frac{k}{h} v^{1/2} \right)^{2/5}$ |
|  CILINDRICA | $\pi \Delta z L + \pi \frac{\Delta z^2}{4}$ $\approx \pi \Delta z L$ | $\pi \frac{\Delta z^2}{4} L$ | $\frac{t_g h \sqrt{2} mL}{\sqrt{2} mL}$ | $(T_0 - t) \eta s h$ | $\approx 0,42 \left(\frac{k}{h} v^{1/2} \right)^{2/5}$ |
|  PIRAMIDAL CUADRADA | $\sqrt{L^2 + \frac{\Delta z^2}{4}} \cdot 2 \Delta z$ $\approx 2 \Delta z L$ | $\frac{\Delta z^2}{3} L$ | $\frac{4 I_2 (2 mL)}{2 mL I_1 (2 mL)}$ | $(T_0 - t) \eta s h$ | $0,48 \left(\frac{k}{h} v^{1/2} \right)^{2/5}$ |
|  CONICA | $\pi \frac{\Delta z}{2} L$ | $\pi \frac{\Delta z^2}{4} \frac{L}{3}$ | $\frac{4 I_2 (2 \sqrt{2} mL)}{2 \sqrt{2} mL I_1 (2 \sqrt{2} mL)}$ | $(T_0 - t) \eta s h$ | $0,43 \left(\frac{k}{h} v^{1/2} \right)^{2/5}$ |

Tabla 3.2-3(A).

| Forma | Superficie S | Volumen V | Eficacia η | q (k_{ent}/h) | $(L)_{op}, (V = cte)$ |
|---|---|--|---|------------------------|---|
|  PARABOLICA CONCAVA | $2\pi \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z}{L} x\right)^2} dx$ $\approx 2\pi \int_0^L \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx$ $= \frac{\pi}{3} \Delta z L$ | $\pi \int_0^L \left(\frac{\Delta z}{2}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^4 dx$ $= \frac{\pi}{20} \Delta z^2 L$ | $\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{9} m^2 L^2}}$ | $(T_o - t) \eta sh$ | $1,44 \left(\frac{k}{h} v^{1/2}\right)^{2/5}$ |
|  PARABOLICA CONVEXA | $2\pi \int_0^L \sqrt{1 + \frac{\Delta z^2}{4L^2} x^2} dx$ $\approx \int_0^L \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{1/2} dx$ $= \frac{2}{3} \pi \Delta z L$ | $\pi \int_0^L \left(\frac{\Delta z}{2}\right)^2 \frac{x}{L} dx$ $= \frac{\pi}{8} \Delta z^2 L$ | $\frac{2 I_0\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} mL\right)}{\frac{4}{3} \sqrt{2} mL I_0\left(\frac{4}{3} \sqrt{2} mL\right)}$ | $(T_o - t) \eta sh$ | $0,56 \left(\frac{k}{h} v^{1/2}\right)^{2/5}$ |

3.2-4. Acoplamiento de superficies extendidas

Las formas de aletas mencionadas anteriormente, se suelen disponer sobre placas o tubos formando un elemento con aletas. Estos elementos, se acoplan en serie o paralelo, constituyendo un intercambiador de calor con aletas. Son ejemplos conocidos: los intercambiadores compactos de los equipos de aire acondicionado, refrigeradores de agua en automóviles o elementos de calefacción doméstica. En equipos de mayor volumen, tales como, refrigeración de gas natural, equipos de fabricación de aire líquido, refrigeración de hidrocarburos líquidos, o torres de refrigeración tipo seco, entre otros, la superficie necesaria es elevada, y se acude a los acoplamientos de unidades, constituidas por un haz de tubos con aletas, en disposición cuadrada o tresbolillo tal como se

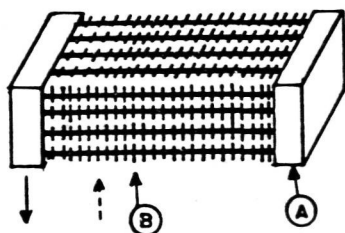


Fig. 3.2-4(1)

indica en la Fig. 3.2-4(1). El fluido a refrigerar (A) entra en el intercambiador por una de las cabezas o colectores y sale por la otra. El fluido refrigerante (B), atraviesa el haz de tubos en una determinada dirección fijada por el camino libre entre bloques de intercambiadores. Cuando se trata de unidades muy compactas, pueden acoplarse como se indica en las Figs. 3.2-4(2) (a) (b). Como puede observarse, los acoplamientos posibles son elevados.

Un aspecto importante, es la fijación de las aletas a la superficie base. Para aletas sobre tubos se distinguen: el tipo G, tipo L, tipo extruido, tipo fundido. En la Fig. 3.2-4(3) se indican los dos primeros. En el tipo G, las aletas se alojan en ranuras de 0,3-0,4 mm de profundidad,

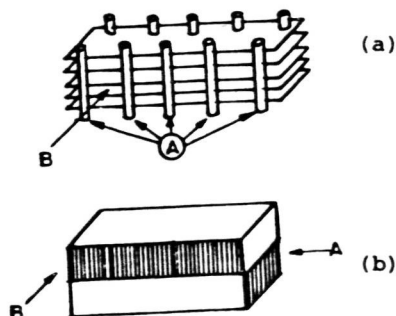
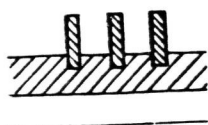
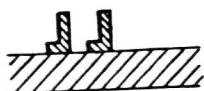


Fig. 3.2-4 (2)



TIPO G



TIPO L

Fig. 3.2-4(3)

y se colocan en posición mediante máquinas que presionan las aletas contra la base y ajustan dilatando los puntos de unión, o sueldan simultáneamente. El tipo L se hace por procedimientos análogos, y la unión con la base no es tan perfecta como en el tipo L. La extrusión se utiliza con aletas longitudinales y el elemento no presenta superficie de unión. Lo mismo sucede con los elementos de aletas obtenidos por fundición.

La resistencia térmica de contacto en los elementos de tipo G es del orden de $0,5 \cdot 10^{-5} \text{ (m}^2 \text{ } ^\circ\text{C/kcal)}$ y en los elementos de tipo L del orden de $2 \cdot 10^{-5} \text{ (m}^2 \text{ } ^\circ\text{C/kcal)}$. La temperatura de funcionamiento es importante en la elección del tipo de elementos, en el tipo G temperatura máxima es de 400°C mientras que en el tipo L es de 200°C debido a que el sistema de unión es menos rígido. Para temperaturas superiores, se acude a la preparación de aletas por mecanización de la base, aumentando notablemente el precio del elemento. Los elementos para temperaturas elevadas, tales como recalentadores para 600, 900 ó 1000°C se fabrican normalmente de aletas rectas y protuberancias paralelepípedicas o cilíndricas.

Desde el punto de vista de fabricación de elementos con aletas, para los tipos G, L y mecanizado sobre la base, suele preferirse la aleta recta, y para los elementos extruidos o fundidos, entre recta y triangular.

3.3. Transmisión de calor por conducción en dos dimensiones en régimen estacionario.

En el apartado 3,1 se han obtenido ecuaciones del campo de temperaturas y cantidades de calor en cuerpos de formas geométricas simples, admitiendo una de las dimensiones suficientemente grande, para obtener soluciones de temperaturas en una dirección, situación que se cumple en muchos elementos industriales, tales como, tuberías

paredes, etc. En el apartado 3.2, se ha considerado que la distribución de temperaturas es constante en los planos perpendiculares a la dirección del flujo de calor, lo que permite obtener soluciones a problemas de tanta importancia como son las aletas en distintos perfiles, y por extrapolación, a las protuberancias. Cuando las dimensiones lineales de una superficie son del mismo orden, como puede ser un rectángulo, la hipótesis de temperatura constante en secciones normales al flujo térmico no es válida, y hay que acudir a procedimientos que permitan obtener una solución correcta, bien por métodos, analíticos, numéricos o gráficos, pues no se debe olvidar que un problema industrial exige solución, bien sea aproximada o exacta.

El conocimiento de la distribución de temperaturas permite, de una parte, conocer el comportamiento mecánico de los materiales, aplicando los criterios de resistencia, y por otra parte, las cantidades de calor que se intercambian con el medio en que se encuentran los cuerpos. Aunque desde el punto de vista de resistencia de los materiales, son más importantes los fenómenos térmicos transitorios, que se estudian en el capítulo 3, el régimen estacionario, es importante en relación con la vida de los materiales por efectos de fenómenos acumulativos.

Las aplicaciones de la transmisión de calor en dos dimensiones, son muy numerosas por la frecuencia de secciones rectangulares, circulares, polígonos y estructuras más complejas. En todas ellas, la tercera dimensión es suficientemente grande frente a las dimensiones de la sección recta. Los casos de tres dimensiones son tratados en los apartados 3.3-4,5,6, no obstante, se hace incapie, en que pueden obtenerse soluciones tridimensionales, en cuerpos no cilíndricos o esféricos, con soluciones correctas en dos dimensiones, y aproximadas en la tercera dimensión.

3.3-1,1. *Rectángulo infinito*

Consideremos el rectángulo de la Fig. 3.3-1,1. En régimen estacionario se cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T = T(y) & x=0 & -\infty < y < +\infty \\ T = 0 & x=L_x & -\infty < y < +\infty \end{array} \quad (2)$$

Se define la transformada del seno de Fourier del campo de temperaturas $T(x, y)$ por la función (Apéndice I(2),

$$L_F^s[T(x, y)] \equiv f_F^s(x, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T(x, y) \sin(\eta, y) dy \quad (3)$$

y su inversión

$$T(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_F^s(x, \eta) \sin(\eta, y) d\eta \quad (4)$$

Si los términos de la ecuación (1) se multiplican por $\sin(\eta, y)$ y se integran con respecto a y se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sin(\eta, y) dy &= \frac{d^2 f_F^s(x, \eta)}{dx^2} \\ \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sin(\eta, y) dy &= \left[\frac{\partial T}{\partial y} \sin(\eta, y) \right]_0^\infty - \eta \int_0^\infty \frac{\partial T}{\partial y} \cos(\eta, y) dy = -\eta^2 f_F^s(x, \eta) \end{aligned}$$

si $T=0$ en $x=L_x$ y $-\infty < y < +\infty$

$$\frac{d^2 f_F^s(x, \eta)}{dx^2} - \eta^2 f_F^s(x, \eta) = 0 \quad (5)$$

Resolviendo (5) por transformadas de Laplace siendo $L[f_F^s(x, \eta)] \equiv f(s)$

$$f(s) [s^2 - A(\eta) s - B(\eta)] - \eta^2 f(s) = 0 \quad (6)$$

y por la inversión de (6)

$$f^{-1}(s) = f_F^s(x, \eta) = A(\eta) \cosh(\eta x) + \frac{B(\eta)}{\eta} \sinh(\eta x)$$

y con las condiciones (2)

$$f_F^s(x, \eta) = f_F^s(0, \eta) \left[\cosh(\eta x) - \frac{\cosh(L_x \eta) \sinh(\eta x)}{\sinh(L_x \eta)} \right] \quad (7)$$

De (4), (7) y (8)

$$T(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T(y) \sin(\eta, y) dy \int_0^{\infty} \frac{\sinh[(L-x)\eta]}{\sinh(L\eta)} \sin(y', \eta) d\eta \quad (9)$$

6

$$T(x, y) = \frac{1}{2L_x} \int_0^{\infty} T(y) \sin\left[\frac{\pi}{L_x}(L-x)\eta\right] \left[\frac{dy}{\cos\left[\frac{\pi}{L_x}(L-x)\eta\right] + \cosh\left[\frac{\pi}{L_x}(y'-y)\right]} - \frac{dy}{\cos\left[\frac{\pi}{L_x}(L-x)\eta\right] + \cosh\left[\frac{\pi}{L_x}(y'+y)\right]} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T(y) dy \int_0^{\infty} \frac{\sinh[(L-x)\eta]}{\sinh(L\eta)} \left(\cos[(y'-y)\eta] - \cos[(y'+y)\eta] \right) d\eta$$

y si

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} T(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(y'-y)\eta] d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} T(y) dy \int_0^{\infty} \cos[(y'-y)\eta] d\eta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} T(y) dy \int_0^{\infty} \cos[(y'+y)\eta] d\eta$$

$$T(x, y) = \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{\infty} T(y) \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \frac{dy}{\cos\left[\frac{\pi}{L_x}(L-x)\eta\right] + \cosh\left[\frac{\pi}{L_x}(y'-y)\right]} \quad (10)$$

3.3-1.2. Rectángulo semiinfinito (Fig. 3.3-1.2)

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < x < L_x \\ y > 0 \end{matrix} \quad (1)$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{array}{lll} T = T(x) & y = 0 & 0 < x < L_x \\ T = 0 & x = 0 & 0 < y \\ T = 0 & x = L_x & 0 < y \\ T = 0 & y = \infty & \end{array} \quad (2)$$

Aplicando la transformada finita del seno de Fourier (Apéndice I(2))

$$\bar{L}_F^S [T(x, y)] \equiv \bar{F}_F^S(\xi, y) = \int_0^{L_x} T(x, y) \sin(\xi, x) dx \quad (3)$$

con la inversión

$$T(x, y) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}_F^s(\xi, y) \sin(\xi x) \quad (4)$$

Aplicando la transformada anterior a (1)

$$\int_0^{L_x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sin(\xi x) dx = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \sin(\xi x) \right]_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial T}{\partial x} \xi \cos(\xi x) dx = \xi [T(0) - (-1)^m T(L_x)] - \xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, y)$$

y

$$\int_0^{L_x} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sin(\xi x) dx = \frac{d^2 \bar{f}_F^s(\xi, y)}{dy^2}$$

y la ecuación (1) se transforma, teniendo en cuenta (2)

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^s(\xi, y)}{dy^2} - \bar{f}_F^s(\xi, y) = 0 \quad (5)$$

Aplicando a (5) las transformadas de Laplace, siendo

$$f(s) = \int_0^{\infty} \exp(-sz) \bar{f}_F^s(\xi, y) dy ; \quad f(s) = A(\xi) \frac{s}{s^2 - \xi^2} + \frac{B(\xi)}{s^2 - \xi^2} \quad (6)$$

y por la inversión de (6)

$$f^{-1}(s) = \bar{f}_F^s(\xi, y) = A(\xi) \cosh(\xi y) + \frac{B(\xi)}{\xi} \sin(\xi y)$$

Para $y = \infty$ $\bar{f}_F^s(\xi, y) = 0$ $B(\xi) = -A(\xi) \cdot \xi$

Para $y = 0$ $\bar{f}_F^s(\xi, 0) = A(\xi) = \int_0^{L_x} T(x) \sin(\xi x) dx$

y finalmente de (4) y (6)

$$T(x, y) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m\pi y}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \int_0^{L_x} T(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx \quad (7)$$

Para $T = T_1$; $\int_0^{L_x} T_1 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx = T_1 \frac{L_x}{m\pi} [1 - \cos m\pi]$

$$T(x, y) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\left[-(2m+1)\pi y/L_x\right] \sin\left[(2m+1)\pi x/L_x\right]}{(2m+1)} \quad (8)$$

3.3-1.3. Rectángulo seminfinito con convección (Fig. 3.3-1.3)

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ y > 0 \end{array} \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T = T(x) & y = 0 & 0 < x < L_x \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 & x = 0 & 0 < y \\ \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} T & x = L_x & 0 < y \end{array} \quad (2)$$

Por la naturaleza de las condiciones, es adecuada la transformada finita del coseno de Fourier

$$\bar{L}_F^c [T(x, y)] \equiv \bar{T}_F^c(\xi, y) = \int_0^{L_x} T(x, y) \cos(\xi; x) dx \quad (3)$$

y su inversa

$$T(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + (h/k)^2)}{L_x (\xi_i^2 + (h/k)^2) + \frac{h}{k}} \bar{T}_F^c(\xi_i, y) \cos(\xi_i; x) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de la ecuación $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i; L_x) = \frac{h}{k} = a_1$

Aplicando la transformada finita de Fourier a la ecuación

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cos(\xi_i; x) dx &= \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\xi_i; x) \right]_0^{L_x} + \xi_i \int_0^{L_x} \frac{\partial T}{\partial x} \sin(\xi_i; x) dx \\ &= \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\xi_i; x) + \xi_i T(x) \cdot \sin(\xi_i; x) \right]_0^{L_x} - \xi_i^2 \int_0^{L_x} T(x) \cos(\xi_i; x) dx = -\xi_i^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, y) \end{aligned}$$

si $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ en $x = 0$ y $\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{h}{k} T = 0$ en $x = L_x$

$$\begin{aligned} \bar{L}_F^c \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] &= \frac{d^2 \bar{T}_F^c(\xi, y)}{dy^2} \\ \frac{d^2 \bar{T}_F^c(\xi, y)}{dy^2} - \xi_i^2 \bar{T}_F^c(\xi, y) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Resolviendo (5) por transformadas de Laplace donde $f(s) = L[\bar{T}_F^c(\xi, y)]$

y por las condiciones de (2) y $T=0$ para $y=\infty$

$$\bar{T}_F^c(\xi, y) = \bar{T}_F^c(\xi, 0) \exp(-\xi y) = \int_0^{L_x} \exp(-\xi y) T(x) \cos(\xi x) dx$$

y por (4)

$$T(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_i^2) \exp(-\xi_i y) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_i^2) + a_i]} \int_0^{L_x} T(x) \cos(\xi_i x) dx \quad (6)$$

Para $T(x) = T_1$

$$\int_0^{L_x} T_1 \cos(\xi_i x) dx = \frac{T_1}{\xi_i} \sin(\xi_i L_x) \quad \text{y si} \quad (\xi_i^2 + a_i^2) \sin(\xi_i L_x) = \frac{a_i \xi_i}{\cos(\xi_i L_x)}$$

(6) se transforma en

$$T(x, y) = 2T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \exp(\xi_i y)}{[L_x(\xi_i^2 + a_i^2) + a_i]} \frac{\cos(\xi_i x)}{\cos(\xi_i L_x)} \quad (7)$$

Ejemplo 3.3-1.4

La sección recta de una pared prismática tiene la forma que se indica en la Fig. 3.3-1.4 con las dimensiones $L_x = 1 \text{ m}$ y $L_y = 0,5 \text{ m}$

Calcular:

- La distribución de temperaturas en la sección si en el lado $y=0$ se mantiene una temperatura de 100°C y los restantes lados se encuentran a 0°C .
- Distribución de temperaturas si en $y=0$ $T=100^\circ\text{C}$ en $x=0$ $T=50^\circ\text{C}$ en $y=L_y$ y en $y=L_x$; $T=20^\circ\text{C}$

Solución:

- La ecuación de distribución de temperaturas es la ec. 3.1-4.2 (6)

$$T(x, y) = 127,3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi x]}{(2m+1)} \frac{\sinh[(0,5-y)(2m+1)\pi]}{\sinh[0,5\pi(2m+1)]}$$

y así por ejemplo para el punto del centro

$$T(0,5,0,25) = 127,3 \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2} \frac{\sinh(0,25\pi)}{\sinh(0,5\pi)} + \sin \frac{3\pi}{2} \frac{\sinh(3\pi \cdot 0,25)}{\sinh(3\pi \cdot 0,5)} \cdot \frac{1}{3} + \dots \right]$$

$$= 127,3 [0,377 - 0,0313 + 0,00393 - \dots] \approx 44,4^\circ\text{C}$$

- b) Por el principio de superposición y con base común de coordenadas $T(x,y) = T(x,y)$ (con 100°C en $y = 0$ y 0°C en los restantes lados) + $T(x,y)$ (40°C en $y = L_y$ y 0°C en los restantes lados) + $T(x,y)$ (50°C en $x = 0$ y $x = 0$ en los restantes) + $T(x,y)$ (20°C en $x = L_x$ y 0°C en los restantes).

Por la ecuación anterior 3.1-4.2(6)

$$T(x,y) = \frac{4}{L_x \xi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh[(L_y - y)\xi]}{\sinh(\xi L_y)} \left[100 \sin(\xi x) + 40 \sin(L_x - x) \right] + 70 \frac{\sinh[(L_x - x)\xi]}{\sinh(\xi L_x)} [\sin(\xi y) + \sin \xi (L_y - y)]$$

donde $\xi = (2m+1) \frac{\pi}{L_x}$

y para el punto $x = 0,5 \text{ m}$ e $y = 0,25$

$$T(x,y) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)} \frac{\sinh[(2m+1)0,25\pi]}{\sinh[(2m+1)0,5\pi]} \cdot (100 \sin[(2m+1)\frac{\pi}{2}] + 40 \sin(L_x - x)) +$$

$$+ 70 \frac{\sinh[(2m+1)\pi/2]}{\sinh[(2m+1)\pi]} \cdot (\sin[(2m+1)\frac{\pi}{2}] + \sin[(2m+1)0,25\pi]) \approx 92,5^\circ\text{C}$$

3.3-1.4. Rectángulo (Fig. 3.3-1.4)

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \end{matrix} \quad (1)$$

con las condiciones

$$T = T(x), \quad y = 0; \quad 0 < x < L_x; \quad T = 0, \quad y = L_y; \quad 0 < x < L_x$$

$$T = 0 \quad x = 0; \quad 0 < y < L_y; \quad T = 0 \quad x = L_x; \quad 0 < y < L_y \quad (2)$$

Aplicando la transformada finita del seno de Fourier como en el apartado 3.3-1.2 a los miembros de (1)

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^s(\xi, y)}{dy^2} = \xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, y) \quad (3)$$

Resolviendo (3) por transformadas de Laplace

$$\bar{f}_F^s(\xi, y) = A(\xi) \cosh(\xi y) + \frac{B(\xi)}{\xi} \sinh(\xi y) \quad (4)$$

y con las condiciones (2)

$$\bar{f}_F^s(\xi, y) = \bar{f}_F^s(\xi, 0) \frac{\sinh[(Ly-y)\xi]}{\sinh(\xi Ly)} \quad \xi = \frac{m\pi}{L_x}$$

y

$$T(x, y) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \frac{\sinh[(Ly-y)\xi]}{\sinh(\xi Ly)} \int_0^{L_x} T(x) \sin(\xi x) dx \quad (5)$$

Para $T(x) = T_1$

$$\int_0^{L_x} \sin(\xi x) dx = \frac{L_x}{m\pi} T_1 (1 - \cos m\pi) \quad \text{y} \quad T(x, y) = 0 \quad \text{para } m \text{ par}$$

$$T(x, y) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi x/L_x]}{(2m+1)} \frac{\sinh[(Ly-y)(2m+1)\pi/L_x]}{\sinh[(2m+1)\pi L_y/L_x]} \quad (6)$$

3.3-1.5. Rectángulo con convección y un lado aislado (Fig.3.3-1.5)

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \end{matrix} \quad (1)$$

con las condiciones

$$T = T(x) ; y=0 ; 0 < x < L_x ; T=0 ; y=L_y ; 0 < x < L_x$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x=0 \quad 0 < y < L_y ; \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} T = -a_1 T ; x=L_x ; \quad (2)$$

Aplicando la transformada finita del coseno de Fourier como en el apartado 3.3-1.3, a los miembros de (1)

$$\frac{d\bar{f}_F^c(\xi, \gamma)}{d\gamma^2} = \xi_i \bar{f}_F^c(\xi, \gamma) \quad (3)$$

Resolviendo (3) por transformadas de Laplace y con las condiciones de (2)

$$\bar{f}_F^c(\xi, \gamma) = \bar{f}_F^c(\xi, 0) \frac{\sinh[(Ly-\gamma)\xi_i]}{\sinh(\xi_i Ly)}$$

y sustituyendo en (3)

$$T(x, \gamma) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_i^2) \cos(\xi_i x) \sinh[(Ly-\gamma)\xi_i]}{[Lx(\xi_i^2 + a_i^2) + a_i] \sinh(\xi_i Ly)} \int_0^{Lx} T(x) \cos(\xi_i x) dx \quad (4)$$

siendo ξ_i las raíces de la ecuación $\xi_i \tanh(\xi_i Lx) = a_i$. Para

$$T = T_1$$

$$\int_0^{Lx} T(x) \cos(\xi_i x) dx = \frac{T_1}{\xi_i} \sinh(\xi_i L)$$

y

$$T(x, \gamma) = 2 a_i T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \sinh[(Ly-\gamma)\xi_i]}{[Lx(\xi_i^2 + a_i^2) + a_i] \cos(\xi_i Lx) \sinh(\xi_i Ly)} \quad (5)$$

3.3-1.6. Rectángulo con convección en dos lados y un lado aislado Fig. (3.3-1.6).

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 < x < Lx \\ 0 < y < Ly \end{array} \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la figura.

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier como en el apartado 3.3-1.5

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^c(\xi, \gamma)}{d\gamma^2} = \xi_i^2 \bar{f}_F^c(\xi, \gamma) \quad (2)$$

Resolviendo (2) por transformadas de Laplace y con las condiciones de contorno

$$\bar{f}_F^c(\xi, \gamma) = \bar{f}_F^c(\xi, 0) \frac{(\xi_i \cosh[(Ly-\gamma)\xi_i] + a_i \sinh[(Ly-\gamma)\xi_i])}{\xi_i \cosh(\xi_i Lx) + a_i \sinh(\xi_i Lx)} \quad (3)$$

y sustituyendo en (2)

$$T(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_1^2) \cos(\xi_i x) [\xi_i \cosh[(L_y - y)\xi_i] + a_1 \sinh[(L_y - y)\xi_i]}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] [\xi_i \cosh(\xi_i L_y) + a_1 \sinh(\xi_i L_y)]} \int_0^{L_x} T(x) \cos(\xi_i x) dx \quad (4)$$

y para $T(x) = T_1$

$$T(x, y) = 2 a_1 T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) [\xi_i \cosh[(L_y - y)\xi_i] + a_1 \sinh[(L_y - y)\xi_i]}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] [\xi_i \cosh(\xi_i L_y) + a_1 \sinh(\xi_i L_y)] \cos(\xi_i L_x)} \quad (5)$$

Ejemplo 3.3-1.6(a)

Los soportes de un equipo industrial tienen forma paralelepipédica con una sección recta $2L_x = 0,4 \text{ m}$ y $L_y = 0,6 \text{ m}$ véase Fig. (3.3-1.6). En determinadas condiciones el lado $2L_x$ en $y = 0$ alcanza una temperatura de 200°C y los restantes lados pierden calor por radiación y convección a un medio a 0°C . El material del soporte puede considerarse como homogéneo con una conductividad térmica de $3 \text{ (Kcal/h m }^\circ\text{C)}$ y los coeficientes de convección-radiación toman valores de $6 \text{ (Kcal/h m}^2\text{ }^\circ\text{C)}$ (mínimo) y $18 \text{ (Kcal/h m}^2\text{ }^\circ\text{C)}$ (máximo). Calcular para estos coeficientes:

- Temperaturas en los puntos $(0, L_y)$; (L_x, L_y) ; $(L_x, 0)$
- Calor perdido a través de los lados
- Eficacia térmica
- Comparar los resultados con los que se obtienen considerando el soporte como una aleta recta de pequeño espesor.

Solución:

- La distribución de temperaturas responde a la ec.3.3-1.6 (5) con temperatura constante $T(x) = T_1 = 200(^\circ\text{C})$

Las raíces de la ecuación $L_x \xi_i \tanh(L_x \xi_i) = L_x \frac{h}{k}$

Apéndice I, tabla 1,3(5)

Para $h = 6 \text{ (kcal/h m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$ $L_x a_1 = 0,4$

$$\xi_1 = 2,965 \quad \xi_2 = 16,3 \quad \xi_3 = 31,7 \quad \xi_4 = 47,3 \quad \xi_5 = 62,9$$

Para $h = 18 \text{ (kcal/h m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$

$$\xi_1 = 4,54 \quad \xi_2 = 17,3 \quad \xi_3 = 32,2 \quad \xi_4 = 47,65 \quad \xi_5 = 63,2$$

Aplicando la ec. 3.3-1.6(5) con $T_1 = 200 \text{ (}^\circ\text{C)}$

| a_1 | $T(0, L_y) \text{ (}^\circ\text{C)}$ | $T(L_x, L_y) \text{ (}^\circ\text{C)}$ | $T(L_x, 0) \text{ (}^\circ\text{C)}$ |
|-------|--------------------------------------|--|--------------------------------------|
| 2 | 43 | 35 | 200 |
| 6 | 12,9 | 7,8 | 200 |

- b) La cantidad de calor por unidad de altura $q_{1/2} \text{ (kcal/h m)}$ teniendo en cuenta la simetría de la figura

$$\frac{q}{2} = 2h \left[\int_0^{L_x} T(x, L_y) dx + \int_0^{L_y} T(L_x, y) dy \right]$$

$$\frac{q}{2} = -2k \int_0^{L_x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx$$

y realizando la integración resulta

$$\frac{q}{2} = 4hT_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_2(\xi_i L_x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1]} = 4a_1^2 k T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_i [L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1]}$$

para $a_1 = 2$ $q_{1/2} = 750 \text{ (kcal/h m)}$

$a_1 = 6$ $q_{1/2} = 1175 \text{ (kcal/h m)}$

c) Si $\eta = \frac{q_{1/2}}{(q_{1/2})_0} = \frac{q_{1/2}}{(2L_x + 2L_y)h \Delta T}$

para $a_1 = 2$ $\eta = 750/1920 = 0,39$

$a_1 = 6$ $\eta = 1175/5760 = 0,20$

- d) Si se considera con pérdida de calor en $L_y = y$ de la ec. 3.2-1.1(5)

$$\eta = \frac{2 L_x m k}{2 (h L_y + L_x)} \left(\frac{t_g h (m L_y) + a_1 / m}{1 + \frac{a_1}{m} t_g (m L_y)} \right) \quad \text{donde } m = \sqrt{\frac{a_1}{L_x}}$$

Para $a_1 = 2$ $\eta = 0.49$

Para $a_1 = 6$ $\eta = 0.29$

Ejemplo 3.3-1.6(a)

Una pared prismática de valores $L_x = 0.5 \text{ m}$ y $L_y = 2 \text{ m}$ tiene los lados $x = 0$ y $y = L_y$ aislados. Fig. 3.3-1.6(a). En el lado $x = L_x$ se pierde calor por convección-radiación con un valor de $h = 16 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$ a un medio a 20°C . La conductividad térmica del material es de $2 \text{ (Kcal/h.m}^\circ\text{C)}$. Calcular la cantidad de calor que se pierde en los siguientes casos:

a) En $y = 0$, $T = 100^\circ\text{C}$

b) Variación de temperatura lineal en $y = 0$; $T = 0$ en $x = 0$; y $T = 100^\circ\text{C}$ en $x = L_x$.

Solución:

a) La pérdida de calor por unidad de altura vale

$$q = -k \int_0^{L_x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx$$

derivando la ecuación 3.6-1.6(a) en $y = 0$ y $T_1 = 100^\circ\text{C}$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -2 a_1 \cdot 80 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i \cos(\xi_i x) \operatorname{ctg} h(\xi_i L_y)}{[L_x (\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] \cos(\xi_i L_x)}$$

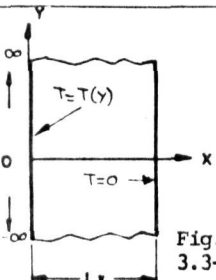
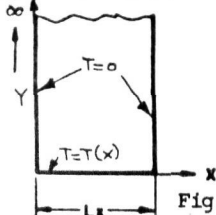
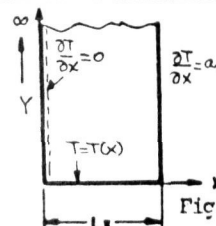
y por integración entre L_x y 0 y teniendo en cuenta $a_1 = 8$

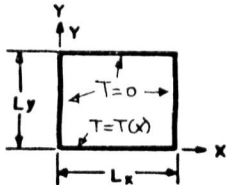
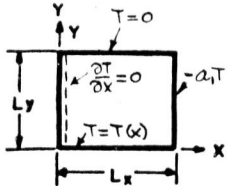
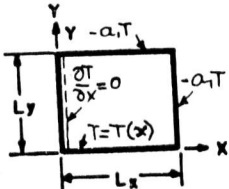
$$\frac{q}{2} = 160 k a_1^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} h(\xi_i L_y)}{\xi_i [L_x (\xi_i^2 + a_1^2) + a_1]} = 29 \text{ (Kcal/h.m)}$$

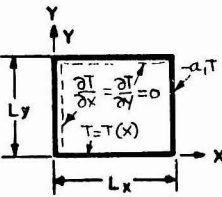
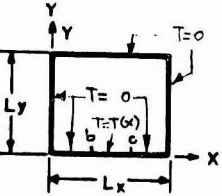
Las raíces son $\xi_1 = 2.52$, $\xi_2 = 7.86$, $\xi_3 = 13.62$, $\xi_4 = 19.62$, $\xi_5 = 25.72$

$$b) \int_0^{L_x} 100 \cdot \frac{x}{L_x} \cdot \cos(\xi_i x) dx = \frac{100}{L_x} \left[\frac{\cos(\xi_i x)}{\xi_i^2} + x \frac{\sin(\xi_i x)}{\xi_i} \right]_0^{L_x}$$

Tabla 3.3-1. Distribución de temperaturas en secciones rectangulares.

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|--|---|--|
|  <p>Fig. 3.3-1.1. Rectángulo infinito</p> | $T = T(y) \text{ en } \begin{matrix} X=0 \\ -\infty < Y < +\infty \end{matrix}$ $T=0 \text{ en } \begin{matrix} X=L_x \\ -\infty < Y < +\infty \end{matrix}$ | $T(x,y) = \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{\infty} T(y) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \frac{dy}{\cos\left[\frac{\pi}{L_x}(L_x - x)\right] + \cosh\left[\frac{\pi}{L_x}(y - y')\right]}$ |
|  <p>Fig. 3.3-1.2. Rectángulo semiinfinito</p> | $T = T(x) \text{ en } \begin{matrix} Y=0 \\ 0 < X < L_x \end{matrix}$ $T=0 \text{ en } \begin{matrix} X=0; Y=0 \\ X=L_x; Y>0 \\ Y=\infty \end{matrix}$ | $T(x,y) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cdot \exp\left(-\frac{m\pi}{L_x} y\right) \int_0^{L_x} T(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx$ y si $T(x) = T_1$ $T(x,y) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\left[-(2m+1)\frac{\pi y}{L_x}\right] \cdot \operatorname{sen}\left[(2m+1)\frac{\pi x}{L_x}\right]}{(2m+1)}$ |
|  <p>Fig. 3.3-1.3. Rectángulo semiinfinito con convección.</p> | $T = T(x) \text{ en } \begin{matrix} Y=0 \\ 0 < X < L_x \end{matrix}$ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ en } \begin{matrix} X=0 \\ Y>0 \end{matrix}$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} T = a_1; \begin{matrix} X=L_x \\ Y>0 \end{matrix}$ | $T(x,y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_1^2) \exp(-\xi_i y) \cos(\xi_i x)}{L_x (\xi_i^2 + a_1^2) + a_1} \int_0^{L_x} T(x) \cos(\xi_i x) dx$ ξ_i , raíces de $\xi_i \tanh(\xi_i L_x) = a_1$, si $T(x) = T_1$ $T(x,y) = 2T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_1 \exp(\xi_i y) \cos(\xi_i x)}{[L_x (\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] \cos(\xi_i L_x)}$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|--|---|
|  | $T = T(x) \quad \text{en} \quad \begin{matrix} y=0 \\ 0 < x < L_x \end{matrix}$ $T = 0 \quad \text{en} \quad \begin{matrix} y = L_y \\ 0 < x < L_x \\ x = 0 \\ 0 < y < L_y \\ x = L_x \\ 0 < y < L_y \end{matrix}$ | $T(x, y) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sinh\left[\frac{(L_y - y)\frac{\pi m}{L_x}}{\sinh\left(\pi m \frac{L_y}{L_x}\right)}\right] \int_0^{L_x} T(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx}{\sinh\left(\pi m \frac{L_y}{L_x}\right)}$ para $T(x) = T_1$ $T(x, y) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2m+1)\pi x}{L_x}\right] \sinh\left[\frac{(L_y - y)\frac{\pi(2m+1)}{L_x}}{\sinh\left[(2m+1)\pi \frac{L_y}{L_x}\right]}\right]}{(2m+1)}$ |
|  | $T = T(x) \quad y=0; 0 < x < L_x$ $T = 0 \quad y = L_y; 0 < x < L_x$ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x=0; 0 < y < L_y$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} T = a_1 T \quad x = L_x; 0 < y < L_y$ | $T(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_1^2) \cos(\xi_i x) \sinh[(L_y - y)\xi_i]}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] \sinh(L_y \xi_i)} \int_0^{L_x} T(x) \cos(\xi_i x) dx$ Para $T(x) = T_1$ $T(x, y) = 2a_1 T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \sinh[(L_y - y)\xi_i]}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] \cosh(\xi_i L_x) \sinh(\xi_i L_y)}$ |
|  | $T = T(x) \quad y=0; 0 < x < L_x$ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x=0; 0 < y < L_y$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} T \quad x = L_x; 0 < y < L_y$ $\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{h}{k} T \quad y = L_y; 0 < x < L_x$ $\frac{h}{k} = a_1$ | $T(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_1^2) \cos(\xi_i x) \sinh[(L_y - y)\xi_i]}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] [\xi_i \cosh(\xi_i L_y) + a_1 \sinh(\xi_i L_y)]} \int_0^{L_x} T(x) \cos(\xi_i x) dx$ Para $T = T_1$ $T(x, y) = 2a_1 T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \sinh[(L_y - y)\xi_i]}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] [\xi_i \cosh(\xi_i L_y) + a_1 \sinh(\xi_i L_y)] \cos(\xi_i L_x)}$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|---|--|
|  <p>(a)</p> | $T = T(x), \quad y=0, \quad 0 < x < L_x$ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x=0; \quad 0 < y < L_y$ $\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y=L_y; \quad 0 < x < L_x$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{k} T_1, \quad x=L_x, \quad 0 < y < L_y$ | $T(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + \alpha_i^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + \alpha_i^2) + \alpha_i]} \frac{\cosh[(L_y - y)\xi_i]}{\cosh(L_y \xi_i)} \int_0^{L_x} T(x) \cos(\xi_i x) dx$ <p>Si $T(x) = T_1$</p> $T(x, y) = 2 \alpha_1 T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{[L_x(\xi_i^2 + \alpha_i^2) + \alpha_i]} \frac{\cos(\xi_i x) \cosh[(L_y - y)\xi_i]}{\cosh(\xi_i L_y) \cos(\xi_i L_x)}$ |
|  <p>(b)</p> | $T = T(x), \quad y=0, \quad b < x < c$ $T=0, \quad y=0, \quad 0 < x < b$ $T=0, \quad y=0, \quad c < x < L_x$ $T=0, \quad x=0; \quad 0 < y < L_y$ $T=0, \quad x=L_x; \quad 0 < y < L_y$ $T=0, \quad y=L_y; \quad 0 < x < L_x$ | $T(x, y) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/L_x) \sinh[(L_y - y)m\pi/L_y]}{\sinh(\pi m L_y/L_x)} \int_b^c T(x, 0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx$ <p>Si $T(x) = T_1$</p> $T(x, y) = 2 \frac{T_1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cdot \frac{1}{m} \frac{\sinh[(L_y - y)m\pi/L_y]}{\sinh(\pi m L_y/L_x)} [\cos\left(\frac{m\pi c}{L_x}\right) - \cos\left(\frac{m\pi b}{L_x}\right)]$ |
| | | |

y por la ecuación 3.6-1.6(a) resulta

$$T(x,y) = \frac{200}{Lx} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\cos(\xi_i Lx)(1+a_i Lx)-1] \cos(\xi_i Lx)}{[Lx(\xi_i^2 + a_i^2) + a_i]} \frac{\cosh[(Ly-y)\xi_i]}{\cosh[\xi_i Ly]}$$

Hallando $(\partial T / \partial y)_{y=0}$ e integrando respecto a x entre Lx y ce ro resulta

$$T(x,y) = \frac{200}{Lx} k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\cos(\xi_i Lx) \cdot (1+a_i Lx)-1] \sin(\xi_i Lx)}{\xi_i [Lx(\xi_i^2 + a_i^2) + a_i]} \tanh(\xi_i Ly)$$

Utilizando las raíces del apartado a) resulta

$$\frac{q}{L} = 9,14 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}} \right)$$

3.3-2. Distribución de temperaturas en el campo complejo

En los apartados anteriores se ha visto que la temperatura en el plano x,y está representada por $T(x,y)$. Se trata de hallar la distribución de temperaturas equivalente en el plano complejo, y la forma de pasar las soluciones de uno a otro plano, para lograr resolver los problemas térmicos, que presentan solución difícil en uno de los planos, al plano correspondiente, en el cual, la solución del problema es más fácil.

Recordemos, que el plano x,y y el plano complejo z , están ligados por $z = x + iy$ donde x e y son una pareja ordenada de números reales. Análogamente, un número complejo en forma polar, puede escribirse $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Así pues, la transformación del plano x,y en el plano complejo es simple. Consideremos las propiedades de una transformación del campo z , en otro campo $w(z) = f(z) = u + iv = f(x + iy)$

Si $f(z)$ es analítica en el plano z , $f'(z) \neq 0$ se cumple

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z) \quad (1)$$

$$y \quad \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = i f'(z) \quad (2)$$

es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) se conocen como relaciones de Cauchy-Riemann. Multiplicando miembro a miembro (3) y (4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

en todo punto (x, y) la tangente a la curva $u(x, y) = C_1$, es perpendicular a la tangente a la curva $v(x, y) = C_2$, y las curvas $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en un punto x, y son ortogonales.

$$\text{Si } w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

y

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (7)$$

Derivando las ecuaciones (1) y (2) se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \gamma \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

luego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

y análogamente

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

es decir, (8) y (9) cumplen la ecuación de Laplace, y se denominan funciones armónicas en una región del plano z . Las funciones u y v se llaman funciones conjugadas, y puede hallarse una de ellas a partir de la otra con una constante aditiva.

La distribución de temperaturas, en dos dimensiones, régimen estacionario, y sin generación de calor, cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

La temperatura es pues una función armónica en el plano z . La solución general de la ecuación de Laplace es $T(z) = T(x,y) + i T_A(x,y)$ donde, $T(x,y)$ corresponde a la parte real, y $T_A(x,y)$ a la parte imaginaria.

Las líneas $T(x,y)$ son *isotérmicas* y las líneas $T_A(x,y)$ *adiabáticas* y de acuerdo con las ecuaciones (3) y (4), se cortan perpendicularmente en el punto común a ambas.

Si la ecuación (10), se cumple en el plano z , se trata de ver, si se cumple en el plano ω , definido por $\omega = f(z) = u + iv$ si $f(z)$ es analítica y $f'(z) \neq 0$ $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$ y $T(x,y)$ es armónica en ω , se obtiene

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \quad (11)$$

La ecuación (11) se deduce considerando

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Hallando las derivadas segundas resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial T}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &+ 2 \frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (3), (4) y (6), (7) resulta:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = |f'(z)|^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \right) \quad (12)$$

y si $f'(z) \neq 0$ se cumple la ecuación (11).

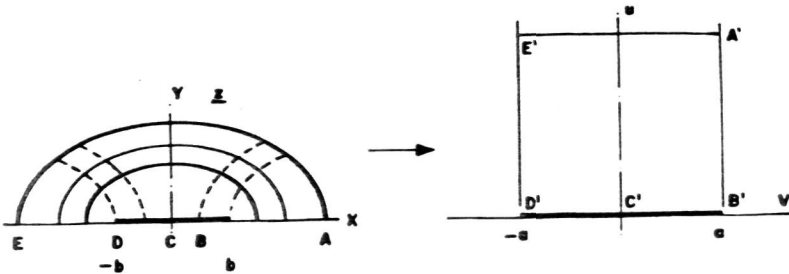
De las consideraciones anteriores, se desprenden dos tipos importantes de aplicaciones en la transmisión de calor en dos di-

mensiones y régimen estacionario:

- a) Las soluciones $T(x,y)$ pueden transportarse al plano w , obteniéndose $T(u,v)$ y recíprocamente teniendo en cuenta la transformación $w = f(z) = f(x+iy) = u+iv$ y la correspondencia de las condiciones de contorno en los planos z y w .
- b) A partir de la temperatura en el campo complejo, pueden determinarse los flujos térmicos, que son perpendiculares a las líneas isotérmicas, y tangenciales a las líneas adiabáticas.

Transformaciones conformes

a) Fig. 3.3-2(a)



Si $w = f(z) = \frac{2a}{\pi} \operatorname{arcsen}\left(\frac{z}{b}\right)$ $z = b \sin\left(\frac{\pi w}{2a}\right)$

y $w = u + iv = \frac{2a}{i\pi} \log\left[\frac{iz}{b} - \sqrt{1 - (z/b)^2}\right]$

donde

$$u = \frac{2a}{\pi} \operatorname{arcsen} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + 1 \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + 1 \right)^2 - 4 \left(\frac{x}{b} \right)^2} \right]^{1/2}$$

$$v = \frac{2a}{\pi} \operatorname{arg} \sinh \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 - 1 \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left[\left(\left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 - 1 \right)^2 - 4 \left(\frac{y}{b} \right)^2} \right]^{1/2}}$$

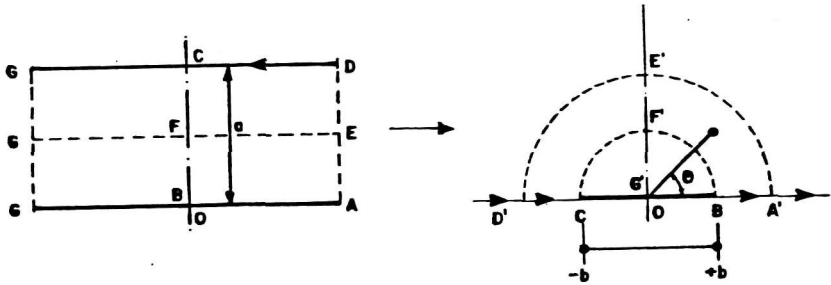
y $x = b \sin\left(\frac{\pi u}{2a}\right) \cosh\left(\frac{\pi v}{2a}\right)$; $y = b \cos\left(\frac{\pi u}{2a}\right) \sinh\left(\frac{\pi v}{2a}\right)$

Las curvas del plano z que corresponden a las líneas son elipses $\frac{x^2}{\cosh^2(\frac{\pi u}{2a})} + \frac{y^2}{\sinh^2(\frac{\pi v}{2a})} = 1$

y las curvas correspondientes a $v = \text{cte}$ son hipérbolas

$$\frac{x^2}{\sinh^2(\frac{\pi u}{2a})} - \frac{y^2}{\cosh^2(\frac{\pi v}{2a})} = 1$$

b) Fig. 3.3-2(b)



$$w = f(z) = b \exp\left(\frac{\pi z}{a}\right) = u + iv$$

$$z = \frac{a}{\pi} \ln\left(\frac{w}{b}\right) = x + iy$$

$$u = b \exp\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$v = b \exp\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

$$x = \frac{a}{\pi} \ln\left(\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{b^2}}\right) = \frac{a}{\pi} \log\left(\frac{r}{b}\right)$$

$$y = \frac{a}{\pi} \arctg\left(\frac{v}{u}\right) = \left(\frac{b}{\pi}\right) \theta$$

Transformación de polígonos

Las secciones poligonales y sus modificaciones tales como paredes en ángulo recto, ensanchamientos, estrechamientos o curvaturas diversas son frecuentes en instalaciones industriales, y la solución de los problemas térmicos bidimensionales, en régimen estacionario, puede lograrse, por las conocidas transformaciones de Christoffel-Schwarz, que trasladan la figura geométrica, al semiplano positivo del campo w , en el cual, puede obte-

nerse la distribución de temperaturas, con las correspondientes condiciones de contorno.

Un polígono de vértices z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 con ángulos internos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ Fig. 3.3-2(c) se transforma en puntos del eje real del plano w Fig. 3.3-2.2(c) por la ecuación

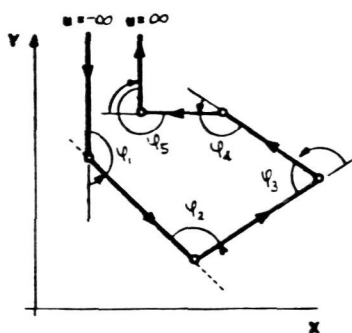
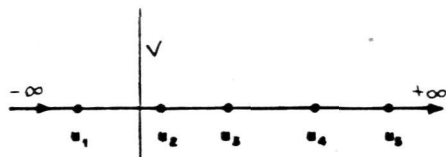


Fig. 3.3-2.2(c)



$$dz/dw = A (w-u_1)^{\frac{\varphi_1}{\pi}-1} (w-u_2)^{\frac{\varphi_2}{\pi}-1} \dots (w-u_5)^{\frac{\varphi_5}{\pi}-1} \quad (1)$$

6

$$z = A \int (w-u_1)^{\frac{\varphi_1}{\pi}-1} \dots (w-u_5)^{\frac{\varphi_5}{\pi}-1} dw + B \quad (2)$$

donde A y B son constantes complejas. B es el punto del plano z que corresponde al origen del semiplano, es decir $w=0$. En efecto, de la ecuación (1) se tiene

$$\arg dz = \arg dw + \arg A + \left(\frac{\varphi_1}{\pi}-1\right) \arg(w-u_1) + \dots \quad (3)$$

Cuando en el plano z se va hacia z_1 en el plano w se corresponde desde $-\infty$ hacia u_1 . En el paso de u_1 , el argumento θ en el plano w pasa de π a cero, y el argumento dz en el plano z disminuye en $\left(\frac{\varphi_1}{\pi}-1\right) \arg(w-u_1) = \left(\frac{\varphi_1}{\pi}-1\right) \pi = \varphi_1 - \pi$ es decir, crece en la dirección positiva $(\pi - \varphi_1)$. En el paso por z_1 y su correspondiente u_1 , los restantes miembros de la ecuación no se alteran, y así, durante el recorrido del polígono,

se produce la misma transformación en los puntos z_2, z_3, z_4, z_5 con sus ángulos $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ con respecto a los puntos u_2, u_3, u_4, u_5 del plano w .

La solución de la ecuación (2) puede hacerse eligiendo 3 puntos u_1, u_2 , y u_3 normalmente uno de ellos, u_5 , en el infinito, cumpliéndose

$$\frac{dz}{dw} = A(w-u_1)^{\frac{\varphi_1}{\pi}-1} \dots \left(\frac{u_5-w}{u_5}\right)^{\frac{\varphi_5}{\pi}-1} = A_1(w-u_1)^{\frac{\varphi_1}{\pi}-1} \dots (w-u_4)^{\frac{\varphi_4}{\pi}-1} \cdot 1 \quad (4)$$

Si el polígono contiene un vértice con $\varphi=0$ se trata de rectas paralelas y poniendo éste vértice en forma polar

$$w-u = \rho \exp(i\theta) \quad dw = i\rho \exp(i\theta) \quad y \quad si \quad \varphi=0$$

$$z = \int_0^\theta \frac{dw}{w} + B = iA\theta + B$$

y puesto que θ varía entre 0 y π para $u=\infty$ y $u=-\infty$ se tiene

$$z_{-\infty} - z_{\infty} = i\pi A$$

3.3-2.1. Sector circular

Se desea conocer la distribución de temperaturas del sector indicado en la Fig. 3.3-2.1(a) que satisface la ecuación

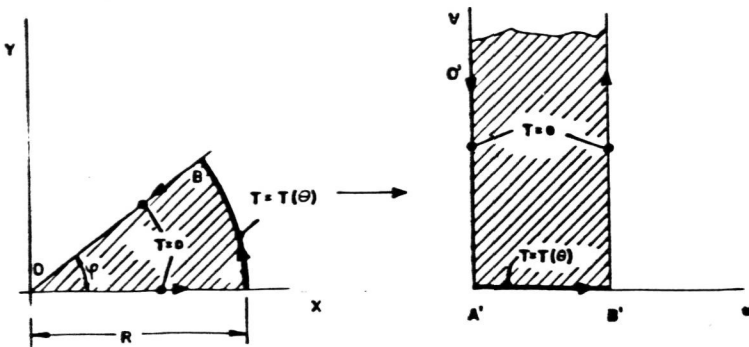


Fig. 3.3-2.1(a)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 < r < R \\ 0 < \theta < \varphi \end{array} \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T = 0 & \text{en} & \varphi = 0 \quad 0 < r < R \\ T = 0 & & \varphi = \theta \quad 0 < r < R \\ T = \varphi & & r = R \quad 0 < \theta < \varphi \end{array}$$

La transformación conforme adecuada para transformar el sector en rectángulo en el semiplano-positivo de w es

$$f(z) = u + iv = -\frac{i\pi}{\varphi} \ln\left(\frac{z+i\gamma}{R}\right) \quad (2)$$

puesto que si $z = r \exp(i\theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$y \quad f(z) = \ln\left(\frac{z}{R}\right) = i\theta + \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

y si se desea que θ esté en el semiplano positivo de w

$$f(z) = -i \ln\left(\frac{z}{R}\right) = \theta + \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

si el sector se extiende en una región del plano comprendida entre $0 - \pi$

$$f(z) = w = u + iv = -i \frac{\pi}{\varphi} \ln\left(\frac{z}{R}\right) = -i \frac{\pi}{\varphi} \ln\left(\frac{x+i\gamma}{R}\right)$$

y las nuevas variables son

$$u = \frac{\pi}{\varphi} \theta \quad iv = i \frac{\pi}{\varphi} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

La ecuación (1) se transforma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 < u < \pi \\ 0 < v \end{array} \quad (3)$$

Con las condiciones Fig. 3.3-2.1(a)

$$\begin{array}{lll} T = T(\varphi) & 0 < u < \pi & v = 0 \\ T = 0 & u = 0 & v > 0 \\ T = 0 & u = \pi & v > 0 \end{array} \quad (4)$$

La solución de la ecuación (3) con las condiciones (4) corresponde a la solución de un rectángulo semiinfinito hallado en el apartado 3.3-1,2, es decir

$$T(u, v) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n \frac{\pi v}{\pi}\right) \sin\left(n \frac{\pi v}{\pi}\right) \int_0^{\pi} T(u) \sin\left(\frac{n \pi u'}{\pi}\right) du' \quad (5)$$

Haciendo el cambio de variables $u = \frac{\pi}{\varphi} \theta$ y $v = \frac{\pi}{\varphi} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$ obtenemos la solución

$$T(\theta, r) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n \pi}{\varphi} \ln\left(\frac{R}{r}\right)\right) \sin\left(n \pi \frac{\theta}{\varphi}\right) \int_0^{\pi} T(\varphi) \sin\left(\frac{n \pi \theta'}{\varphi}\right) \cdot \frac{\pi}{\varphi} d\theta' \quad (6)$$

Para $T=T_1$

$$T(u, v) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\left[-(2n+1) \frac{\pi v}{\varphi} \ln\left(\frac{R}{r}\right)\right] \sin\left[(2n+1) \frac{\pi u}{\varphi}\right]}{2n+1} \quad (7)$$

6

$$T(\theta, r) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-(2n+1) \frac{\pi}{\varphi} \ln\left(\frac{R}{r}\right)\right] \sin\left[(2n+1) \frac{\pi \theta}{\varphi}\right]}{(2n+1)} \quad (8)$$

Ejemplo 3.3-2.1

Un material de conductividad $1,5 \text{ (kcal/h m } ^\circ\text{C)}$ tiene una sección recta de sector circular de radio $0,5 \text{ m}$ y ángulo 45° . La superficie curva se mantiene a temperatura constante de 100°C . Calcular

- La distribución de temperaturas en el sector circular con los lados rectos a 0°C .
- La cantidad de calor que se pierde por las superficies rectas por unidad de altura cuando éstas últimas se encuentran en un medio a 0°C y con un coeficiente de convección-radiación de $10 \text{ (kcal/h m}^2\text{ } ^\circ\text{C)}$
- Eficacia térmica.

Solución:

a) Por la ecuación 3.3-2.1(8)

$$T(\theta, r) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-(2n+1)\frac{\pi}{4} \ln\left(\frac{1}{r}\right)\right]}{2n+1} \cdot \sin[(2n+1)4\theta]$$

así, para un punto $\theta = \pi/8$ y $r = 0,25$ m

$$T\left(\frac{\pi}{8}, 0,25\right) = 5,7 \text{ } ^\circ\text{C}$$

b) Las condiciones en el sector circular son

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -a_1 T \quad \text{en} \quad \theta = \frac{\pi}{4} ; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = a_1 T \quad \theta = 0$$

o por simetría

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \mp a_1 T \quad \text{en} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{8} ; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad \theta = 0$$

y las condiciones en el rectángulo de la transformación conforme

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -a_1 T \frac{v}{\pi}$$

y

$$\frac{\partial T}{\partial u} = -\frac{a_1 T}{8} \quad u = \pi \quad v > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0 \quad u = 0 \quad v > 0$$

La solución del problema es la dada en el apartado 3.3-1.3 de un rectángulo semiinfinito con convección y con las condiciones anteriores

$$T(u, v) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + b_i^2) \exp(-\xi_i v)}{\pi(\xi_i^2 + b_i^2) + b_i} \cos(\xi_i u) \int_0^{\pi} T(u) \cos(\xi_i u) du$$

y finalmente

$$\bar{T}(\theta, r) = 2T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i \exp\left[-\xi_i \cdot 8 \ln(R/r)\right]}{\pi(\xi_i^2 + b_i^2) + b_i} \frac{\cos(\xi_i 8\theta)}{\cos(\xi_i \pi)}$$

donde $b_i = a_i/8$ y ξ_i son las raíces de $\xi_i \tan(\xi_i \pi) = b_i$.

La cantidad de calor que se pierde al exterior

$$\frac{q}{2} = -2k \int_0^R \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{\theta=\pi/8} dr = -2k \int_0^{\theta} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} R d\theta$$

Derivando e integrando las expresiones anteriores resulta

$$\frac{q}{2} = \frac{4T_1 k b_1^2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_i [(\xi_i^2 + b_1^2) + b_1]} \frac{1}{R}$$

Para $a_1 = 10/1,5$ $b_1 = 0,83$ las raíces son

$$\xi_1 = 0,34 \quad \xi_2 = 1,18 \quad \xi_3 = 2,14 \quad \xi_4 = 3,10 \quad \xi_5 = 4,00$$

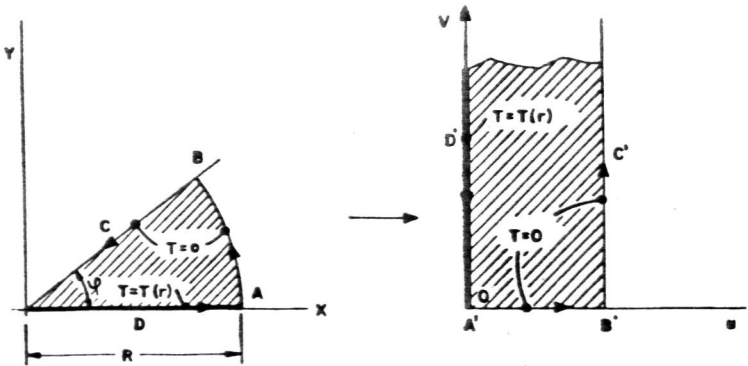
$$\frac{q}{2} \approx 576 \text{ (Kcal/h.m)}$$

c)

$$\eta = \frac{q/2}{(q/2)_0} = \frac{576}{2 h T_1 R} = 0,576$$

Sector circular

Caso b) Fig. (3.3-2.1(b))



| | | |
|------------|--------------------|-------------|
| $T = T(r)$ | $\theta = 0$ | $0 < r < R$ |
| $T = 0$ | $\theta = 0$ | $r = R$ |
| $T = 0$ | $\theta = \varphi$ | $r = R$ |
| $T = 0$ | $\theta = \varphi$ | $0 < r < R$ |

Procediendo en forma análoga al apartado 3.3-2.1 y con la misma transformación, conforme. La ecuación de distribución de tem peraturas es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \quad (1)$$

Con las condiciones que se indican en la figura 3.3-2.2(a)

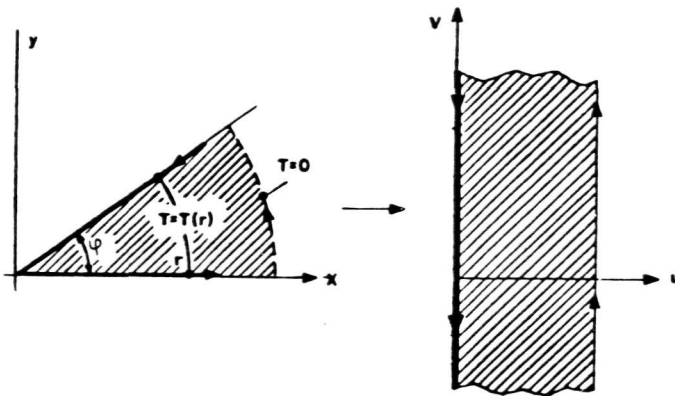
| | | | |
|------------|----|-----------|---------------|
| $T = T(r)$ | en | $u = 0$ | $v > 0$ |
| $T = 0$ | | $u = \pi$ | $v > 0$ |
| $T = 0$ | | $v = 0$ | $0 < u < \pi$ |

y la solución de (1) es la correspondiente a un rectángulo semiin- finito dada en el apartado 3.3-1.2. Con el cambio de variables

$$u = \frac{\pi}{\varphi} \theta ; \quad v = i \frac{\pi}{\varphi} \ln \left(\frac{R}{r} \right)$$

$$T(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} T(r) \sin \pi \left(1 - \frac{\theta}{\varphi} \right) \left[\frac{1}{\cos \left(1 - \frac{\theta}{\varphi} \right) + \cosh(v-v')} - \frac{1}{\cos \left(1 - \frac{\theta}{\varphi} \right) \cosh \left(\frac{\pi}{\varphi} \theta - v' \right)} \right] dv'$$

Caso c) Fig. (3.3-2.1(c))



| | | |
|------------|------------------------|---------|
| $T = T(r)$ | $\theta = 0$ | $0 < r$ |
| $T = T(r)$ | $\theta = \varphi$ | $0 < r$ |
| $T = 0$ | $0 < \theta < \varphi$ | $r = r$ |

Para la ecuación (1) las condiciones son:

$$\begin{array}{lll} T = T(r) & \text{en} & u=0 \quad v>0 \\ T = T(r) & & u=0 \quad v<0 \\ T = 0 & & u=\pi \quad -\sqrt{2} < v < \sqrt{2} \end{array}$$

y la solución es la dada en 3.3-1.1(10)

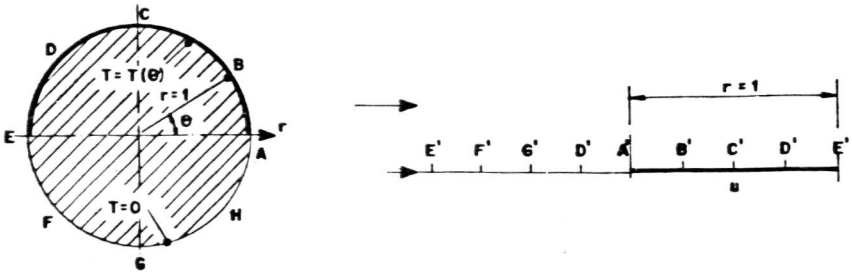
$$T(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(r) \sin\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) \cdot \frac{dv'}{\omega(1-\frac{\theta}{\pi}) + \omega \sinh(V \cdot V')} \quad (3)$$

3.3-2.2. Circulo

Consideremos el círculo de la Fig. 3.3-2.2(a) que cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < r < 1 \quad (1)$$

Fig. 3,3-2,2(a)



con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T = T(\theta) & \text{en} & r=1 \quad 0 < \varphi < \pi \\ T = 0 & & r=1 \quad \pi < \varphi < 2\pi \end{array}$$

Haciendo la transformación conforme $w = f(z) = i \frac{(1-z)/(1+z)}$ para colocar el círculo en el semiplano positivo se tiene:

$$w = u + iv = \frac{2y}{(r+x)^2 + y^2} + i \frac{(r^2 - (x^2 + y^2))}{(r+x)^2 + y^2}$$

$$u = \frac{2y}{(1+x)^2 + y^2} \quad v = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x)^2 + y^2} \quad r=1$$

y para $z = r \left(\frac{i-\omega}{1+\omega} \right)$

$$x = r \left(\frac{1+(u^2+v^2)}{(v+i)^2 + u^2} \right) \quad y = r \left(\frac{2u}{(v+i)^2 + u^2} \right)$$

Para

$$z=1 \quad \omega = i \left(\frac{1-z}{1+z} \right) = 0$$

$$z=-1 \quad \omega = \infty \quad (2)$$

$$z=i \quad z=1$$

y así la representación conforme es la figura 3.3-2.2(a).

La ecuación (1) se transforma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \quad 0 < u < 1 \quad (3)$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} T=0 & \quad u=0 \\ T=T(0) & \quad u=1 \quad v>0 \end{aligned}$$

La solución de (3), puesto que es armónica en el semiplano $v>0$ y tiene valores $T(u)$ en el eje u , es la integral de Poisson

$$T(u,v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v T(u') du'}{v^2 + (u-u')^2} \quad (4)$$

Para $T=T_1$

$$T(u,v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{v(0) du'}{v^2 + (u-u')^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v T_1 du'}{v^2 + (u-u')^2} = \frac{T_1}{\pi} \arctg \frac{u'-u}{v} \Big|_0^{\infty} = T_1 \arctg \left(\frac{v}{u} \right)$$

y cambiando al plano z

$$T(x, y) = T_1 \left[1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2y}{1 - (x^2 + y^2)} \right] \quad (5)$$

y en coordenadas polares

$$T(r, \theta) = T_1 \left[1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r \sin \theta}{1 - r^2} \right) \right] \quad (6)$$

así resulta, que, por la transformación al semiplano w podemos hallar distribuciones de temperaturas en configuraciones geométricas complejas que resultan difíciles de resolver en el plano z .

3.3-2.3. Corona circular

Figura 3.3-2.3(a)

En la región de la corona se cumple

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad R_1 < r < R_2 \quad (1)$$

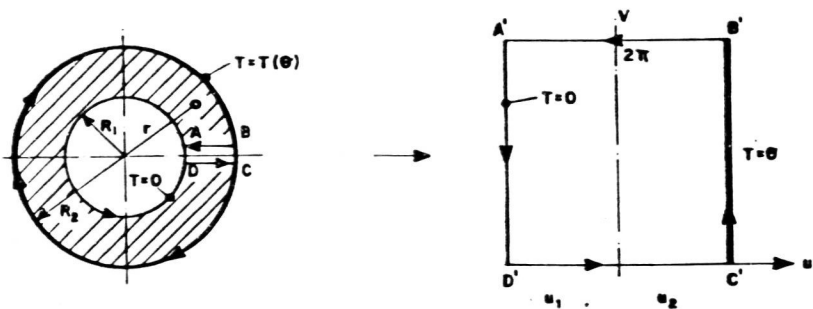


Fig. 3.3-2.3(a)

Con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & r=R_1 & 0 < \theta < 2\pi \\ T=T(\theta) & r=R_2 & 0 < \theta < 2\pi \end{array}$$

Haciendo la transformación conforme

$$w = f(z) = -\ln(z/R) = -\ln(x+iy/R) = -\ln\left(\frac{r}{R}\right) \exp(i\theta) \\ v = i\theta \quad u = -\ln(r/R)$$

y la representación en el plano w

$$\begin{array}{ll} v=0 & \alpha \quad v=2\pi \\ u=-u_1 & u=u_2 \end{array}$$

La ecuación (1) se transforma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \quad \begin{array}{l} u_1 < u < u_2 \\ 0 < v < 2\pi \end{array} \quad (2)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{ll} T = 0 & \text{en } u = u_1 \\ T = T(\theta) & \text{en } u = u_2 \end{array}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{en } v = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{en } v = 2\pi$$

La solución de la ecuación (2) corresponde a un rectángulo. Cambiando las variables resulta

$$T(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sinh\left[\left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{n}{2}\right]}{\sinh\left[\left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{n}{2}\right]} \int_0^{2\pi} T(\theta) \sin\left(\frac{n}{2}\theta\right) d\theta \quad (3)$$

Ejemplo 3.3-2.3.

Una columna cilíndrica de 1 m de radio y conductividad térmica $2 \text{ (kcal/h m } ^\circ\text{C)}$ se calienta a 100°C en la superficie exterior paralela al eje Z y en un arco de 45° . Se desea conocer:

- a) Distribución de temperaturas en el interior de la columna si la temperatura en la superficie exterior no calentada se encuentra a 0°C .

- b) Idem si la superficie se encuentra en un medio a 0°C y coeficiente de convección radiación de $10 (\text{Kcal}/\text{h m}^2\text{C})$
- c) Cantidad de calor perdida al exterior en el caso b).
- d) Eficacia térmica de la columna para el caso b).

Solución:

a) el arco $\pi/4$ se sitúa en $\theta = \pm \pi/8$ y aplicando la ecuación de Poisson para el semiplano

$$T(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v T(u') du'}{(v^2 + (u-u')^2)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\frac{a}{v}} \frac{v T(u') du'}{(v^2 + (u-u')^2)^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a}{v}}^{\infty} \frac{100 v du'}{(v^2 + (u-u')^2)^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v T(u') du'}{(v^2 + (u-u')^2)^2}$$

$$= \frac{100}{\pi} \left[\text{arctg} \left(\frac{a-u}{v} \right) - \frac{u-a}{v} \right]$$

donde

$$\pm a = \pm \frac{2 \cos \pi/8}{(1 + \cos \pi/8)^2 + (\sin \pi/8)^2} = \pm 0,48$$

y, u y v, las expresiones dadas en 3.3-2.4, y finalmente

$$T(u, v) = \frac{100}{\pi} \text{arctg} \left[\frac{(u+a)/v - (u-a)/v}{1 + ((u+a)/v) \cdot ((u-a)/v)} \right]$$

o en coordenadas

$$T(r, \theta) = \frac{100}{\pi} \text{arctg} \left[\frac{2a(1-r^2)(1+r^2+2r \cos \theta)}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \theta - a(1+r^2+2r \cos \theta)} \right]$$

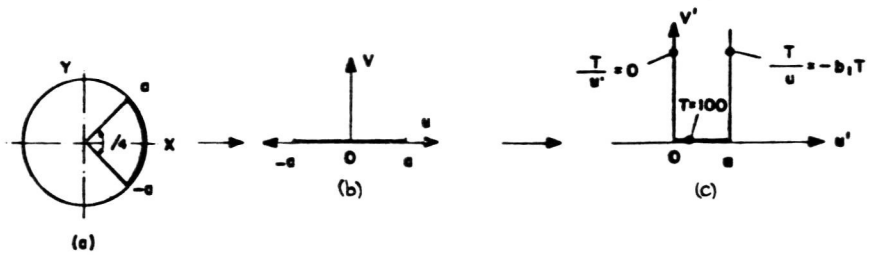
asi para el centro; $r=0, \theta=0$; $T(0,0) = \frac{100}{\pi} \text{arctg} \frac{2 \cdot 0,48}{1-0,48^2} = 28,5(^{\circ}\text{C})$

b) Haciendo las transformaciones circulo semiplano rec tángulo se obtienen las figuras (a), (b) y (c).

La solución de (c) es la ecuación 3.3-1.3(7),

$$T(u', v') = 2T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i \exp(-\xi_i v') \cos(\xi_i u')}{[a(\xi_i^2 + b_i^2) + b_i] \cos(\xi_i a)}$$

donde ξ_i son las raices de $\xi_i \text{tg}(\xi_i a) = b_i$



y u' y v' son los componentes de la transformación

$$u' = \frac{a}{\pi} \arccos \frac{1}{2} \left[(u^2 - v^2 - 1) \pm \sqrt{(v^2 - u^2 - 1) - 4u^2} \right]; \quad v' = \frac{a}{\pi} \operatorname{arccosh} \frac{1}{2} \left[(u^2 + v^2 + 1) \pm \sqrt{(v^2 + u^2 + 1) - 4u^2} \right]$$

y si

$$\frac{\partial T}{\partial u'} = \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial u'} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial v'} \right) \quad \text{en } r=1 \quad \gamma \quad \theta = \frac{\pi}{8}$$

$$-b_1 = -a_1 \left(\frac{\partial r}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial u'} \right) \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{a}{r^2} = -0,197$$

y si

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial u} &= -\frac{a}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1 - \Gamma(\arccos u))^2}} \cdot \frac{1}{2} \left(2u \pm \frac{4a^2 - 8u}{2\sqrt{(v^2 - u^2 - 1) - 4u^2}} \right) = \\ &= -\frac{a}{2\pi} \cdot 1,89(0,394 - 4) = 0,96a \end{aligned}$$

y $b_1 = 56$

Las raíces de 56.a son:

$$\xi_1 = 1,50/a \quad \xi_2 = 4,53/a \quad \xi_3 = 7,55/a \quad \xi_4 = 10,56/a \quad \xi_5 = 13,6/a$$

y finalmente

$$T(u', v') = 1,1 \cdot 10^4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\exp(-v')}{[56 + 0,48(\xi_i^2 + 56^2)]} \cdot \frac{\omega_2(\xi_i u')}{\omega_2(0,48\xi_i)}$$

aplicando esta ecuación al punto $u'=0, v'=0$; $T(0,0) \approx 100(^{\circ}\text{C})$

En el centro $r=0, \theta=0 \quad v'=0,2 \quad u'=1 \quad T(0,0,2) \approx 81(^{\circ}\text{C})$

$$q_{\frac{1}{2}} = -k \cdot 2a \left(\frac{\partial T}{\partial v'} \right)_{u'=0} = 4ab_1 k T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{[56 + 0,48(\xi_i^2 + 56^2)] \omega_2(0,48\xi_i)} = 600 \text{ (Kcal/h.m)}$$

d)

$$\eta = \frac{600}{5h(T-t)} = \frac{600}{1000\pi(2-\frac{1}{4})} = 0,109$$

3.3-2.4. Coronas circulares excéntricas

En la región comprendida entre las dos coronas Fig. 3.3-2,4(a)

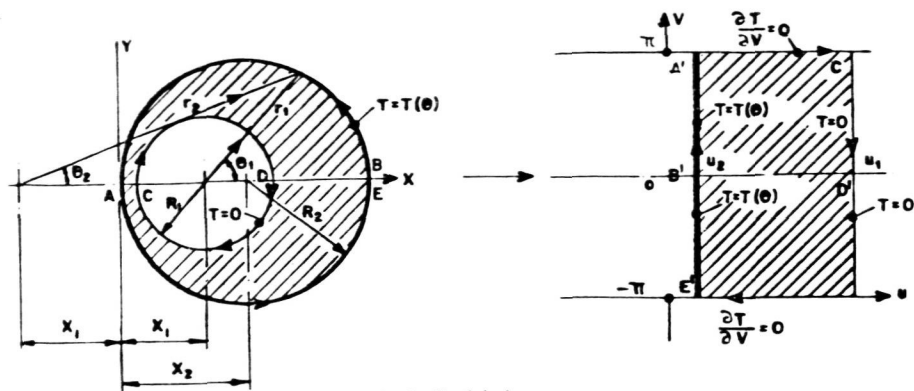


Fig. 3.3-2,4(a)

se cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad R_1 < r < R_2 \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{ll} T=0 & \text{en } r=R_1 \\ T=T(\theta) & r=R_2 \end{array}$$

Por aplicación de la transformación

$$w = u + iv = f(z) = \ln \frac{x+x_1-iy}{x-x_1-iy} = i(\theta_1 - \theta_2) + \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (2)$$

donde (r_2/r_1) en los puntos A y B de la circunferencia de radio, R_2 vale

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{x_1 + x_2 - R_2}{x_1 + (x_2 - R_2)} = \frac{x_1 + (x_2 + R_2)}{-x_1 + (x_2 + R_2)} \quad (3)$$

análogamente para la circunferencia de radio

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{x_1 + x_1 - R_1}{x_1 - (x_1 - R_1)} = \frac{x_1 + x_1 + R_1}{-x_1 (x_1 + R_1)} \quad (4)$$

y de (3) y (4)

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_1 = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - R_1^2}}{R_1} \quad \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_2 = \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 - R_2^2}}{R_2}$$

La transformación da en el plano u, v un rectángulo que corresponde a la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \quad \begin{array}{l} -\infty < u < \infty \\ -\pi < v < \pi \end{array} \quad (5)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{llll} \theta_1 - \theta_2 = 0 & v = 0 & T = T(\theta) & u = u_2 = \ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_2 \\ \theta_1 = \pi & \theta_2 = 0, & v = \pi & T = 0 \quad u = u_1 = \ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_1 \\ \theta_1 = 0 & \theta_2 = \pi & v = -\pi & \end{array}$$

La ecuación (5) puede resolverse por transformadas de Fourier considerando un rectángulo con 2 caras opuestas aisladas. En el caso de $T(\theta) = T_1$ las líneas isotérmicas, son paralelas al eje OV y las adiabáticas, al eje OU , y la cantidad de calor que atraviesa la sección anular vale

$$\frac{q}{2} = \frac{k T_1}{u_2 - u_1} = \frac{R_1}{R_{Tc}} \quad (6)$$

donde

$$u_2 = \ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_2 = \ln \left(\frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 - R_2^2}}{R_2}\right) = \arg \cosh \left(\frac{x_2}{R_2}\right) = \arg \cosh \left[\frac{R_2^2 - R_1^2 + (x_2 - x_1)^2}{2 R_2 (x_2 - x_1)}\right] \quad (7)$$

y

$$u_1 = \ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right)_1 = \ln \left(\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - R_1^2}}{R_1}\right) = \arg \cosh \frac{R_2^2 - R_1^2 - (x_2 - x_1)^2}{2 R_1 (x_2 - x_1)} \quad (8)$$

$$\text{y si} \quad q/2\pi z = \Delta T / R_{Tc} \quad (9)$$

$$R_{Tc} = \frac{1}{2\pi k} \arg \cosh \left(\frac{R_2^2 + R_1^2 - (x_2 - x_1)^2}{2 R_1 R_2}\right) \quad (10)$$

Formas con tratamiento análogos son las figuras 3.3-2.4(b), (3.3-2.4(c), 3.3-2.4(d) y 3.3-2.4(e)

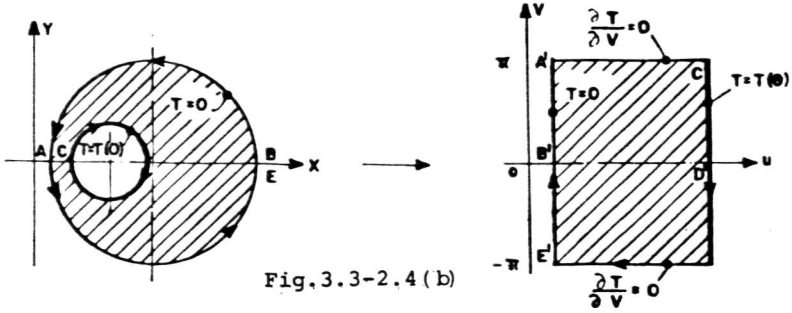


Fig.3.3-2.4 (b)

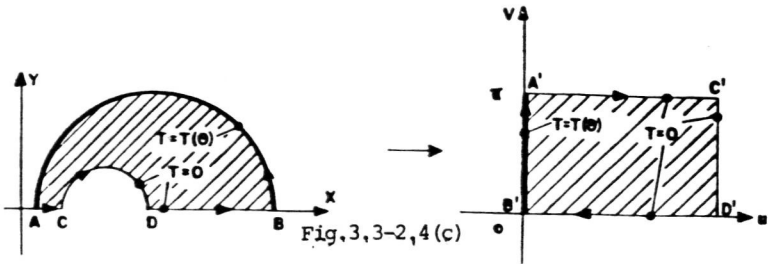


Fig.3.3-2.4 (c)

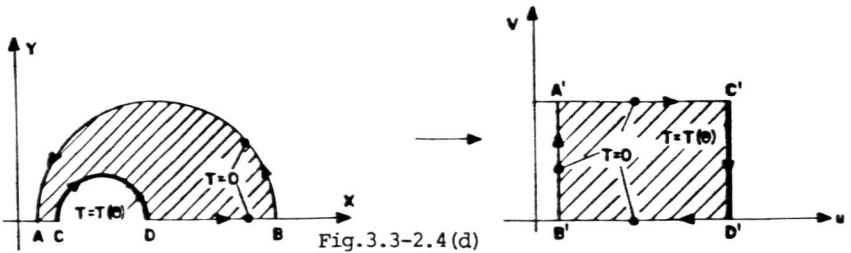


Fig.3.3-2.4 (d)

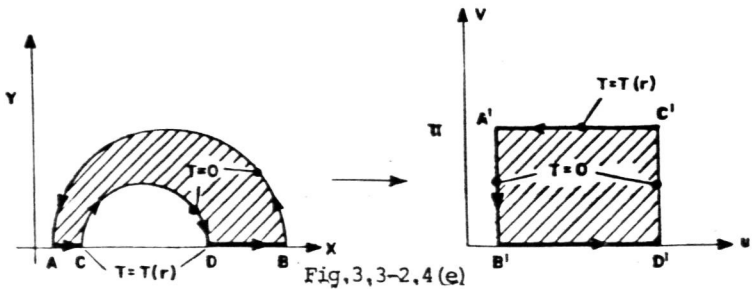


Fig.3.3-2.4 (e)

Ejemplo 3.3-2.4.

La sección recta comprendida entre dos circunferencias ex-céntricas de radios 0,5 m y 0,1 m y distancia entre centros de circunferencias de 0,3 m, está formada por un material de

$k = 1 \text{ (kcal/h.m}^\circ\text{C)}$ Se desea conocer.

- Cantidad de calor que se intercambia por unidad de altura cuando la superficie $r = 0,5 \text{ m}$ tiene una temperatura de 100°C y la superficie $r = 0,1 \text{ m}$ a 0°C .
- Resistencia térmica del medio.
- La superficie $r = 0,5 \text{ m}$ a 100°C y la superficie $r = 0,1 \text{ m}$ en un medio a 10°C y un coeficiente convección-radiación de $10 \text{ (kcal/h.m}^\circ\text{C)}$

Solución:

- Aplicando la transformación de 3.3-2,6 (Fig. 3.3-2-6(a))

$$\frac{q}{2} = -k \frac{dT}{du} = 2k \frac{100-0}{u_2-u_1}$$

$$u_2 = \text{ang} \cosh \frac{R_1^2 - R_2^2 - (x_2 - x_1)^2}{2 R_1 (x_2 - x_1)}$$

$$u_1 = \text{ang} \cosh \frac{R_1^2 - R_2^2 - (x_2 - x_1)^2}{2 R_1 (x_2 - x_1)}$$

$$\frac{q}{2} = 2\pi k \frac{100-0}{1,125} = 558,2 \text{ (kcal/h.m)}$$

$$b) R_{Tc} = \frac{1}{2\pi} \text{ang} \cosh \frac{R_1^2 + R_2^2 - (x_2 - x_1)^2}{2 R_1 R_2} = 0,179 \text{ (m.h}^\circ\text{C / kcal)}$$

$$c) \frac{q_0}{0,338} = 266 \text{ (kcal/h.m)}$$

3.3-2.5. Secciones diversas

- Circunferencia con plano infinito Fig. 3.3-2.5(a)

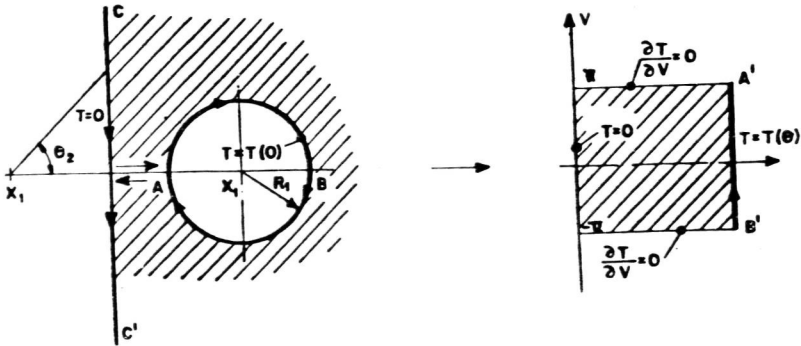


Fig. 3.3+2.5(a)

Manteniendo la misma nomenclatura que el apartado 3.3-2.6

Si $R_2 \rightarrow \infty$ $u_2 \rightarrow 0$

$$u_1 = \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - R_1^2}}{R_1}$$

y la ecuación de distribución de temperatura es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < u < u_1 \\ -\pi < v < \pi \end{matrix} \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & u=0 & -\pi < v < \pi \\ T=T(\theta) & u=u_1 & -\pi < v < \pi \\ \frac{\partial T}{\partial v} = 0 & v=\pi & 0 < u < u_1 \\ \frac{\partial T}{\partial v} = 0 & v=-\pi & 0 < u < u_1 \end{array}$$

donde

$$u = \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad u_1 = \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad v = \theta_1 - \theta_2$$

si $T(\theta) = T_1$

$$\frac{q}{2\pi L} = \frac{kT_1}{u_1} = \frac{T_1}{R_{Tc}} \quad (2)$$

y

$$R_{Tc} = \frac{1}{2\pi k} \arg \cosh \left(\frac{x_1}{R_1} \right) = \frac{1}{2\pi k} \ln \left(\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - R_1^2}}{R_1} \right) \quad (3)$$

b) Dos tubos de radios R_1 y separados entre ellos por una distancia $d = 2x_1 - 2R_1$ Fig. 3.3-2.5(b)

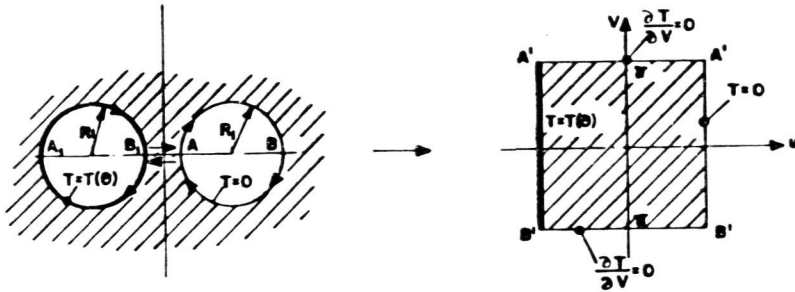


Fig. 3.3-2.5(b)

si $u' = 2u_1$ y $T(\theta) = T_1$

$$R_{Tc} = \frac{2u_1}{2\pi k} = \frac{1}{\pi k} \ln \left(\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - R_1^2}}{R_1} \right) \quad (4)$$

c) Dos tubos de distintos radios Fig. 3.3-2.5(c)

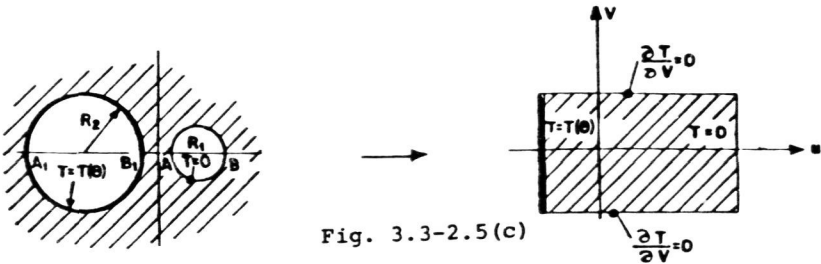


Fig. 3.3-2.5(c)

$u' = u_1 + u_2$ $T(\theta) = T_1$

$$R_{Tc} = \frac{u_2 + u_1}{2\pi k} = \frac{1}{2\pi k} \left[\ln \left(\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - R_1^2}}{R_1} \right) + \ln \left(\frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 - R_2^2}}{R_2} \right) \right] \quad (5)$$

d) Semitubo con plano infinito Fig. 3.3-2.5(d)

Aplicando una transformación en serie $f(z) = \alpha + \beta i = \ln z/R$
La línea BCD del plano Z corresponde al semicirculo de radio

R y centro en $z = 0$

$$\omega = 2R \operatorname{osh} \left[\ln \left(\frac{z}{R} \right) \right] = z + \frac{R^2}{z} \quad (6)$$

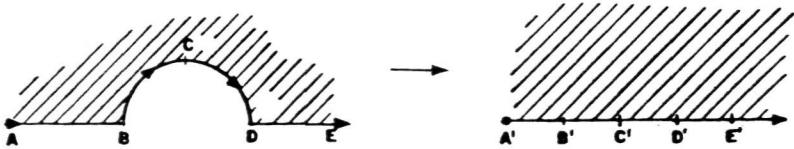


Fig.3.3-2.5(d)

Si la temperatura del semicírculo es T_1 y las zonas AB y DE permanecen a la temperatura T_0 la solución es la temperatura compleja

$$T = 2i \frac{T_1}{\pi} \operatorname{arg} \operatorname{ctgh} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (7)$$

separando las parte reales e imaginarias

$$T = 2i \frac{T_1}{\pi} \operatorname{arg} \operatorname{tg} \left[\left(\frac{x^3 - xy^2 + a^2x + 2xy^2}{x^2 - y^2} \right) + i \left(\frac{x^2y - y^3 - y^2 + a^2}{x^2 - y^2} \right) \right] \quad (8)$$

Ejemplo 3.3-2.5

Una tubería de acero de 0,2 m de diámetro interior y 5 mm de espesor transporta un fluido a 60°C , con un coeficiente de convección fluido-tubo de $600 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$. La tubería se ha instalado bajo tierra a 1 m de profundidad desde el centro del tubo. La conductividad térmica del terreno es de $1 \text{ (Kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$ Calcular:

- Las pérdidas de calor si el ambiente exterior se encuentra a 10°C con un coeficiente convección-radiación de
- Repetir el caso a) cuando la tubería se recubre con un aislante de 5 cm de espesor y conductividad térmica

Solución:

a)

$$q = 2\pi L \frac{\Delta t}{R_{tc}}$$

$$\frac{q}{2\pi L} = \frac{\frac{1}{R_i h} + \frac{1}{k_a} \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) + \frac{1}{k_t} \ln\left(\frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 - R_e^2}}{R_e}\right) + \frac{1}{h_a}}{}$$

y sustituyendo valores

$$\begin{aligned} \frac{q}{L} &= \frac{2\pi \cdot 50}{\frac{1}{0,1 \cdot 600} + \frac{1}{40} \ln\left(\frac{0,105}{0,100}\right) + \frac{1}{1} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - (0,105)^2}}{0,105}\right) + \frac{1}{5}} = \\ &= \frac{314}{0,0166 + 0,0012 + 2,944 + 0,20} \end{aligned}$$

como puede observarse, las resistencias térmicas del interior y del tubo son despreciables frente a las restantes y

$$\frac{q}{L} = qa \text{ (Kcal/h.m)}$$

b) De acuerdo con el cálculo del caso a)

$$\begin{aligned} \frac{q}{L} &\approx \frac{314}{\frac{1}{k_a} \ln\left(\frac{R_e'}{R_e}\right) + \frac{1}{k_t} \ln\left(\frac{X_1 + \sqrt{X_1^2 - R_e'^2}}{R_e}\right) + \frac{1}{h_a}} \\ &= \frac{314}{\frac{1}{0,05} \ln\left(\frac{0,155}{0,105}\right) + \frac{1}{1} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 0,155^2}}{0,155}\right) + 0,20} \\ &= \frac{314}{7,78 + 2,58 + 0,20} = 29,7 \text{ (Kcal/h.m)} \end{aligned}$$

3.3-2.6. Angulos

a) Transformación del rectángulo semiinfinito en el semiplano
no Fig. 3.3-2.6(a) . Aplicando la transformación de Christof-

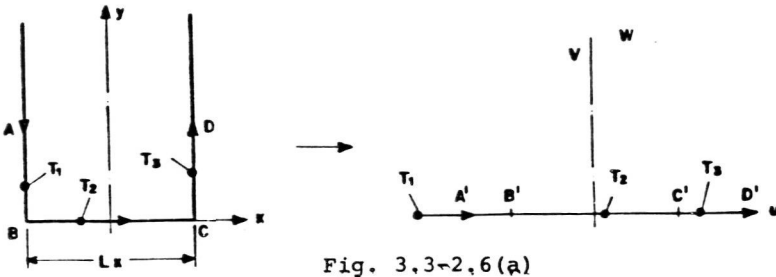


Fig. 3.3-2.6(a)

fer-Schwarz

$$\frac{dz}{dw} = A (w+1)^{\frac{\pi}{2\pi}-1} (w-1)^{\frac{\pi}{2\pi}-1} = \frac{A_1}{\sqrt{1-w^2}} \quad (1)$$

$$z = A_1 \int \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} + B = A_1 \arcsin w + B \quad (2)$$

En

$$\begin{aligned} w=1 & \quad z = \frac{Lx}{2} \\ w=-1 & \quad z = -\frac{Lx}{2} \quad A_1 = \frac{Lx}{\pi} \\ z = \frac{Lx}{\pi} \arcsin w & \quad w = \sin\left(\frac{\pi z}{Lx}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

y la distribución de temperaturas en el plano w

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0 \quad \begin{aligned} -\infty < u < \infty \\ v > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Para las condiciones

$$\begin{aligned} T &= T_1 & -\infty < u < -1 \\ T &= T_2 & -1 < u < 1 \\ T &= T_3 & 1 < u < \infty \end{aligned} \quad (5)$$

La solución por la ecuación de Poisson para el semiplano

$$T(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v T(u') du'}{v^2 + (u-u')^2} = \frac{T_1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{u'-u}{v} \right) \Big|_{-\infty}^{-1} + \frac{T_2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{u'-u}{v} \right) \Big|_{-1}^{+1} \\ + \frac{T_3}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{u'-u}{v} \right) \Big|_1^{\infty} = \frac{(T_1-T_2)}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{1+u} \right) + \frac{T_2-T_3}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{1+u} \right) + T_2$$

b) Transformación de pared con ángulo recto en el semiplano. Fig. 3.3-2.6(b). Aplicando la transformación de Christoffel-Schwarz,

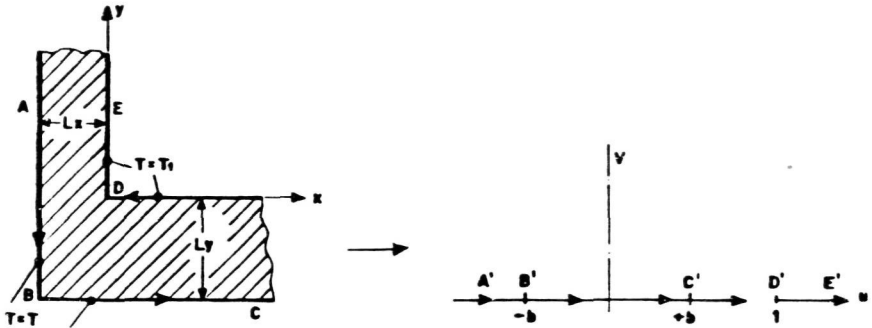


Fig. 3.3-2.6(b)

$$\frac{dz}{dw} = A(w+b)^{\frac{\varphi_1}{\pi}-1} (w-1)^{\frac{\varphi_2}{\pi}-1} w^{\frac{\varphi_3}{\pi}-1} \quad (1)$$

y para los giros $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ $\varphi_3 = \pi$

$$Z = A \int \sqrt{\frac{w-1}{w+b}} \cdot \frac{dw}{w} + B \quad (2)$$

Haciendo $\sqrt{\frac{w-1}{w+b}} = \alpha$ $w = \frac{1+\alpha^2 b}{\alpha^2-1}$

$$Z = A \int \frac{\alpha [2\alpha b(\alpha^2-1) - 2\alpha(1+\alpha^2 b)] d\alpha}{(1+\alpha^2 b)(\alpha^2-1)} + B \\ = A \left[\ln \left(\frac{\alpha+1}{1-\alpha} \right) - \frac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{b\alpha} \right] + B \quad (3)$$

Para $w=1$ $Z=B$ y el origen del plano Z se encuentra en D, $w=-b$ $Z=-bx-iL_y$ $L_y = \pi A$, $L_x = A\pi/\sqrt{b}$, $b = L_x/L_y$

Para valores grandes de w , $w+b \approx w$ y la ec. (3) toma la forma

$$z \approx A \left[\ln w + \ln \left(\frac{A}{b+1} \right) - \frac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{b} \right] \quad (4)$$

si en el plano z se cumple

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

En el plano w se cumple $T_w = \frac{1}{\pi} \ln w$ y por la ec. (4)

$$\frac{\ln w}{\pi} = \frac{A}{\pi} z_1 + \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{a_1+1}{4} \right) + \frac{2}{\pi \sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{b} \quad (6)$$

siguiendo las líneas isotérmicas ABC con $T = 0$ y CDE con $T = T_1$ se recorre el semiplano en la dirección $-\infty < u < +\infty$ y para el eje x se tiene

$$T_1 - T_0 = \frac{x}{y} + \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(\frac{a_1+1}{4} \right) + \frac{2}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{b} \right) \quad (7)$$

y si
$$\frac{a_1+1}{4} = \frac{L_x^2 + L_y^2}{4L_x^2}$$

$$T_1 - T_0 = \frac{x}{L_y} + \frac{1}{\pi} \left[\ln \left(\frac{L_x^2 + L_y^2}{4L_x^2} \right) + 2 \frac{L_y}{L_x} \operatorname{arctg} \left(\frac{L_y}{L_x} \right) \right] \quad (8)$$

y para el eje OY

$$T_1 - T_0 = \frac{y}{L_x} + \frac{1}{\pi} \left[\ln \left(\frac{L_x^2 + L_y^2}{4L_x^2} \right) + \frac{L_y}{L_x} \operatorname{arctg} \left(\frac{L_y}{L_x} \right) \right] \quad (9)$$

y si
$$q = (T_1 - T_0) / R_{Tc}$$

$$R_{Tc} = \frac{1}{k \left[\frac{x}{L_y} + \frac{y}{L_x} + \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{L_x^2 + L_y^2}{4L_x L_y} \right) + \frac{2}{\pi} \frac{L_y}{L_x} \operatorname{arctg} \left(\frac{L_y}{L_x} \right) + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{L_y}{L_x} \right]} \quad (10)$$

Si $L_x = L_y$

$$R_{Tc} = \frac{1}{k \left(2 \frac{x}{L_x} - \frac{2}{\pi} \ln 2 + 1 \right)} \quad (11)$$

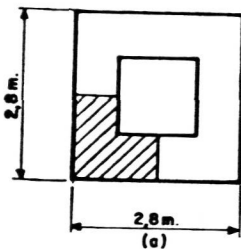
y el efecto del ángulo es disminuir la resistencia térmica en $\left(1 - \frac{2}{\pi} \ln 2 \right)$

Ejemplo 3.3-2.6

La sección recta de las paredes de un horno tiene la forma que se indica en la Fig. (a)

a) La resistencia térmica

b) Cantidad de calor que se pierde al exterior



Espesor de las paredes 0,40 m

Temperatura de las superficies interiores 1100°C .

Temperatura de las superficies exteriores 100°C .

Conductividad térmica de las paredes 0,1 Kcal/hm°C .

Solución:

a) Considerando un cuadrante de la figura (a) y aplicando la ec.(8) de paredes en ángulo recto

$$R_{Tc} = \frac{1}{k \left(2 \frac{x}{L_x} - \frac{2}{\pi} \ln 2 + 1 \right)} = \frac{1}{0,55} \left(\frac{\text{hm}^\circ\text{C}}{\text{Kcal}} \right)$$

y para los 4 cuadrantes

$$R_{Tc} = \frac{1}{2,20} \left(\frac{\text{hm}^\circ\text{C}}{\text{Kcal}} \right)$$

b)

$$\frac{q}{2} = \frac{\Delta T}{R_{Tc}} = 1000 \cdot 2,20 = 2200 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{hm}} \right)$$

c) Pared con ensanchamiento en ángulo recto. Fig. 3.3-2.6

(c)

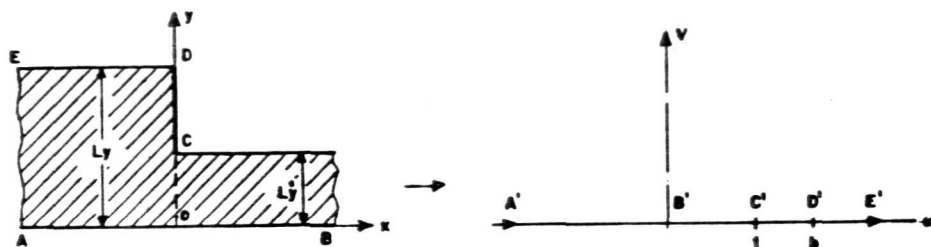


Fig. 3.3-2.6 (c)

$$\frac{dz}{dw} = A (\omega-1)^{\frac{\eta_1}{\pi}-1} (\omega-b)^{\frac{\eta_2}{\pi}-1} \omega^{-1} \quad ; \quad \frac{\eta_1}{\pi}-1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{\eta_2}{\pi}-1 = -\frac{1}{2}$$

$$Z = A \int \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega-b}} \cdot \frac{1}{\omega} d\omega + B \quad \omega = \frac{1-b\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

$$Z = A \left[\ln \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) + \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left(\frac{\alpha\sqrt{b}-1}{\alpha\sqrt{b}+1} \right) \right] + B$$

$$\begin{aligned} \text{En } \omega=b \quad i\pi A+B &= -Ly & A &= \frac{Ly}{\pi} \\ \omega=1 \quad i\pi \frac{A}{\sqrt{b}}+B &= -Ly' & \sqrt{b} &= Ly'/Ly \end{aligned}$$

Con el origen de Z en el punto cero.

Para valores grandes de x

$$x \approx \frac{Ly}{\pi} \left[\ln 2^2 \left(\frac{\omega}{1-b} \right) + \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left(\frac{b-1}{(\sqrt{b}+1)^2} \right) \right] \quad (3)$$

y

$$\ln \omega = \frac{x\pi}{Ly} + \ln \left(\frac{1+b}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left(\frac{b-1}{(b+1)^2} \right) \quad (4)$$

y sustituyendo los valores

$$\ln \omega = \frac{\pi x}{Ly} + \ln \left(\frac{Ly^2+Ly'^2}{4Ly^2} \right) - \frac{Ly}{Ly'} \ln \left(\frac{Ly+Ly'}{Ly-Ly'} \right) \quad (5)$$

e identificando $\frac{\ln \omega}{\pi} = T \omega = T_c$

y si $q/2 = T_c/R_{Tc}$

$$R_{Tc} = \frac{1}{k \left[\frac{x}{Ly} + \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{Ly^2+Ly'^2}{4Ly^2} \right) - \frac{Ly}{\pi Ly'} \ln \left(\frac{Ly+Ly'}{Ly-Ly'} \right) \right]} \quad (6)$$

y el efecto de los ángulos es modificar la resistencia térmica con las expresiones que se añaden a x/L_y

Ejemplo 3.3-2.6(a)

Calcular las pérdidas de calor en una pared que tiene la forma de la figura 3.3-2.6(c) con las características siguientes:

$$L_y = 0,20 \text{ m} \quad L_x = 0,6 \text{ m} \quad \text{longitud } 6 \text{ m}$$

Temperatura en la superficie escalonada 30°C

Temperatura en la superficie recta 0°C

Conductividad térmica del material $0,5 \text{ (Kcal/hm}^\circ\text{C)}$

Solución:

$$R_{Tc} = \frac{1}{0,5 \left[\frac{6}{0,6} + \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{0,6^2 + 0,2^2}{4 \cdot 0,2^2} \right) - \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{0,6 + 0,2}{0,6 - 0,2} \right) \right]} = 0,198 \left(\frac{\text{hm}^\circ\text{C}}{\text{Kcal}} \right)$$

3.3-4.1. Cilindro seminfinito (Fig. 3.4-1)

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < r < R \\ 0 < z < \infty \end{matrix}$$

si la temperatura es independiente de θ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (a)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T = T(r) & z = 0 & 0 < r < R \\ T = 0 & r = R & 0 < z \\ T = 0 & z = \infty & \end{array} \quad (b)$$

Se define la transformación finita de Hankel (Apéndice I) y grado de cero

$$\bar{L}_{H,0}[T(r,z)] \equiv \bar{f}_{H,0}(\xi,z) = \int_0^R T(r,z) r J_0(\xi;r) dr \quad (1)$$

y su inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (2)$$

Aplicando a los miembros de (1) la transformada anterior

$$\begin{aligned} \bar{L}_{H,0} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] &= \int_0^R \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) r J_0(\xi_i r) dr \\ &= RT(R) \xi_i J_1(\xi_i R) - \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) \end{aligned} \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces positivas de $J_0(\xi_i R) = 0$ y J_0, J_1 son las funciones de Bessel de grado 0 y 1 respectivamente

$$\bar{L}_{H,0} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \int_0^R \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} r J_0(\xi_i r) dr = \frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} \quad (4)$$

De (1), (3) y (4) resulta

$$\frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, z)}{dz^2} = \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, z) \quad (5)$$

Resolviendo (5) por transformadas de Laplace y si

$$\begin{aligned} f(s) &\equiv \int_0^{\infty} \bar{f}_{H,0}(\xi, z) \exp(-sz) dz \\ f(s) &= \frac{A(\xi)s}{s^2 - \xi^2} + \frac{B(\xi)}{s - \xi^2} \end{aligned} \quad (6)$$

y por la inversión de $f(s)$

$$f^{-1}(s) = \bar{f}_{H,0}(\xi, z) = A(\xi) \cosh(\xi_i z) + \frac{B(\xi)}{\xi} \sinh(\xi_i z)$$

$$\text{En } z=0 \quad \bar{f}_{H,0}(\xi, 0) = A(\xi) = \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr$$

$$\text{e en } z=\infty \quad B(\xi) = \xi A(\xi)$$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi, z) = \bar{f}_{H,0}(\xi, 0) \exp(-\xi_i z) \quad (7)$$

y sustituyendo en (2)

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(r \xi_i)}{J_1^2(\xi_i R)} \exp(-\xi_i z) \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr \quad (8)$$

$$T(r) = T_1 \quad \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr = \frac{R}{\xi_i} T_1 J_1(\xi_i R)$$

$$T(r, z) = \frac{2T_1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R) \xi_i} \exp(-\xi_i z) \quad (9)$$

3.3-4.2. Cilindro finito (Fig.3.3.4-2)

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < r < R \\ 0 < z < L_2 \end{matrix} \quad (1)$$

con las condiciones de la Fig.3.3-4.2. (2)

Aplicando la transformada finita de Hankel como en el apartado (3.4.1) se tiene

$$\frac{d^2 \bar{T}_{H,0}(\xi, z)}{dz^2} = -\xi^2 \bar{T}_{H,0}(\xi, z) \quad (3)$$

aplicando a (3) la transformada de Laplace y su inversión con las condiciones (2).

$$\text{En } z=0 \quad A(\xi) = \bar{T}_{H,0}(\xi, 0) = \int_0^R T(r) r J_0(\xi r) dr$$

$$\text{En } z=L_2 \quad -A(\xi) \cosh(\xi L_2) = \frac{B(\xi)}{\xi} \sinh(\xi L_2)$$

y finalmente

$$\bar{T}_{H,0}(\xi, z) = \bar{T}_{H,0}(\xi, 0) \frac{\sinh[(L_2 - z)\xi]}{\sinh(\xi L_2)} \quad (4)$$

y por la inversión de $\bar{T}_{H,0}(\xi, z)$

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \frac{\sinh[(L_2 - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_2)} \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr \quad (5)$$

Para $T(r) = T_1$

$$\int_0^R T(r) r J_0(\xi r) dr = \frac{T_1 R}{\xi} J_1(\xi R)$$

y

$$T(r, z) = \frac{2T_1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} \cdot \frac{1}{\xi_i} \frac{\sinh[(L_2 - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_2)} \quad (6)$$

3.3-4.3. Cilindro finito (Fig.3.3.4-3).

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < r < R \\ 0 < z < L_z \end{matrix} \quad (1)$$

con las condiciones de la Fig.3.3.4-3; (2)

Aplicando a (1) la transformada finita del seno de Fourier

$$\xi = m\pi/L_z$$

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^\xi(r, \xi)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{f}_F^\xi(r, \xi)}{dr} = \xi^2 \bar{f}_F^\xi(r, \xi) = 0 \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}_F^\xi(r, \xi) \sin(r\xi) \quad (4)$$

La ec. (3) es una ecuación de Bessel modificada (Apéndice I) cuya solución es

$$\bar{f}_F^\xi(r, \xi) = C_1 I_0(r\xi) + C_2 K_0(r\xi) \quad (5)$$

De las condiciones (2)

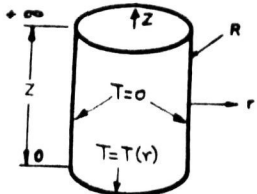
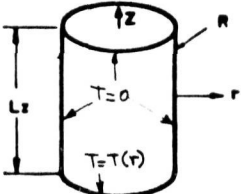
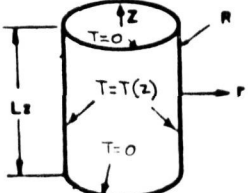
$$\begin{aligned} \text{en } r=R \quad \bar{f}_F^\xi(R, \xi) &= \int_0^{L_z} T(z) \sin(\xi z) dz \\ r=0 \quad d\bar{f}_F^\xi/dr &= 0 \quad C_2 = 0 \\ \bar{f}_F^\xi(r, \xi) &= \frac{I_0(r\xi)}{I_0(R\xi)} \int_0^{L_z} T(z) \sin(\xi z) dz \end{aligned} \quad (6)$$

y finalmente de (4)

$$T(r, z) = \frac{2}{L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_0(r\xi)}{I_0(R\xi)} \sin(\xi z) \int_0^{L_z} T(z) \sin(\xi z) dz \quad (7)$$

Para $T(z) = T_1$

$$\int_0^{L_z} T(z) \sin(\xi z) dz = \frac{T_1 L_z}{m\pi} [1 - \cos m\pi] = \frac{2L_z T_1}{(2m+1)\pi}$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 3.3-4.1</p> | $T=T(r), \quad z=0; \quad 0 < r < R$ $T=0 \quad r=R \quad z>0$ $T=0 \quad z=\infty$ | $T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \exp(-\xi_i z) \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R)=0$ Si $T(r)=T_1$</p> $T(r,z) = \frac{2T_1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i J_1(\xi_i R)} \exp(-\xi_i z)$ |
|  <p>Fig. 3.3-4.2</p> | $T=T(r), \quad z=0; \quad 0 < r < R$ $T=0 \quad r=R \quad z>0$ $T=0 \quad z=L_z; \quad 0 < r < R$ | $T(r,z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \frac{\sinh[(L_z - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_z)} \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R)=0$ Si $T(r)=T_1$</p> $T(r,z) = \frac{2T_1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} \frac{\sinh[(L_z - z)\xi_i]}{\xi_i \sinh(\xi_i L_z)}$ |
|  <p>Fig. 3.3-4.3</p> | $T=T(z), \quad r=R; \quad 0 < z < L_z$ $T=0 \quad z=0; \quad 0 < r < R$ $T=0 \quad z=L_z; \quad 0 < r < R$ | $T(r,z) = \frac{2}{L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_0(m\pi r/L_z)}{I_0(m\pi R/L_z)} \sin(m\pi z/L_z) \int_0^{L_z} T(z) \sin\left(\frac{m\pi z}{L_z}\right) dz$ <p>Si $T=T_1$</p> $T(r,z) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_0[(2m+1)\pi r/L_z] \sin[(2m+1)\pi z/L_z]}{I_0[(2m+1)\pi R/L_z] (2m+1)}$ |

$$T(r, z) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0[(2m+1)\pi r/L_z]}{J_0[(2m+1)\pi R/L_z]} \frac{\sinh[(2m+1)\pi z/L_z]}{(2m+1)} \quad (8)$$

Ejemplo 3.3-4.2

Una barra cilíndrica de 0,5 m de altura y 0,10 m de diámetro se calienta en una de sus bases circulares a 200°C mientras que las restantes superficies se mantienen a 0°C. La conductividad térmica del material es de 15 (Kcal/hm°C). Calcular la distribución de temperaturas en el plano normal al eje axial en $z=L_z/2$

Solución:

a) De la ecuación 3.4-2(6) y con las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

$$T(z, \frac{L_z}{2}) = 400 \sum_{i=1}^4 \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} \cdot \frac{1}{\xi_i R} \frac{\sinh(\xi_i \frac{L_z}{2})}{\sinh(\xi_i L_z)}$$

siendo

$$\xi_1 R = 2,404$$

$$\xi_2 R = 5,52$$

$$\xi_3 R = 8,65$$

$$\xi_4 R = 11,59$$

para el punto $r=0, L_z/2$

$$T(0, \frac{L_z}{2}) = 400 \cdot 0,233 = 93,2 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

3.3-4.3. Cilindro semiinfinito con convección (Fig.3.3-4.4).

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < r < R \\ 0 < z \end{matrix} \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 3.4-4; (2).

Aplicando la transformada finita de Hankel a los miembros de (1) se tiene

$$\int_0^R \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) r J_0(\xi r) dr = \left[r \frac{\partial T}{\partial r} J_0(\xi r) - r \xi T J_0'(\xi r) \right]_0^R - \xi^2 \int_0^R r T J_0(\xi r) dr$$

y si ξ_i es una raíz de $J_0(\xi_i R) + \frac{h}{\xi_i} J_0'(\xi_i R) = 0$

el primer término del segundo miembro es cero, y

$$\int_0^R \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} r J_0(\xi r) dr = \frac{d^2 \bar{T}_{w,0}}{dz^2}$$

y finalmente

$$\frac{d^2 \bar{T}_{w,0}(\xi, z)}{dz^2} = \xi^2 \bar{T}_{w,0}(\xi, z) \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \frac{\xi_i^2}{(a_i^2 + \xi_i^2)} \bar{T}_{w,0}(\xi_i, z) \quad (4)$$

Resolviendo (3) por transformadas de Laplace

$$\bar{T}_{w,0}(\xi, z) = A(\xi) \cosh(\xi z) + \frac{B(\xi)}{\xi} \sinh(\xi z) \quad (5)$$

y por las condiciones (2)

$$\bar{T}_{w,0}(\xi, z) = \bar{T}_{w,0}(\xi, 0) \exp(-\xi z) = \int_0^R T(r) r J_0(\xi r) \exp(-\xi r) dr \quad (6)$$

y finalmente por (4)

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{(a_i^2 + \xi_i^2)} \cdot \frac{J_1(\xi_i R)}{J_0^2(\xi_i R)} \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr \quad (7)$$

Para $T(r) = T_1$

$$\int_0^R T_1 r J_0(\xi_i r) dr = T_1 \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

$$T(r, z) = \frac{2T_1}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{(a_i^2 + \xi_i^2)} \frac{J_1(\xi_i R)}{J_0^2(\xi_i R)} \exp(-\xi_i z) \quad (8)$$

siendo $a_i = h/k$

Ejemplo 3.3-4.3.

La barra del ejemplo 3.4-2, en la base $z = 0$ tiene 200°C y las restantes superficies se encuentran en un medio a 0°C y con un coeficiente de convección radiación de $20 (\text{kcal/hm}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$.

Calcular:

- Distribución de temperaturas en el plano $z=L_2$
- Calor perdido al exterior
- Eficacia térmica
- Comparar los resultados anteriores con la hipótesis de temperatura constante en los planos perpendiculares al eje z .

Solución:

a) El problema se identifica con la ecuación 3.3-4.5 y su correspondiente figura. En $z=L_2$ se cumple

$$T(r, L_2) = \frac{2T_1 a_1}{R} \sum_{i=1}^5 \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_1^2) J_0(\xi_i R) [\xi_i \cosh(\xi_i L_2) + a_1 \sinh(\xi_i L_2)]}$$

siendo ξ_i las raíces de $a_1 J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Para $a_1 = \frac{h}{k} = 1,333$ las raíces de $a_1 R = 0,666$ tabla Apéndice I

$$R\xi_1 = 0,358 \quad R\xi_2 = 3,84 \quad R\xi_3 = 7,02 \quad R\xi_4 = 10,17 \quad R\xi_5 = 13,32$$

En el centro $r=0$ $T(0, \frac{L_2}{2}) \approx 32^\circ C$

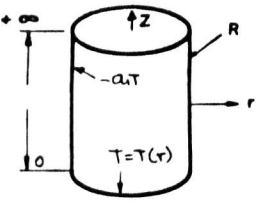
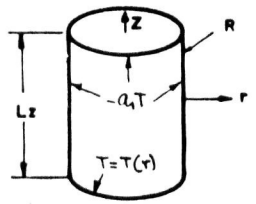
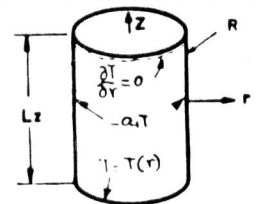
$$b) \quad q = -2\pi k \int_0^R \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} r dr$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{2T_1 k}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^3 J_1(\xi_i R) J_0(\xi_i r)}{(a_1^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \frac{[\xi_i \sinh(\xi_i L_2) + a_1 \cosh(\xi_i L_2)]}{[\xi_i \cosh(\xi_i L_2) + a_1 \sinh(\xi_i L_2)]}$$

$$y \text{ si } \int_0^R J_0(\xi_i r) r dr = \frac{R}{\xi_i^2} J_1(\xi_i R)$$

$$q = 2T_1 k a_1^2 \sum_{i=1}^4 \frac{\xi_i \sinh(\xi_i L_2) + a_1 \cosh(\xi_i L_2)}{[\xi_i \cosh(\xi_i L_2) + a_1 \sinh(\xi_i L_2)]} \cdot \frac{1}{(a_1^2 + \xi_i^2)} = 202 \text{ (kcal/h)}$$

$$c) \quad q/q_0 = \frac{202}{\pi R^2 + 2\pi R L_2 h T_1} = \frac{202}{659} = 0,306$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|---|---|
|  <p>Fif.3.3-4.4</p> | $T = T(r), \quad z = 0; \quad 0 < r < R$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{h}{k} T \quad r = R; \quad 0 < z$ $T = 0 \quad z = \infty$ $\frac{h}{k} = a_1$ | $T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_1^2) J_0^2(\xi_i R)} \frac{\exp(-\xi_i z)}{J_0^2(\xi_i R)} \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr$ <p>ξ_i, raíces de $a_1 J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$</p> <p>Si $T(x) = T_1$</p> $T(r, z) = \frac{2 T_1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_1(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_1^2) J_0^2(\xi_i R)} \frac{J_1(\xi_i R)}{J_0^2(\xi_i R)} \exp(-\xi_i z)$ |
|  <p>Fig.3.3-4.5</p> | $T = T(r) \quad z = 0; \quad 0 < r < R$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{h}{k} T \quad r = R; \quad 0 < z < L$ $\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{h}{k} T \quad z = L; \quad 0 < r < R$ $\frac{h}{k} = a_1$ | $T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_1^2) J_0^2(\xi_i R)} \frac{(\xi_i \cosh[(L-z)\xi_i] + a_1 \sinh[(L-z)\xi_i])}{(\xi_i \cosh(\xi_i L) + a_1 \sinh(\xi_i L))} \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr$ <p>ξ_i, raíces de $a_1 J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$</p> <p>Si $T(x) = T_1$</p> $T(r, z) = \frac{2 a_1 T_1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_1^2) J_0^2(\xi_i R)} \frac{(\xi_i \cosh[(L-z)\xi_i] + a_1 \sinh[(L-z)\xi_i])}{(\xi_i \cosh(\xi_i L) + a_1 \sinh(\xi_i L))}$ |
|  <p>Fig.3.3-4.6</p> | $T = T(r) \quad z = 0; \quad 0 < r < R$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{h}{k} T \quad r = R; \quad 0 < z < L$ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad z = L; \quad 0 < z < L$ $\frac{h}{k} = a_1$ | $T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_1^2) J_0^2(\xi_i R)} \frac{\cosh[(L-z)\xi_i]}{\cosh(\xi_i L)} \int_0^R T(r) r J_0(\xi_i r) dr$ <p>ξ_i, raíces de $a_1 J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$</p> <p>Si $T(x) = T_1$</p> $T(r, z) = \frac{2 T_1 a_1}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_1^2) J_0^2(\xi_i R)} \frac{\cosh[(L-z)\xi_i]}{\cosh(\xi_i L)}$ |

d) Por la ec. 3.2-3.2(5),

$$\eta = \frac{q}{q_0} = \frac{t_0 h (\sqrt{2} m L_z)}{\sqrt{2} m L_z} = 0,27 \quad m = \sqrt{\frac{h}{R R}} = 5,16$$

3.3-5.1. Tubo finito (Fig. 3.3-5.1)

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{matrix} R_0 < r < R_e \\ 0 < z < L_z \end{matrix} \quad (1)$$

Con las condiciones de la Fig. (3.3-5.1); (2)

Se define la transformada finita de Hankel de orden cero de la forma

$$\begin{aligned} \bar{L}_{H,0} [T(r,z)] &= \bar{f}_{H,0}(\xi,z) = \int_0^R T(r,z) r [J_0(\xi;r) Y_0(\xi;R_0) - J_0(\xi;R_0) Y_0(\xi;r)] dr \\ &= \int_{R_0}^{R_e} T(r,z) r C_0(\xi;r) dr \end{aligned} \quad (3)$$

siendo ξ_i las raíces positivas de

$$J_0(\xi_i;R_e) Y_0(\xi_i;R_0) = J_0(\xi_i;R_0) Y_0(\xi_i;R_e) \quad (4)$$

Aplicando a (1) la transformada de orden ν

$$\begin{aligned} \int_{R_0}^{R_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (T(r,z) r C_0(\xi;r)) dr &= \left[r \frac{\partial T}{\partial r} C_0(\xi;r) \right]_{R_0}^{R_e} - \int_{R_0}^{R_e} \frac{\partial T}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r C_0(\xi;r)) - C_0(\xi;r) \right) dr \\ \left[r \frac{\partial T}{\partial r} C_0(\xi;r) \right]_{R_0}^{R_e} &= 0 \\ - \int_{R_0}^{R_e} \frac{\partial T}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r C_0(\xi;r)) - C_0(\xi;r) \right] dr &= - \left[\xi_i r T C_0'(\xi;r) \right]_{R_0}^{R_e} + \xi_i \int_{R_0}^{R_e} T [r \xi_i C_0''(r \xi_i) + C_0'(r \xi_i)] dr \end{aligned}$$

y si J_ν y Y_ν son la solución de la ecuación de Bessel

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \left(1 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) T = 0$$

$$\bar{L}_{H,\nu} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (T(r,z)) \right] = - \left[\xi_i r T(r,z) C_0'(\xi;r) \right]_{R_0}^{R_e} - \xi_i \bar{f}_{H,\nu}(\xi,z)$$

y para $\nu=0$ y teniendo en cuenta (4) y $J_0(r) Y_0'(r) - Y_0(r) J_0'(r) = \frac{2}{\pi r}$

$$\bar{L}_{H,0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \right) T(r,z) \right] = \frac{2}{\pi} \frac{J_0(\xi R_0)}{J_0(\xi R_0)} T(R_0) + \frac{2}{\pi} T(R_0) - \xi^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, z) \quad (5)$$

y

$$\bar{L}_{H,0} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, z)}{dz^2} \quad (6)$$

con las condiciones (2) y de (5) y (6)

$$\frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, z)}{dz^2} = \xi^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, z) \quad (7)$$

Para hallar la inversión de (3), la condición de ortogonalidad

$$\int_{R_0}^{R_e} r C_0^2(\xi, r) dr = \frac{1}{2\xi} \left[\left(r \frac{dC_0}{dr} \right)^2 \right]_{R_0}^{R_e} = \frac{2}{\pi^2} \frac{[J_0(\xi R_0) - J_0^2(\xi R_0)]}{\xi^2 J_0^2(\xi R_0)}$$

y

$$T(r,z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0^2(\xi_i R_0) C_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R_0) - J_0^2(\xi_i R_e)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (8)$$

Resolviendo la ecuación (7) con las condiciones (2)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi, z) = \bar{f}_{H,0}(\xi, 0) \frac{\sinh[(Lz - z)\xi]}{\sinh(Lz\xi)} \quad (9)$$

y por la inversión (8)

$$T(r,z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0^2(\xi_i R_0) C_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R_0) - J_0^2(\xi_i R_e)} \frac{\sinh[(Lz - z)\xi_i]}{\sinh(Lz\xi_i)} \int_{R_0}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr \quad (10)$$

Para $T = T_1$

$$\int_{R_0}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr = \int_{R_0}^{R_e} T_1 r [Y_0(\xi_i R_0) J_0(\xi_i r) - J_0(\xi_i R_0) Y_0(\xi_i r)] dr \quad (11)$$

y si

$$\int_0^1 r^{\nu+1} Y_\nu(\xi_i r) dr = \left[\frac{r}{\xi_i} Y_{\nu+1}(\xi_i r) + \frac{2^{\nu+1}}{\xi_i^{2\nu+1}} \Gamma(\nu+1) \right]_0^1$$

la integral (11) vale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi} \left[R_e Y_0(\xi R_e) J_1(\xi R_e) - Y_0(\xi R_e) J_1(\xi R_e) R_e \right] - \frac{1}{\xi} \left[R_e J_0(\xi R_e) Y_1(\xi R_e) + \frac{2 R_e^2}{\xi} - R_e J_0(\xi R_e) Y_1(\xi R_e) - \frac{2 R_e^2}{\xi} \right] \\ & = \frac{1}{\xi} \left[Y_0(\xi R_e) (J_1(\xi R_e) R_e - J_0(\xi R_e) R_e) + J_0(\xi R_e) (R_e Y_1(\xi R_e) - Y_1(\xi R_e)) - \frac{2}{\xi} (R_e^2 - R_e^2) \right] \end{aligned}$$

3.3-5.2. Tubo finito Fig. (3.3-5.2)

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{matrix} R_0 < r < R_e \\ 0 < z < l \end{matrix} \quad (1)$$

con las condiciones de la Fig. (3.3-5-2); (2)

Se define la transformada finita de Hankel

$$\bar{L}_{H,0} [T(r,z)] \equiv \bar{f}_{H,0}(\xi,z) = \int_{R_0}^{R_e} T(r,z) r C_0(\xi r) dr \quad (2)$$

donde

$$C_0(\xi, r) = J_0(\xi, r) Y_0'(\xi, R_0) - J_0'(\xi, R_0) Y_0(\xi, r) \quad (3)$$

y ξ son las raíces de la ecuación

$$J_0(\xi, R_e) Y_0'(\xi, R_0) = J_0'(\xi, R_0) Y_0(\xi, R_e) \quad (4)$$

con la condición de ortogonalidad

$$\int_{R_0}^{R_e} r C_0^2(\xi, r) dr = \left[\frac{r^2}{2\xi} C_0'^2 \right]_0^{R_e} + \left[\frac{r}{2} C_0^2 \right]_{R_0}^0 \quad (5)$$

Por (3) y (4) y con la relación $J_0(\xi, r) Y_0'(\xi, r) - Y_0(\xi, r) J_0'(\xi, r) = \frac{2}{\pi \xi} r$

$$\int_{R_0}^{R_e} r C_0^2(\xi, r) dr = \frac{2}{\xi^2 \pi^2} \left[\frac{J_0'^2(\xi R_0)}{J_0^2(\xi R_e)} - 1 \right]$$

y la inversión de (2) vale

$$T(r,z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2 J_0'^2(\xi_n R_e) C_0(\xi_n r)}{J_0'^2(\xi_n R_0) - J_0^2(\xi_n R_e)} \cdot \bar{f}_{H,0}(\xi_n, z) \quad (6)$$

Aplicando a (1) la transformada anterior y en forma análoga al apartado (3.5-1)

$$\frac{d^2 \bar{f}_{H,0}}{dz^2} = \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, z) - \frac{2}{\pi} \frac{J_0'(\xi_i R_0)}{J_0(\xi_i R_0)} T_e \quad (7)$$

Resolviendo (7) con las condiciones (2)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi, z) = \frac{\sinh[(L_2 - z)\xi]}{\sinh(L_2 \xi)} \int_{R_0}^{R_e} T(r) r C_0(\xi r) dr + \frac{2 T_e \sinh(\xi z)}{\pi \xi^2 \sinh(\xi L_2)} \frac{J_0'(\xi R_0)}{J_0(\xi R_0)} [\cosh(\xi L_2) - 1] \quad (8)$$

y por la inversión (6)

$$T(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^3 J_0(\xi_i R_0) C_0(\xi_i r)}{J_0'(\xi_i R_0) - J_0'(\xi_i R_0)} \frac{\sinh[(L_2 - z)\xi_i]}{\sinh(L_2 \xi_i)} \int_{R_0}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr + \frac{T_e}{\xi_i^2} \frac{\sinh(\xi_i z)}{\sinh(\xi_i L_2)} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{J_0'(\xi_i R_0)}{J_0(\xi_i R_0)} (\cosh(\xi_i L_2) - 1) \quad (9)$$

3.3-5.3. Tubo finito con convección (Fig. 3.3-5.3)

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{matrix} R_0 < r < R_e \\ 0 < z < L_2 \end{matrix} \quad (1)$$

con las condiciones de la Fig.3.3-5-3 (2)

Aplicando la transformada finita de Hankel a la ecuación

(1) se tiene

$$\frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, z)}{dz^2} = \xi^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, z) \quad (3)$$

siendo

$$\bar{f}_{H,0}(\xi, z) = \int_{R_0}^{R_e} T(r, z) r C_0(\xi r) dr \quad (4)$$

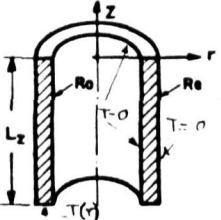
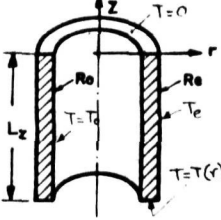
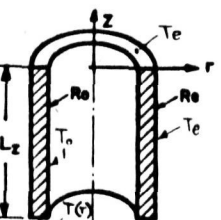
$$C_0(\xi, r) = J_0(\xi r) Y_0'(\xi R_e) - J_0'(\xi R_e) Y_0(\xi r) \quad (5)$$

donde ξ_i son las raíces positivas de la ecuación

$$[\xi_i Y_0'(\xi_i R_0) + a_1 Y_0(\xi_i R_0)] J_0'(\xi_i R_e) = [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)] Y_0'(\xi_i R_e) \quad (6)$$

y por la condición de ortogonalidad

$$\int_{R_0}^{R_e} r C_0^2(\xi_i, r) dr = \left[\frac{r^2}{2} C_0^2(\xi_i, r) \right]_0^{R_e} + \left[\frac{r^2}{2 \xi_i^2} (a_1^2 + \xi_i^2) C_0^2(\xi_i, r) \right]_{R_0}^{R_e} \quad (7)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|---|--|
|  <p>Fig. 3.3-5.1</p> | $T = T(r) \quad z=0; R_o < r < R_e$ $T = 0 \quad z=L_z; R_o < r < R_e$ $T = 0 \quad r=R_e; 0 < z < L_z$ $T = 0 \quad r=R_o; 0 < z < L_z$ | $T(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0^2(\xi_i R_e) C_0(\xi_i r)}{[J_0^2(\xi_i R_o) - J_0^2(\xi_i R_e)] \sinh(\xi_i L_z)} \int_{R_o}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr$ $C_0(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) Y_0(\xi_i R_o) - J_0(\xi_i R_o) Y_0(\xi_i r)$ $\xi_i, \text{ raíces de } J_0(\xi_i R_e) Y_0(\xi_i R_o) - J_0(\xi_i R_o) Y_0(\xi_i R_e) = 0$ |
|  <p>Fig. 3.3-5.2</p> | $T = T(r) \quad z=0; R_o < r < R_e$ $T = 0 \quad z=L_z; R_o < r < R_e$ $T = T_e \quad r=R_e; 0 < z < L_z$ $T = T_o \quad r=R_o; 0 < z < L_z$ | $T(r, z) = \text{solución fig. 3.3-5.1} + \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0^2(\xi_i R_e) C_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R_o) - J_0^2(\xi_i R_e)} \left[\frac{\sinh(\xi_i z)}{\xi_i^2 \sinh(\xi_i L_z)} (\cosh \xi_i L_z - 1) \cdot \frac{2}{\pi} \frac{J_0(\xi_i R_o)}{J_0(\xi_i R_e)} T_e - \frac{2}{\pi} T_o \right]$ <p>Valores de ξ_i y $C_0(\xi_i, r)$ de la fig. 3.3-5.1</p> |
|  <p>Fig. 3.3-5.3</p> | $T = T(r) \quad z=0; R_o < r < R_e$ $T = T_e \quad z=L_z; R_o < r < R_e$ $T = T_e \quad r=R_e; 0 < z < L_z$ $T = T_o \quad r=R_o; 0 < z < L_z$ | $T(r, z) = \text{solución fig. 3.3-5.1} + \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0^2(\xi_i R_e) C_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R_o) - J_0^2(\xi_i R_e)} \int_{R_o}^{R_e} T_e r C_0(\xi_i r) dr$ <p>$\xi_i, C_0(\xi_i r)$ de la fig. 3.3-5.1</p> |

se obtiene la inversión

$$T(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)] C_0(\xi_i r) \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z)}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 - (a_1^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R_0)} \quad (8)$$

Resolviendo (3) con las condiciones de (2)

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i, z) = \frac{\sinh[(L_2 - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_2)} \int_{R_0}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr \quad (9)$$

y finalmente

$$T(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)] C_0(\xi_i r)}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 - (a_1^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R_0)} \cdot \frac{\sinh[(L_2 - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_2)} \cdot \int_{R_0}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr \quad (10)$$

Ejemplo 3.3-5.3

Un tubo de acero de 0,20 m de diámetro exterior, 1 cm de espesor y 0,20 m de altura tiene en la superficie lateral $R_e = 0,10(m)$ $300(^{\circ}C)$. El medio ambiente en R_0 está a una temperatura de $0^{\circ}C$ y el coeficiente de convección radiación es de $45 (Kcal/hm^2 \ ^{\circ}C)$. La conductividad térmica del material es de $30 (Kcal/hm^{\circ}C)$.

Calcular:

- Distribución de temperaturas en las paredes $r = 0,09$ m
- Cantidad de calor que se pierde al exterior.
- Eficacia térmica
- Comparar los resultados anteriores con la hipótesis de temperatura constante en secciones perpendiculares del eje OZ.

Solución:

- El problema corresponde a la ecuación 3.3-5(e) véase figura correspondiente.

En la superficie $R_e = 0,10$ y por la simetría del problema

$$T(0,10,z) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i \omega(\xi_i z) + a_1 \sin(\xi_i z)]}{[(\xi_i^2 + a_1^2) L_z + 2a_1]} \cdot \frac{C_0(\xi_i R_e)}{C_0(\xi_i R_e)} \int_0^{L_z/2} 300 [\xi_i \omega(\xi_i z) + a_1 \sin(\xi_i z)] dz$$

donde ξ_i son las raíces de $t_0(\xi_i L_z) = \frac{2 \xi_i a_1}{\xi_i^2 - a_1^2}$

Para $a_1 = \frac{h}{k} = 1,5$ $\frac{C_0(\xi_i r)}{C_0(\xi_i R_e)} = 1$ en $r = R_e$

$\xi_1 L_z = 0,77$ $\xi_2 L_z = 3,32$ $\xi_3 L_z = 6,38$ $\xi_4 L_z = 9,48$ $\xi_5 L_z = 11,94$

y

$$T(0,10,z) = 600 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i \omega(\xi_i z) + a_1 \sin(\xi_i z)] [1 - \cos(\xi_i L_z) a_1 / \xi_i + \sin(\xi_i L_z)] C_0(\xi_i R_e)}{[(\xi_i^2 + a_1^2) L_z + 2a_1] C_0(\xi_i R_e)}$$

y dando valores se tiene para los puntos $z = 0,1$, $z = 0,0$

$T(0,10; 0,1) = 135 (^\circ C)$ $T(0,1; 0,0) = 253 (^\circ C)$

b) $q = -k 2\pi \int_0^{L_z} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{R_e} R_e dz = -1200 k \pi R_e \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[(1 - \cos(\xi_i L_z)) a_1 / \xi_i + \sin(\xi_i L_z)]}{[(\xi_i^2 + a_1^2) L_z + 2a_1]} \cdot [(\cos(\xi_i L_z) - 1) a_1 / \xi_i + \sin(\xi_i L_z)] \cdot \frac{C_0'(\xi_i R_e)}{C_0(\xi_i R_e)}$

donde

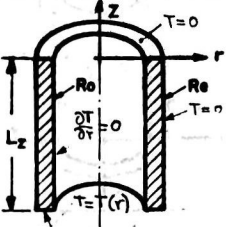
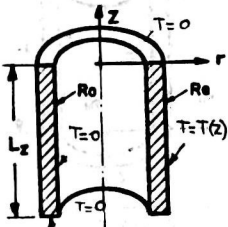
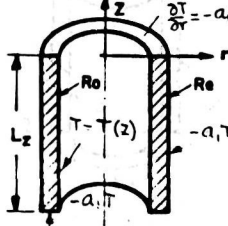
$$C_0'(\xi_i R_e) = K_1(\xi_i R_e) [\xi_i I_1(\xi_i R_e) + a_1 I_0(\xi_i R_e)] + I_1(\xi_i R_e) [\xi_i K_1(\xi_i R_e) - a_1 K_0(\xi_i R_e)]$$

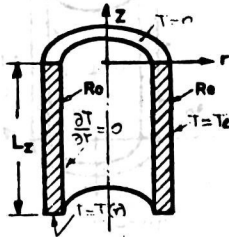
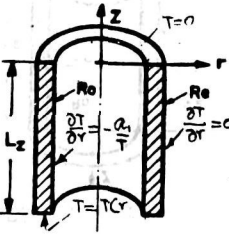
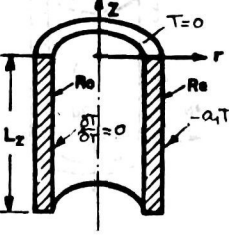
y $q \approx 264 \text{ (Kcal/h)}$

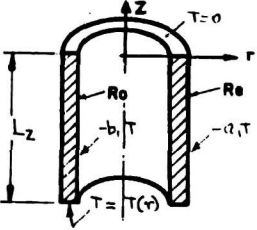
c)

$$\eta = \frac{264}{h \cdot 5 \cdot 300} = \frac{264}{45 \cdot 0,13 \cdot 300} = 0,15$$

d) La eficacia de una barra de temperatura constante en el eje OZ vale ec. 3.2-3.2(5)

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|--|---|---|
|  <p>Fig. 3.3-5 (c)</p> | $T = T(r) \quad z = 0 ; R_o < z < R_e$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = 0 ; 0 < z < L_z$ $T = 0 \quad r = R_e ; 0 < z < L_z$ $T = 0 \quad z = L_z ; R_o < r < R_e$ | $T(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0^2(\xi_i R_o) C_0(\xi_i r)}{J_0'(\xi_i R_o) - J_0^2(\xi_i R_e)} \frac{\sinh[(L_z - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_z)} \int_{R_o}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr$ $C_0(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i R_o) - J_0'(\xi_i R_o) Y_0(\xi_i r) = 0$ $\xi_i \text{ raíces de } J_0(\xi_i R_e) Y_0'(\xi_i R_o) - J_0'(\xi_i R_o) Y_0(\xi_i R_e) = 0$ |
|  <p>Fig. 3.3-5 (d)</p> | $T = T(z) \quad r = R_e ; 0 < z < L_z$ $T = 0 \quad r = R_o ; 0 < z < L_z$ $T = 0 \quad z = 0 ; R_o < r < R_e$ $T = 0 \quad z = L_z ; R_o < r < R_e$ | $T(r, z) = \frac{2}{L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_0(\xi_m r) I_0(\xi_m R_o) - K_0(\xi_m R_o) I_0(\xi_m r)}{K_0(\xi_m R_e) I_0(\xi_m R_o) - K_0(\xi_m R_o) I_0(\xi_m R_e)} \frac{\sinh(\xi_m z)}{\sinh(\xi_m L_z)} \int_0^{L_z} T(z) \sinh(\xi_m z) dz$ $\xi_m = \frac{m\pi}{L_z}$ |
|  <p>Fig. 3.3-5 (d)</p> | $T = T(z) \quad r = R_o ; 0 < z < L_z$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad z = 0, z = L_z ; R_o < r < R_e$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad r = R_e ; 0 < z < L_z$ $a_1 = \frac{h}{R}$ | $T(r, z) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i \omega(\xi_i z) + a_1 \sinh(\xi_i z)] C_0(\xi_i r)}{[(\xi_i^2 + a_1^2) L_z + 2 a_1] C_0(\xi_i R_o)} \int_0^{L_z} T(z) [\xi_i \cos(\xi_i z) + a_1 \sinh(\xi_i z)] dz$ $C_0(\xi_i r) = K_0(\xi_i r) [\xi_i I_1(\xi_i R_e) + a_1 I_0(\xi_i R_e)] + I_0(\xi_i r) [\xi_i K_1(\xi_i R_e) - a_1 K_0(\xi_i R_e)]$ $C_0(\xi_i R_o) \text{ substituir } r \text{ por } R_o$ $\xi_i \text{ raíces de } (\xi_i^2 - a_1^2) \tanh(\xi_i L_z) = 2 \xi_i a_1$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|---|--|
|  <p>Fig. 3.3-5.2</p> | $T = T(r) \quad z=0; R_0 < r < R_e$ $T = T_e \quad r=R_e; 0 < z < L_z$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r=R_0; 0 < z < L_z$ $T = 0 \quad z=L_z; R_0 < r < R_e$ | $T(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0^2(\xi_i R_e) C_0(\xi_i r)}{J_0'^2(\xi_i R_0) - J_0^2(\xi_i R_e)} \left[\frac{\sinh[(L_z - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_z)} \right] \int_{R_0}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr +$ $+ \frac{1}{\xi_i^2} \frac{\sinh(\xi_i z)}{\sinh(\xi_i L_z)} \cdot \frac{2 T_e J_0'(\xi_i R_0)}{\pi J_0(\xi_i R_e)} \left(\cosh(\xi_i L_z - 1) \right)$ $C_0(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i R_0) - J_0'(\xi_i R_0) Y_0(\xi_i r)$ $\xi_i, \text{ raíces de } J_0(\xi_i R_e) Y_0'(\xi_i R_0) - J_0'(\xi_i R_e) Y_0(\xi_i R_0) = 0$ |
|  <p>Fig. 3.3-5.3</p> | $T = T(r) \quad z=0; R_0 < r < R_e$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r=R_e; 0 < z < L_z$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad r=R_0; 0 < z < L_z$ $T = 0 \quad z=L_z; R_0 < r < R_e$ $\frac{h}{k} = a_1$ | $T(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 C_0(\xi_i r)}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 - (\xi_i^2 + a_1^2) J_0^2(\xi_i R_e)} \cdot$ $\cdot \frac{\sinh[(L_z - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_z)} \int_{R_0}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr$ $C_0(\xi_i r), \text{ fig. 3.3-5.2}$ $\xi_i, \text{ raíces } [\xi_i Y_0'(\xi_i R_0) + a_1 Y_0(\xi_i R_0)] J_0'(\xi_i R_e) - [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)] \cdot$ $\cdot Y_0'(\xi_i R_e) = 0$ |
|  <p>Fig. 3.3-5.4</p> | $T = T(r) \quad z=0; R_0 < r < R_e$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r=R_0; 0 < z < L_z$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad r=R_e; 0 < z < L_z$ $T = 0 \quad z=L_z; R_0 < r < R_e$ | $T(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 C_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_1^2) J_0'^2(R_0) - [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_1 J_0(\xi_i R_e)]^2} \frac{\sinh[(L_z - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_z)} \cdot$ $\int_{R_0}^{R_e} T(r) r C_0(\xi_i r) dr$ $C_0(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i R_0) - J_0'(\xi_i R_0) Y_0(\xi_i r), \quad \xi_i, \text{ raíces de}$ $Y_0'(\xi_i R_0) [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_1 J_0(\xi_i R_e)] - J_0'(\xi_i R_0) [\xi_i Y_0'(\xi_i R_e) + a_1 Y_0(\xi_i R_e)] = 0$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|--|--|---|
|  <p>Fig. 3.3-5.5</p> | $T=T(r) \quad z=0; R_0 < r < R_e$ $T=0 \quad z=L_z; R_0 < r < R_e$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -b_1 T \quad r=R_0; 0 < z < L_z$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad r=R_e; 0 < z < L_z$ $a_1 = \frac{h_1}{k} \quad b_1 = \frac{h_2}{k}$ | $T(r, z) = \frac{\sinh[(L_z - z)\xi_i]}{\sinh(\xi_i L_z)} \int_{R_0}^{R_e} T(r) C_0(\xi_i r) r dr \cdot$ $\cdot \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + b_1 J_0(\xi_i R_e)]^2 (J_0(\xi_i r) [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + b_1 J_0(\xi_i R_0)] - Y_0(\xi_i r) [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) +$ $+ a_1 J_0(\xi_i R_0)])}{(\xi_i^2 + b_1^2) [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 - (\xi_i^2 + a_1^2) [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + b_1 J_0(\xi_i R_e)]$ $C_0(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) [\xi_i Y_0'(\xi_i R_0) + a_1 Y_0(\xi_i R_0)] - Y_0(\xi_i r) [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]$ <p>ξ_i son las raíces de</p> $[\xi_i Y_0'(\xi_i R_0) + a_1 Y_0(\xi_i R_0)] [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + b_1 J_0(\xi_i R_e)] - [\xi_i Y_0'(\xi_i R_e) + b_1 Y_0(\xi_i R_e)] \cdot$ $\cdot [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)] = 0$ |

3.3-6.1. Paralelepípedo (Fig. 3.3-6.1)

En régimen estacionario y sin generación de calor en el interior del sólido se cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{array} \quad (1)$$

con las condiciones $T = T_1$ en el plano $y = L_y$ y $T = 0$ en los restantes planos (2), aplicando la transformada finita del seno de Fourier a (1)

$$\begin{aligned} \bar{L}_F^s \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] &= \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sin(\xi x) dx = \frac{\partial^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, z)}{\partial y^2} \\ \bar{L}_F^s \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] &= \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \sin(\xi x) dx = \frac{\partial^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, z)}{\partial z^2} \\ \bar{L}_F^s \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] &= \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sin(\xi x) dx = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \sin(\xi x) \right]_0^{L_x} - \xi \int_0^{L_x} \cos(\xi x) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = -\xi^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, z), \end{aligned}$$

puesto que $T = 0$ en $x = 0$ y $x = L_x$; $\xi = \frac{m\pi}{L_x}$

resultando la ecuación

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, z)}{\partial z^2} = -\xi^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, z) \quad (3)$$

con la inversión

$$T(x, y, z) = \frac{1}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{T}_F^s(\xi, y, z). \quad (4)$$

aplicando a la ec. (3) nuevamente la transformada finita de Fourier respecto a z y definida por

$$\bar{L}_F^{s'} \left[\bar{T}_F^s(\xi, y, z) \right] = \bar{T}_F^{s'}(\xi, y, \eta) = \int_0^{L_y} \bar{T}_F^s(\xi, y, z) \sin(\eta z) dz \quad ; \quad \eta = \pi p / L_z$$

resulta

$$\bar{L}_F^{s'} \left[\frac{\partial^2 \bar{T}_F^s}{\partial y^2} \right] = \frac{d^2 \bar{T}_F^{s'}(\xi, y, \eta)}{d y^2} \quad ; \quad \bar{L}_F^{s'} \left[\frac{\partial^2 \bar{T}_F^s}{\partial z^2} \right] = \eta^2 \bar{T}_F^{s'}(\xi, y, \eta)$$

y la ecuación (3) se transforma en

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^{s'}}{d\eta^2} = (\xi^2 + \eta^2) \bar{f}_F^{s'} \quad (5)$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^s(\xi, \eta, z) = \frac{2}{L_z} \sum_{p=1}^{\infty} \sin(\eta z) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, \eta) \quad (6)$$

Resolviendo la ecuación (5) por transformadas de Laplace siendo

$$f(\xi) \equiv \int_0^{L_z} \exp(-s\eta) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, \eta) d\eta$$

resulta la ecuación

$$\bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, \eta) = A(\alpha) \cosh(\alpha \eta) + \frac{B(\alpha)}{\alpha} \sinh(\alpha \eta) \quad \text{donde} \quad \alpha^2 = \xi^2 + \eta^2$$

$$\text{En } \eta=0 \quad \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, \eta)=0 ; A(\alpha)=0 \quad \gamma \quad \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, \eta) = \int_0^{L_z} \sin(\eta z) \bar{f}_F^s(\xi, \eta, z) dz$$

$$\text{y si } \bar{f}_F^s(\xi, \eta, z) = \int_0^{L_x} \sin(\xi x) dx = 2T_1/\xi \quad \text{para } m \text{ impar}$$

$$\bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z) = \frac{4T_1}{\xi \eta} \frac{\sinh(\alpha \eta)}{\sinh(\alpha L_y)} \quad (7)$$

Por la inversión (4) y teniendo en cuenta (3)

$$T(x, y, z) = 16 T_1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sinh(\alpha y)}{\sinh(\alpha L_y)} \frac{\sin(\eta z)}{\eta} \frac{\sin(\xi x)}{\xi} \quad (8)$$

y sustituyendo los valores de α, η y ξ

$$T(x, y, z) = \frac{16 T_1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sinh \left[\left(\sqrt{\left(\frac{2m+1}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{2p+1}{L_y} \right)^2} \right) \pi y \right]}{\sinh \left[\left(\sqrt{\left(\frac{2m+1}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{2p+1}{L_y} \right)^2} \right) \pi L_y \right]} \cdot \frac{\sin \left[\left(\frac{2m+1}{L_x} \right) \pi x \right]}{\left(\frac{2m+1}{L_x} \right)} \cdot \frac{\sin \left[\left(\frac{2p+1}{L_y} \right) \pi z \right]}{\left(\frac{2p+1}{L_y} \right)} \quad (9)$$

3.3-6.2. Paralelepípedo con caras a distinta temperatura

En el interior del paralelepípedo se cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{matrix} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{matrix} \quad (1)$$

con las condiciones de la Fig. 3.3-6.2.

Aplicando el tratamiento del apartado 3.3-6.1 y con la misma nomenclatura se tiene

$$\bar{T}_F^{(s)}(\xi, \eta, z) = A(\alpha) \cosh(\alpha z) + \frac{B(\alpha)}{\alpha} \sinh(\alpha z) \quad (2)$$

$$\text{En } z=0 \quad \bar{T}_F^{(s)}(\xi, 0, \eta) = A(\alpha) = \frac{4T_2}{\xi \eta}$$

$$\text{En } z=L_z \quad \bar{T}_F^{(s)}(\xi, L_z, \eta) = \frac{4T_1}{\xi \eta} = \frac{4T_2}{\xi \eta} \cosh(\alpha L_z) + \frac{B(\alpha)}{\alpha} \sinh(\alpha L_z)$$

$$\text{y } \bar{T}_F^{(s)}(\xi, \eta, z) = \frac{4}{\xi \eta} \left[\frac{T_2 \sinh[\alpha(L_z - z)] + T_1 \sinh(\alpha z)}{\sinh(\alpha L_z)} \right] \quad (3)$$

y por las inversiones (4) y (7) apartado 3.6-1

$$T(x, y, z) = 16 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{T_2 \sinh[\alpha(L_z - z)] + T_1 \sinh(\alpha z)}{\xi \eta \sinh(\alpha L_z)} \right] \sin(\xi x) \sin(\eta y) \quad (4)$$

$$\text{siendo } \xi = (2m+1) \frac{\pi}{L_x} \quad \eta = (2p+1) \frac{\pi}{L_z} \quad \alpha^2 = \xi^2 + \eta^2$$

3.3-6.3. Paralelepípedo con convección

En el interior del paralelepípedo se cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{array} \quad (1)$$

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier en la forma del apartado 3.3-1.5,

$$\left[\bar{T}_F^c \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \right] = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \omega_1(\xi, x) + \xi_1 T_1 \sin(\xi_1 x) \right]_0^{L_x} - \xi_1^2 \int_0^{L_x} T_1 \omega_1(\xi_1 x) dx = -\xi_1^2 \bar{T}_F^c(\xi, \eta, z)$$

puesto que si $\frac{\partial T}{\partial x} = a_1 T$ el término entre corchetes vale cero, donde ξ_1 son las raíces de $\xi_1 t_2(\xi_1 L_x) = a_1$, análogamente

$$\left[\bar{T}_F^c \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \right] = \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c(\xi, \eta, z)}{\partial \eta^2} \quad \left[\bar{T}_F^c \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \right] = \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c(\xi, \eta, z)}{\partial z^2}$$

y la ec. (1) toma la forma

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_F^c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^c}{\partial z^2} = \xi_i^2 \bar{f}_F^c$$

con la inversión

$$T(x, y, z) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 + a_i^2}{L_x [\xi_i^2 + a_i^2] + a_i} \cdot \cos(\xi_i x) \bar{f}_F^c(\xi_i, y, z) \quad (3)$$

aplicando nuevamente la transformada finita del coseno de Fourier en la dirección Z a la ec. (2), si

$$\bar{f}_F^c [\bar{f}_F^c(\xi, y, z)] = \bar{f}_F^{c'}(\xi, y, \eta) = \int_0^{L_z} \bar{f}_F^c \cos(\eta_j z) dz$$

resulta

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^{c'}}{dy^2} = (\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{f}_F^{c'} \quad (4)$$

donde η_j son las raíces de la ecuación $\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_z) = a_i$ con la inversión

$$\bar{f}_F^c(\xi, x, y) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + a_i^2) \cos(\eta_j L_z)}{L_z (\eta_j^2 + a_i^2) + a_i} \bar{f}_F^{c'}(\xi, y, \eta) \quad (5)$$

Resolviendo la ec. (4) por transformadas de Laplace

$$\bar{f}_F^{c'}(\xi, y, \eta) = A(\sigma) + \cosh(\sigma y) + \frac{B(\sigma)}{\sigma} \sinh(\sigma y)$$

donde $\sigma_i^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$

$$\text{y si en } y=0 \quad A(\sigma) = T_1 \quad \text{y en } y=L_y \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -a_1 T$$

$$\bar{f}_F^{c'}(\xi, y, \eta) = \frac{T_1 [a_1 \sinh[\sigma(L_y - y)] + \sigma \cosh[\sigma(L_y - y)]]}{[a_1 \sinh(\sigma L_y) + \sigma \cosh(\sigma L_y)]} \quad (6)$$

y por las inversiones (3) y (5) se obtiene

$$T(x, y, z) = 4T_1 a_1^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j z) [a_1 \sinh[\sigma(L_y - y)] + \sigma \cosh[\sigma(L_y - y)]]}{[L_x (\xi_i^2 + a_i^2) + a_i] [L_z (\eta_j^2 + a_i^2) + a_i] [a_1 \sinh(\sigma L_y) + \sigma \cosh(\sigma L_y)] \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j z)} \quad (7)$$

Ejemplo 3,3-6

Un cubo de 2 m de lado y conductividad térmica 1 (Kcal/hm°C) tiene una de sus caras a 50°C, Calcular:

- Distribución de temperaturas dentro del cuerpo si las temperaturas en las superficies de las restantes caras se encuentran a 0°C.
- Distribución de temperaturas en el cuerpo si las restantes caras se encuentran en un medio a 0°C y con un coeficiente de convección radiación de 5 (Kcal/hm² °C).
- Eficacia térmica en el caso (b).
- Comparar el caso (c) con una distribución de temperaturas constante en los planos paralelos a la cara que se encuentra a 50°C.

Solución:

a) La distribución de temperaturas viene dada por la ecuación 3.3-6.1(8)6(9), con

$$L_x = L_z = 2 \quad y \quad T_1 = 50,$$

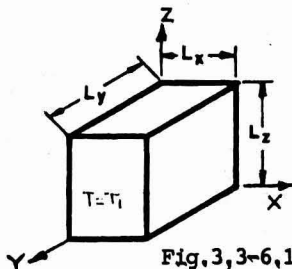
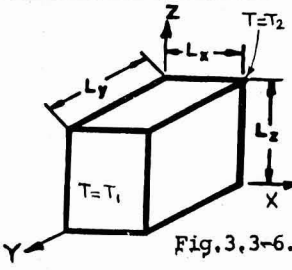
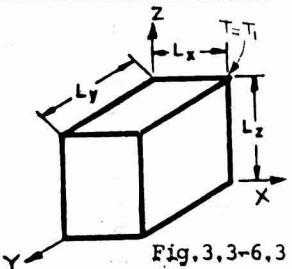
así, para el punto 1.1.1, en el centro del cubo $T(1,1,1) = 90.3^\circ$

b) Con la ecuación 3.3-6.3(7) y si

$$L_z = L_x \quad \xi_i = \eta_i \quad \sigma = \sqrt{2} \xi_i = \xi_i \sqrt{2}$$

donde ξ_i y si $\xi_i \tanh(\xi_i L_x) = a_i = 5$ las raíces valen

$$\xi_1 = 0.714 \quad \xi_2 = 2.15 \quad \xi_3 = 3.61 \quad \xi_4 = 5.10 \quad \xi_5 = 6.60$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 3,3-6.1</p> | $T = T_1 \quad y = L_y$ $T = 0 \quad \left \begin{array}{l} x = 0 \\ x = L_x \end{array} \right.$ $T = 0 \quad y = 0$ $T = 0 \quad \left \begin{array}{l} z = 0 \\ z = L_z \end{array} \right.$ | $T(x, y, z) = 16 T_1 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sinh(\alpha y)}{\sinh(\alpha L_y)} \frac{\sin(\eta z)}{\eta} \frac{\sin(\xi x)}{\xi}$ $\xi = (2m+1)\frac{\pi}{L_x} ; \quad \eta = (2p+1)\frac{\pi}{L_z} ; \quad \alpha^2 = \eta^2 + \xi^2$ |
|  <p>Fig. 3,3-6.2</p> | $T = T_1 \quad y = L_y$ $T = T_2 \quad y = 0$ $T = 0 \quad \left \begin{array}{l} x = 0 \\ x = L_x \end{array} \right.$ $T = 0 \quad \left \begin{array}{l} z = 0 \\ z = L_z \end{array} \right.$ | $T(x, y, z) = 16 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{T_2 \sinh[\alpha(L_y - y)] + T_1 \sinh(\alpha y)}{\xi \eta \sinh(\alpha L_y)} \sin(\xi x) \sin(\eta z)$ $\xi = (2m+1)\frac{\pi}{L_x} ; \quad \eta = (2p+1)\frac{\pi}{L_z} ; \quad \alpha^2 = \xi^2 + \eta^2$ |
|  <p>Fig. 3,3-6.3</p> | $\frac{\partial T}{\partial x} = -a_1 T, \quad x = L_x; \quad T = T_1, \quad y = 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = a_1 T, \quad x = 0; \quad a_1 = \frac{h}{k}$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -a_1 T, \quad z = L_z$ $\frac{\partial T}{\partial y} = a_1 T, \quad y = L_y$ $\frac{\partial T}{\partial z} = a_1 T, \quad z = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -a_1 T, \quad z = L_z$ | $T(x, y, z) = 4 a_1^2 T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j z)}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1][L_z(\eta_j^2 + a_1^2) + a_1]} \cdot$ $\cdot \frac{[a_1 \sinh \sigma(L_y - y) + \sigma \cosh(L_y - y)]}{[a_1 \sinh(\sigma L_y) + \sigma \cosh(\sigma L_y)] \cos(\xi_i L_x) \cos \eta_j L_z}$ <p>$\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$, ξ_i y η_j, raíces de</p> <p>$\xi_i \tanh(\xi_i L_x) = a_1, \quad \eta_j \tanh(\eta_j L_z) = a_1$</p> |

así, para el punto $x=y=z=2$ $T(2,2,2) = 1,4(^{\circ}\text{C})$

La cantidad de calor que se pierde por las 5 caras vale

$$q = -k \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx dz = 4kT_1 a^4 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{\xi_i^2 \eta_j^2 [L_x (\xi_i^2 + a^2) + a_i] [L_z (\eta_j^2 + a^2) + a_j]} \cdot \frac{1}{[a_1 \sinh(\sigma L_y) + \sigma \cosh(\sigma L_y)]}$$

y dando valores se obtiene

$$q = 3290 \text{ (Kcal/h)}$$

$$c) \quad q/q_0 = \frac{3290}{h \cdot 50.5} = 0,658$$

d) Teniendo en cuenta el apartado 3.2-3.1

$$\eta = \frac{t_{ch} m L}{m L} \quad m = \sqrt{\frac{h p}{k a}} = \sqrt{\frac{5,8}{4}} = \sqrt{1,45}$$

$$\eta = 0,158$$

Los resultados c) y d) son como puede observarse muy diferentes debido a que en el cubo considerado la hipótesis de planos paralelos con temperatura constante se aleja de la realidad para las dimensiones del problema.

3.3-7. Métodos numéricos en la solución de problemas de transmisión de calor por conducción en régimen estacionario y sin generación de calor.

Los métodos numéricos tienen su principal campo de aplicación cuando se tratan problemas de cuerpos compuestos, es decir yuxtapuestos o en el caso de configuraciones geométricas complicadas.

a) Mallas cuadradas

Consideremos una sección recta de un material de conductividad térmica constante, Fig. 3.3-7(a), en régimen estacionario, y

con una distribución de temperaturas en los puntos de la malla cuadrada, T_1, T_2, T_3, T_4 y T_0 . De acuerdo con la ley de Fourier se cumple

$$q_{1,0} + q_{2,0} + q_{3,0} + q_{4,0} = 0 \quad (1)$$

6

$$\frac{k}{L_x} (T_1 - T_0) + \frac{k}{L_x} (T_3 - T_0) + \frac{k}{L_y} (T_2 - T_0) + \frac{k}{L_y} (T_4 - T_0) = 0 \quad (2)$$

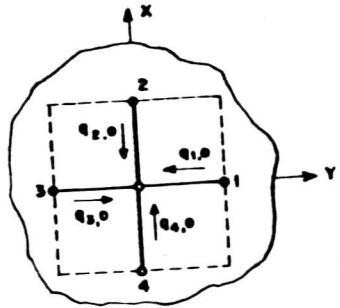


Fig. 3.3-7(a)

y si $L_x = L_y$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0 = 0 \quad (3)$$

La extensión de la ec.(3) a n puntos de la sección recta considerada, da lugar a n ecuaciones lineales, cuya solución con las temperaturas de contorno, determinan la distribución de temperaturas en cada punto de la malla. El grado de aproximación a la solución exacta, está determinado por las dimensiones de la malla elegida. En efecto, dentro del recinto se cumple

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Aplicando el desarrollo de Taylor a la ec.(4) en los puntos 1, 2, 3 y 4 se tiene

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 + L_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 + \frac{L_x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_0 + \dots \\ T_2 &= T_0 + L_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 + \frac{L_y^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_0 + \dots \\ T_3 &= T_0 - L_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 + \frac{L_x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_0 - \dots \\ T_4 &= T_0 - L_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 + \frac{L_y^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_0 - \dots \end{aligned} \quad (5)$$

y considerando una aproximación de segundo orden y si $L_x = L_y = L$

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 4T_0 + L^2 \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_0 \right] \quad (6)$$

y la solución de la ec.(3), es tanto más exacta cuanto menor es el término que afecta a L^2 es decir, cuando las dimensiones de

la malla disminuyen. Por otra parte, cuando aumenta el número de retículos, aumenta también el número de ecuaciones. lo que se traduce en mayor capacidad y tiempo en un ordenador digital. El compromiso entre capacidad de memoria y exactitud, dependen de cada caso particular, si bien es cierto, que para los problemas más frecuentes los ordenadores actuales poseen suficiente rapidez y capacidad.

b) Mallas diagonales (Fig. 3.3-7(b))

El operador de Laplace es invariante para una rotación de ejes y reemplazando L por $\sqrt{2}L$ se obtiene

$$T_5 + T_6 + T_7 + T_8 = 4T_0 + 2L^2 \left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_0 \right] \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_0 \approx \frac{T_5 + T_6 + T_7 + T_8 - 4T_0}{4L^2} \quad (8)$$

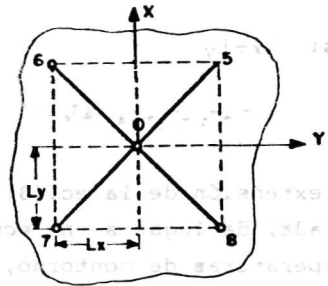


Fig. 3.3-7(b)

c) Mallas irregulares (Fig. 3.3-7(c))

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{0,1} \approx \frac{T_1 - T_0}{a_1 L_x}; \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{0,2} \approx \frac{T_2 - T_0}{b_1 L_y}; \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{0,3} \approx \frac{T_3 - T_0}{L_x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{0,4} \approx \frac{T_4 - T_0}{L_y}$$

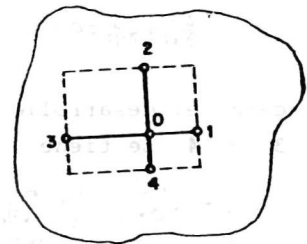


Fig. 3.3-7(c)

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_0 \approx \frac{2}{a_1 L_x + L_x} \left(\frac{T_2 - T_0}{a_1 L_x} + \frac{T_1 - T_0}{L_x} \right) = \frac{2(T_1 - T_0)}{a_1 L_x^2 (1 + a_1)} + \frac{2(T_2 - T_0)}{L_x^2 (1 + a_1)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_0 \approx \frac{2}{b_1 L_y + b_2 L_y} \left(\frac{T_2 - T_0}{b_1 L_y} + \frac{T_4 - T_0}{b_2 L_y} \right) = \frac{2(T_2 - T_0)}{b_1 L_y^2 (b_2 + b_1)} + \frac{2(T_4 - T_0)}{b_2 L_y^2 (b_1 + b_2)} \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_0 \approx \frac{2}{L_x^2} \cdot \frac{1}{(1 + a_1)} \left[\frac{T_1 - T_0}{a_1} + T_2 - T_0 \right] + \frac{2}{L_y^2} \left[\frac{T_2 - T_0}{b_1} + \frac{T_4 - T_0}{b_2} \right] \cdot \frac{1}{(b_2 + b_1)}$$

d) Condiciones de contorno

Pared plana con convección Fig.

3.3-7(d)

$$k \frac{L_y}{2} (T_1 - T_0) + k L_x (T_2 - T_0) + \frac{k L_y}{2} (T_3 - T_0) + h L_x (t - T_0) = 0 \quad (12)$$

y si $L_x = L_y$

$$\frac{1}{2} (T_1 + T_3 + 2T_2) + \frac{h}{k} t = T_0 \left(2 + \frac{h}{k} \right) \quad (13)$$

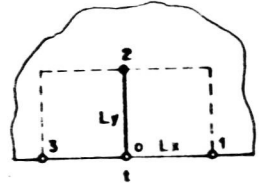


Fig. 3.3-7(d)

Paredes en ángulo recto y convección

Fig.3.3-7(d-1). Para $L_x = L_y$

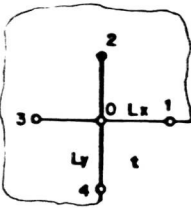


Fig.3.3-7(d-1)

$$T_3 + T_2 + \frac{1}{2} (T_1 + T_4) + \frac{h}{k} L_x t = \left(\frac{h}{k} L_x + 3 \right) T_0 \quad (14)$$

Paredes en ángulo recto y convección, Fig. 3.3-7(d-2)

$$\frac{1}{2} (T_3 + T_4) + \frac{h}{k} L_x t = \left(\frac{h}{k} L_x + 1 \right) T_0 \quad (15)$$

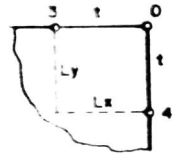
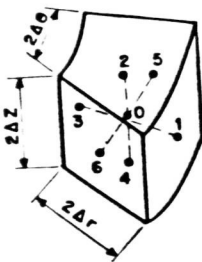


Fig.3.3-7(d-2)

e) Mallas en coordenadas cilíndricas

Fig. 3.3-7(e).



La ecuación general

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$$

puede escribirse

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (16)$$

y en diferencias finitas

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{0,1} \approx \frac{T_1 - T_0}{\Delta r} ; \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{0,2} \approx \frac{T_2 - T_0}{\Delta r} ; \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{0,3} \approx \frac{T_3 - T_0}{\Delta r} ; \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{0,4} \approx \frac{T_4 - T_0}{\Delta r}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)_{0,5} \approx \frac{T_5 - T_0}{\Delta \theta} ; \left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)_{0,6} \approx \frac{T_6 - T_0}{\Delta \theta} ; r\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{0,1} \approx \left(r_0 + \frac{\Delta r}{2}\right) \left(\frac{T_1 - T_0}{\Delta r}\right) \quad (17)$$

$$r\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{0,3} \approx \left(r_0 - \frac{\Delta r}{2}\right) \left(\frac{T_3 - T_0}{\Delta r}\right)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]_0 \approx \frac{2r_0 + \Delta r}{2 \Delta r^2} (T_1 - T_0) + \frac{2r_0 - \Delta r}{2 \Delta r^2} (T_3 - T_0) \quad (18)$$

y finalmente

$$\frac{1}{r_0} \left[\frac{2r_0 + \Delta r}{2 \Delta r^2} (T_1 - T_0) + \frac{2r_0 - \Delta r}{2 \Delta r^2} (T_3 - T_0) + \frac{r_0 (T_5 - T_0)}{\Delta \theta^2} + \frac{r_0 (T_6 - T_0)}{\Delta \theta^2} + \frac{(T_2 - T_0)}{r_0 \Delta z^2} + \frac{T_4 - T_0}{r_0 \Delta z^2} \right] = 0 \quad (19)$$

Los casos de mallas desiguales o superficies de contorno son tratadas de la misma forma que los casos b), c) y d).

f) Mallas en coordenadas esféricas Fig. 3.3-7(f)

La ecuación general es

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} \right] = 0 \quad (20)$$

y en forma análoga al caso anterior e)

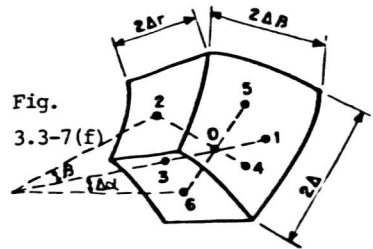


Fig.

3.3-7(f)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2} \left[\frac{(r_0 + \Delta r/2)^2 (T_1 - T_0)}{\Delta r^2} + \frac{(r_0 - \Delta r/2)^2 (T_3 - T_0)}{\Delta r^2} + \frac{(T_5 - T_0)}{\Delta \alpha^2 \sin^2 \beta_0} + \frac{(T_6 - T_0)}{\Delta \alpha^2 \sin^2 \beta_0} + \frac{\sin(\beta_0 + \Delta \beta/2) (T_2 - T_0)}{\Delta \beta^2 \sin \beta_0} \right. \\ \left. + \frac{\sin(\beta_0 - \Delta \beta/2) (T_4 - T_0)}{\Delta \beta^2 \sin \beta_0} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

g) Mallas triangulares Fig. 3.3-7(g)

Las coordenadas de los puntos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 son:

- D) $(x+a; y)$ 2) $(x+\frac{a}{2}; y+\frac{\sqrt{3}}{2}a)$; 3) $(x-\frac{a}{2}; y+\frac{\sqrt{3}}{2}a)$
 A) $(x-a; y)$ 5) $(x-\frac{a}{2}; y-\frac{\sqrt{3}}{2}a)$ 6) $(x+\frac{a}{2}; y-\frac{\sqrt{3}}{2}a)$

La ecuación dentro del recinto

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Desarrollando por Taylor la función T_1, T_2, \dots, T_6

$$\begin{aligned} T_1 - T_0 &= a \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 + \frac{a^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_0 + \dots \\ T_2 - T_0 &= a \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 \right] + \dots \\ &\vdots \\ T_6 - T_0 &= a \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 \right] + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

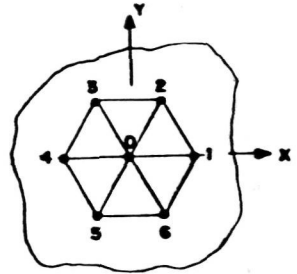


Fig. 3.3-7(g)

con aproximación de segundo orden

$$\sum_{i=1}^6 T_i - 6T_0 = \frac{3a^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (23)$$

y

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2}{3a^2} (T_1 + T_2 + \dots + T_6 - 6T_0) \quad (24)$$

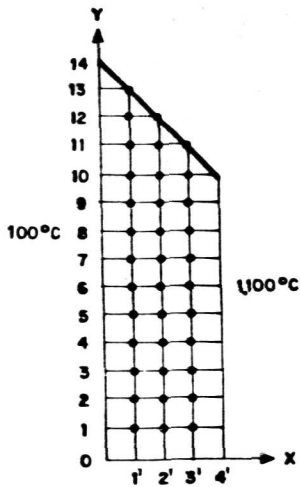
Ejemplo 3.3-7

Calcular el ejemplo 3.3-2.8 por métodos numéricos.

Solución:

a) Considerando una malla cuadrada de $0,1 \cdot 0,1$ m de lados se obtiene para un octavo de la sección la figura a), compliéndose las relaciones

$$T_{0,1} = T_{0,2} = \dots = T_{0,14} = 100 \text{ (C)}$$



$$T_{0,4'} = T_{1,4'} = \dots = T_{10,4'} = 1100 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

$$T_{1,1'} = T_{1,1'} ; T_{1,2'} = T_{1,2'}$$

$$T_{12,1'} = T_{12,2'} ; T_{11,2'} = T_{12,3'} ; T_{10,3'} = T_{11,4'}$$

y en cada punto de la malla

$$T_a + T_b + T_c + T_d = 4T_o$$

donde a , b , c y d son las temperaturas de los puntos adyacentes y la temperatura del punto central.

La solución de las ecuaciones aplicadas a todos los puntos de la malla da los valores que se indican en la Tabla (b).

TABLA b

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1' | 350 | 349 | 348 | 347 | 347 | 347 | 346 | 342 | 335 | 320 | 292 | 252 | 205 | 152 |
| 2' | 600 | 599 | 598 | 597 | 596 | 596 | 594 | 588 | 572 | 552 | 499 | 417 | 311 | - |
| 3' | 850 | 850 | 849 | 847 | 846 | 846 | 845 | 842 | 836 | 810 | 755 | 586 | - | - |

La cantidad de calor que se pierde al exterior para el octante

$$\frac{q}{z} = k \sum \Delta T = 0,1 [125 + 249,1 + 248 + 248 + 247 + 247 + 246 + 242 + 235 + 220 + 192 + 152 + 105 + 52 + \frac{27,25}{2}] = 282,4 \text{ (kcal/h.m)}$$

y para toda la sección recta

$$\frac{q}{z} = 8 \cdot 282,4 = 2.259,2 \text{ (kcal/h.m)}$$

3.3.8. Métodos gráficos en la solución de problemas de transmisión de calor por conducción en régimen estacionario y sin generación de calor.

Los métodos gráficos tienen su aplicación en formas geométricas complicadas. Su base se encuentra en las ecuaciones dadas en el apartado 3.3.2. Las líneas isotermas dentro de un recinto son perpendiculares a las líneas adiabáticas. Como aplicación, consideremos el ejemplo 3.3-2.8, donde la distribución de líneas isotérmicas y líneas adiabáticas se representan en la Fig. 3.3-8(a).

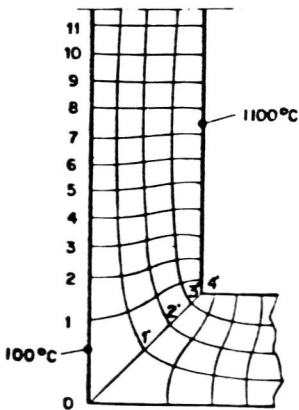


Fig. 3.3-8(a)

La cantidad de calor por unidad de altura que pasa a través del elemento $0,1; 1,1$ vale

$$\left(\frac{q}{z}\right)_{0,1} = k (T_{1,1} - 100) \frac{\overline{1,1'}}{\overline{1,0}} \quad (1)$$

este calor atraviesa toda la zona de las adiabáticas 1 y 0 y se escribe

$$\left(\frac{q}{z}\right)_{0,1} = \left(\frac{q}{z}\right)_{1,1} = \left(\frac{q}{z}\right)_{2,1} \quad (2)$$

Si los cuadriláteros curvilíneos se han construido de tal manera que la suma de los dos lados opuestos son iguales se cumple

$$\frac{\overline{1,1'}}{\overline{1,0}} \approx \frac{\overline{1,2'}}{\overline{1,2}} \approx \frac{\overline{1,3'}}{\overline{2,3}} \quad \text{y} \quad 1100 - 100 = \left(\frac{q}{z}\right)_{0,1} \cdot \frac{1}{k} (1 + 1 + 1) = \frac{4}{k} \left(\frac{q}{z}\right)_{0,1} \quad (3)$$

si el número de cuadriláteros fuese n , se tiene

$$\Delta T = \frac{n}{k} \left(\frac{q}{z}\right)_{0,1} \quad (4)$$

Análogamente, la cantidad de calor que atraviesa las isotermas $0,1; 1,2; 2,3; \dots 10,11$ y $1,1; 1,1; 1,2 \dots$

$$\frac{q}{z} = \left(\frac{q}{z}\right)_{0,1} + \left(\frac{q}{z}\right)_{1,2} + \dots = n k (T_1 - T_0) \quad (5)$$

y la cantidad de calor total teniendo en cuenta (4) y (5)

$$\left(\frac{q}{2}\right) = \frac{m}{n} (T_4' - T_0)$$

y si por la Fig. 3.3-8(a) $m = 11,5$ y $n = 4$

$$\frac{q}{2} \approx 0,1 \cdot \frac{11,5}{4} \cdot (1100 - 100) = 282,5 \text{ (Kcal/octante.h)}$$

y para toda la sección $8 \cdot 282,5 = 2200 \text{ (Kcal/h)}$. Como puede observarse, los resultados coinciden, aun dentro del error que se comete al construir las isotérmicas y adiabáticas en escala reducida. Pueden observarse resultados coincidentes con métodos analíticos aumentando la escala del dibujo y con trazado cuidadoso de los cuadriláteros curvilíneos.

3.3.9. Métodos analógicos en la solución de problemas de transmisión de calor por conducción en régimen estacionario y sin generación de calor.

Los métodos analógicos tienen su base en la solución de la ecuación de Laplace aplicado a fenómenos; eléctricos, de difusión o de mecánica de fluidos, entre otros. Aunque en muchos casos, las soluciones se obtienen más fácilmente por los métodos analíticos, numéricos o gráficos, los métodos analógicos pueden ser adecuados en sistemas de 3 dimensiones, si bien es necesario, disponer de un equipo experimental adecuado y un estudio detallado de la analogía y transformación de las condiciones de contorno. El tratamiento de los múltiples sistemas es extenso, y por ello, nos limitamos a los fundamentos de las analogías eléctricas, remitiendo al lector a la bibliografía para casos específicos.

Consideremos la sección recta de un cuerpo de conductividad térmica constante y con temperaturas constantes T_e y T_i en los contornos exterior e interior, Fig. 3.3-9(a). La resistencia térmica puede sustituirse por la resistencia eléctrica equivalente, y la distribución de temperaturas por la distribución de potenciales. El conocimiento de éstos últimos lleva al conocimiento del campo de temperaturas. De la misma forma que se obtienen soluciones por métodos numéricos, se pueden plantear ecuaciones con resistencias eléc-

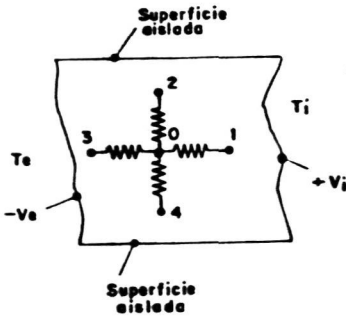


Fig. 3.3-9(a)

tricas finitas, equivalentes a elementos finitos del material. Así, para el punto cero, se tiene para las intensidades

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0 \quad (1)$$

y también

$$\frac{V_1 - V_0}{R_{1,0}} + \frac{V_2 - V_0}{R_{2,0}} + \frac{V_3 - V_0}{R_{3,0}} + \frac{V_4 - V_0}{R_{4,0}} = 0 \quad (2)$$

La relación entre resistencias térmicas vale

$$R_{Tc} = \frac{1}{kL} \equiv R$$

Si toda la sección recta se sustituye con una red de resistencias con malla cuadrada, y teniendo en cuenta los valores de las resistencias en la zona de contorno, que pueden ser de ramas desiguales, al aplicar los potenciales $+V_i$, $-V_e$ a las superficies interna y externa, se pueden medir con un potenciómetro los potenciales en los distintos nudos de la red. Por la correspondencia de $V_i - V_e$ con $T_i - T_e$, se obtiene la distribución de temperaturas buscada. La exactitud del método depende del calibrado de las resistencias y del potenciómetro utilizado.

Los problemas tridimensionales, se pueden resolver con mallas tridimensionales y utilizando el mismo procedimiento. Con sistemas de coordenadas cilíndricas hay que tener en cuenta las ecuaciones en diferencias finitas del apartado 3.3.7.

La malla de resistencias, puede sustituirse por papel de resistencia conocida, y medir los potenciales de la forma descrita anteriormente. Este papel suele ser de gran calidad y con varias capas de carbón. Obteniéndose una resistencia de 1500-4000 Ω /cuadrado con una variación del orden de 10%. Con el mismo procedimiento suelen utilizarse láminas metálicas perforadas con resistencias adecuadas.

La solución de problemas tridimensionales puede lograrse más comodamente, por medio de soluciones electrolíticas entre electrodos de formas variadas que simulan las superficies isotermales.

3.3.10. Métodos aproximados

La solución de los problemas de transmisión de calor por conducción y régimen estacionario puede hacerse por distintos métodos como se ha visto en los capítulos anteriores. Cuando se trata de problemas complicados, bien por su naturaleza, o por necesitarse medios experimentales o de cálculo no disponibles, puede hacerse hipótesis simplificadas para lograr soluciones aproximadas por distintos métodos.

Ejemplo 3.3-10(a)

Calcular la cantidad de calor que se pierde a través de las paredes de un horno con dimensiones interiores $2.2.2 \text{ (m}^3\text{)}$. El espesor de las paredes es de 0.4 m y la conductividad térmica media del material de las paredes es de $0.1 \text{ (Kcal/hm}^\circ\text{C)}$. Las temperaturas de las superficies interiores y exteriores son de 1100°C y 100°C respectivamente. Aplíquese criterios:

- a) analíticos
- b) numéricos
- c) gráficos
- d) analógicas
- e) empíricos

Solución:

a) Descomponiendo el horno en elementos se puede obtener

- 6 caras de 2.2 m^2 cada una
- 12 aristas de 2 m de longitud y sección de $0.4.0.4 \text{ m}^2$
- 8 vértices de $0.4.0.4.0.40 \text{ m}^3$

Por el ejemplo 3.3-2.8

$$R_{Tc} = \frac{1}{2,2} \left(\frac{h^{\circ}C(m \text{ de altura de sección recta})}{Kcal} \right)$$

Calor perdido a través de la sección recta para 1 m de altura
 2200 (Kcal/h m)

Calor perdido por 4 caras de 1 m de altura sin efectos angulares

$$\frac{q}{2} = k L \frac{T_1 - T_e}{\Delta x} = 0,1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{(1100 - 100)}{0,4} = 2000 \text{ (Kcal/h m)}$$

Calor perdido por m de arista de $0,40, 0,40 \text{ m}^2$ de sección recta

$$\frac{2200 - 2000}{4} = 50 \text{ (Kcal/h m arista)}$$

Aplicando los valores anteriores a los elementos del horno se tiene

$$6 \text{ paredes planas de } 2,2 \text{ m}^2 \cdot 250 \text{ (Kcal/h m}^2) = 6000 \text{ (Kcal/h)}$$

$$12 \text{ aristas de } 2 \text{ (m)} \cdot 50 \text{ (Kcal/h m)} = 1200 \text{ (Kcal/h)}$$

$$\text{Calor perdido despreciando los vértices} = 7200 \text{ (Kcal/h)}$$

b) Por el ejemplo 3.3-7

Calor perdido por m de arista de $0,40, 0,40$ de sección recta

$$\frac{2259 - 2000}{4} = 64,75 \text{ (Kcal/h m)}$$

Aplicando la superposición de elementos del horno

$$\text{Calor perdido por 6 caras de } 2,2 \text{ m}^2 = 6000 \text{ (Kcal/h)}$$

$$\text{Calor perdido por 12 aristas de } 2 \text{ m} = 1544 \text{ (Kcal/h)}$$

$$\text{Calor total despreciando los vértices} = 7544 \text{ (Kcal/h)}$$

c) Por el ejemplo 3.3-8 los resultados son prácticamente iguales al apartado b).

d) Aplicando resultados analógicos

$$R_{Tc} = \frac{1}{k} \frac{\log_2 \left(\frac{L_e}{L_i} \right) - a}{b} \quad \text{para } \left(\frac{L_e}{L_i} \right) \geq 1,4 \quad \begin{matrix} a = 0,023 \\ b = 2,92 \end{matrix} \quad (d)$$

$$R_{Tc} = \frac{1}{k} \frac{\log_2 \left(\frac{L_e}{L_i} \right)}{3,47} \quad \text{para } \left(\frac{L_e}{L_i} \right) \leq 1,35$$

aplicando la ecuación (d)

$$R_{Tc} = \frac{1}{0,1} \frac{\log_2 \frac{2,8}{2} - 0,023}{2,92} = 0,421$$

$$\frac{q}{Z} = \frac{1000}{0,421} = 2371 \quad (\text{Kcal/hm})$$

y en forma análoga a a) y b)

$$\text{Calor perdido por arista} = \frac{371}{4} = 92,7 \quad (\text{Kcal/h})$$

$$\text{Calor perdido por 6 caras} = 6000 \quad (\text{Kcal/h})$$

$$\text{Calor perdido por 12 aristas} = 2226 \quad (\text{Kcal/h})$$

$$\text{Calor perdido despreciando los vértices} = 8226 \quad (\text{Kcal/h})$$

e)

El método empírico más utilizado en el cálculo de pérdidas de calor en hornos de forma paralelepípedica se basa en la ecuación

$$q = k S \frac{T_i - T_e}{\Delta x}$$

donde $S = S_p + S_A + S_v$ los subíndices p, A, v se refieren a paredes, aristas y vértices (longitudes interiores).

$$S_A = \Delta x (\text{espesor}) \cdot \text{longitud} \cdot 0,54 \quad \text{si } \frac{\Delta x}{5} < \text{longitud}$$

Si una longitud $x, y, z \leq \Delta x/2$ se desprecian las dimensiones de las cuatro aristas correspondientes a la dimensión afectada.

Si 2 longitudes son menores que $\Delta x/5$

$$S = 2,78 \cdot \Delta x \cdot \text{dimensión interior máxima} \cdot \log\left(\frac{S_e}{S_i}\right)$$

donde S_e y S_i son las superficies exteriores e interiores.

Si las tres longitudes son menores que $\frac{\Delta x}{5}$; $S = 0,79 \sqrt{S_e S_i}$
finalmente

$$S_v = 0,15 \Delta x^2$$

Aplicando la ecuación e) a nuestro problema

$$S_p = 3(2.4) = 24 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$S_A = 12 \cdot 2 \cdot 0,54 \cdot 0,40^2 = 5,18 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$S_v = 8 \cdot 0,15 \cdot 0,40^2 = 0,19 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$q = 29,37 \cdot \frac{1000}{0,4} \cdot 0,1 = 7342 \text{ (Kcal/h)}$$

Resumen:

| | |
|------------------|-------------|
| Método analítico | 7200 Kcal/h |
| " numérico | 7544 " |
| " gráfico | 7544 " |
| " analógico | 8266 " |
| " empírico | 7342 " |

Como puede observarse los resultados son concordantes y no se necesitan tratamientos más refinados como pueden ser los métodos de superposición de campos de temperaturas en las zonas en que se ha descompuesto el horno.

Nomenclatura del Capítulo 3 (véase capítulos 1 y 2).

Bibliografía

ADDER, R., Application de la representation analogique des champs thermiques bidimensionnels permanents par feuille conductrice, Journal International de la Transmission de la Chaleur Tome II pag. 716, Paris (1961).

ARPACI, V.S., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley, Publ.Co. Londres, (1966).

ASHRAE, Handbook of Fundamentals American Society of Heating Refrigeration and Air Conditioning Engineers, New-York (1968).

BORY, Ch., Resistances Thermiques de contac. Journal Int. de la Transmission de la Chaleur Tome I, 94-97, Paris (1961).

BROCKERHOFF, P., Thermal Insulation Behaviour of Closely Packed Fiber Insulation at High Temperature and High Pressures, Verfahrenstechnik II, 4, (1977).

BRUNNOT, A.W. y otros, Thermal Contac Resistance of Laminated and Machined Joints, ASME, April, pag. 253-56, (1949).

CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C., Operational Methods in Applied Mathematics, Oxford (1953).

CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C., Conduction of Heat in Solids. 2nd Ed. Oxford (1956).

CASH, D.R. y otros, Aproximate Optimum Fin Design for Boiling Heat Transfer, Journal Heat Transfer, 93 C, 19-24 (1971).

CHURCHILL, R.V., Modern Operational Mathematics in Engineering. McGraw-Hill, (1944) 2nd Ed. (1958).

CINELLI, G., An Extension of the Finite Hankel Transforms and Applications, Int.J.Eng.Sci. 3, 539 (1965).

- COOPER, M.G. y otros, Thermal Contac Conductance of Metalic Surfa
ces in Contact Trans. ASME, J.of Heat Transfer C 85-1, 15-24
(1963).
- CRANK, J., The Mathematics of Diffusion, Oxford (1956).
- DELAVALT, H., Les transformations integrales a plusieurs variables
et leur applications, Gauthier-Villars, Paris (1961).
- DHAR, P.L., ARORA, P.C. Optimum Design of Finned Surfaces, J.Fran
klin Inst. 301, 349 (1976).
- DITKIN, V.A. and PAUDNIKOV, A.P., Integral Transforms and Operatio
nal Calculus, Pergamon Press, Oxford (1965).
- DOETSCH, G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation,
Springer Verlag, Berlin, (1937).
- DOETSCH, G., Handbuch der Laplace Transformation, Band I, Band 2,
Verlag, Birkhauser, Basel (1950) y (1955).
- DONELLY, R.G. y otros, Industrial Thermal Insulation, ORNL/TM-5283
Oak Ridge Nat.Lab. (EE.UU) (1976).
- DUNDERS, J. and PANEK, C., Heat Conduction Between Bodies with Wavy
Surfaces, Int.J.of Heat and Mass Transfer, 19, 721 (1976).
- DURAND, E., Electrostatique, Tome I, II, III, Masson, Paris (1966).
- DUSINBERRE, Numerical Analysis of Heat Flow, McGraw-Hill, New-York
(1949).
- ELROD, H.G., Two Simple Theorems for Establisng Bounds on the to
tal Heat Flow in Steady State Heat Conduction Problems with Con
vective Boundary Conditions, J. of Heat Transfer, Ilbruan, (1974).
- ERINGER, A.C., The Finite Sturm-Liouville Transforms and Applica
tions Quant.J.Math. Oxford (2) 5, 120 (1954).
- FENECH, H. and ROHSENOW, W.M., Prediction of Thermal Conductance
of Metalic Surfaces in Contact ASME (Journal of Heat Transfer C
85, 1, 15-24 (1963).

- GRADSHTEYN, I.S. and RYZHIK, I.M., Tables of Integral Series and Products, Academic Press (1965).
- HSU, Y.Y., Analysis of Boiling on a Fin. NASA-TNO-4947 (1968).
- IBELE, W., Modern Developments in Heat Transfer, Academic Press, New-York (1963).
- KANAGER, M.G., Thermal Insulation in Criogenic Engineering (Tradu cido del ruso). Israel Programm for Scientific Translation Ltd. Jerusalem (1969).
- KAYS, M.K., LONDON, A.L., Compact Heat Exchangers, McGraw-Hill, New-York (1958).
- KERN, D.Q. and KRAUSS, A.P., Extended Surface Heat Transfer, McGraw Hill, New-York (1972).
- KINGERY, W.D., Properties Measurements at High Temperatures, Jhon Wiley and Sons, New-York (1959).
- KINGERY, W.D. y otros, Developments of Ceramic Insulating Materials for High Temperature Use, ASME, April, (1954).
- KOBER, H., Dictionary of Conformal Representations, Dover Publ.Inc. (1951).
- KANTOROVICH, L.V. and KRILOV, V.I., Aproximate Methods in Higher Analysis, Interscience Publ.Inc. New-York (1958).
- KARPLUS, W.J., Analog. Simulation, Mc.Graw-Hill, New-York (1958).
- LABRE, J., Representation Electrique de Champs Thermiques par re-sean de resistance Journals International de la Transmission de la Chalem, Tome II, p. 759, Paris (1961).
- LIEBMAN, G., Resistance Network Analogues, Journal International du Calcul Analogique, p. 364, Paris, Sepbre. (1955).
- MALLOY, J.F., Thermal Insulation, Van Nostrand, Reinhold Pub.Co., New-York (1969).
- MASLIYAK, J.H. and NANDAKUMAR, K., Heat Transfer in Internally

- Finned Tubes, J.Heat Transfer 98, 257 (1976).
- NESSI, A. et NISSOLE, L., Methods graphiques pour l'etude des installations de chauffage, Dunod, Paris (1929).
- OZISIK, M.N., Boundary Value Problems of Heat Conduction, Int. Text.Book, Scranton Pa. (1968).
- O'KEEFE, W., Thermal Insulation Power, 118(8), 21 (1974).
- PAPOULIS, A., The Fourier Integral and its Applications, McGraw Hill (1963).
- PERRY, J.H., Chemical Engineers Handbook, Fourth Ed. McGraw-Hill New-York (1963).
- PETRIAN, G., La theorie des fonctions de Bessel, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris (1955).
- PRATT, A.W., Thermal Conductivity, Vol. I, Academic Press, London (1969)
- SCHNEIDER, P.J., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley Pub. Co. Cambridge, Mass. (1955).
- SCHUCH, H., Heat Transfer in Structures, Pergamon Press (1965).
- SPIERS, H.M., Technical Date on Fuel. British National Committee World Power Conference, London (1962).
- SNEDDON, I.N., Fourier Transforms, McGraw-Hill (1952).
- SNEDDON, I.N., The Use of Integral Transforms., McGraw-Hill (1972).
- SCUTWELL, R.V., Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford (1956).
- TOULOUKIAN, Y.S., Thermophysical Properties of Matter. The TPRC. Date Series, IFI/Plenum Press, New-York (1970).
- TRANter, C.J., Integral Transform in Mathematical Physics, Jhon Wiley and Sons., Londres (1956).
- WARM SCHUTZ in HOCHBAU Deutsche Norme, August (1969), September (1974).

WEEHSLER, A.E., Thermal Insulation Systems NASA-SP-5027, Washington D.C. (1967).

WILSON, L.E. and NICKELL, Re. Applications of Finite Element Method to Heat Conduction Analysis Nucl. Eng. and Design 4, 1 (1966).

CAPITULO 4

TRANSMISION DE CALOR EN REGIMEN ESTACIONARIO CON GENERACION DE CALOR

INTRODUCCION

La generación de calor en la superficie o en el interior de un cuerpo es consecuencia de transformaciones físicoquímicas de la materia en general. En forma global pueden distinguirse:

- 1) Fenómenos nucleares de fisión o fusión y de las partículas o radiaciones producidas por mecanismos relacionados con las interacciones de la materia.
- 2) Generación de calor en la materia por la presencia de campos electromagnéticos.
- 3) Reacciones químicas.
- 4) Generación de calor por fenómenos mecánicos, tales como fricción o choque.

Los apartados anteriores cubren un amplio campo de aplicaciones industriales tanto en régimen estacionario como transitorio. En los aspectos que se estudian en el capítulo 4, se trata en primer lugar de conocer la naturaleza de los focos generadores de calor y su distribución espacial para aplicar posteriormente las ecuaciones de transmisión de calor. Para ello resulta conveniente analizar de una forma general los aspectos térmicos de los apartados 1), 2), y 3), por ser los más importantes.

El apartado 4), por su naturaleza transitoria, encuadra mejor en los capítulos siguientes. Para mayor conocimiento de los fenómenos se recomienda al lector la bibliografía de este ca

pítulo.

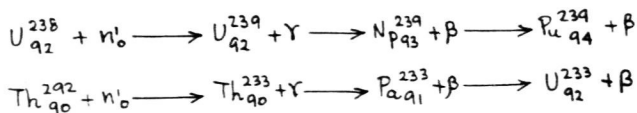
1. Fenómenos de fisión nuclear

Son consecuencia del comportamiento de los neutrones con los distintos isótopos de átomos pesados. Los isótopos de importancia industrial a escala de los reactores nucleares son los de uranio y torio que existen en la naturaleza con un valor medio de composición isotópica U_{92}^{234} (0,0058 %), U_{92}^{235} (0,72 %), U_{92}^{238} (99,274 %) y para los minerales de torio el isótopo más abundante es Th_{90}^{232} con trazas de otros isótopos.

Los efectos de choques entre neutrones con la materia dependen de la energía de los primeros y de la naturaleza de la última. Se denominan isótopos *fisibles* aquellos átomos que se fisionan por neutrones de cualquier energía, y son de importancia primordial en los reactores nucleares los isótopos Pu_{94}^{239} , U_{92}^{235} y U_{92}^{233} . Son isótopos *fisionables* aquellos átomos que se fisionan con neutrones de energía ≥ 1 MeV y los más importantes son U_{92}^{238} y Th_{90}^{232} .

La energía desprendida por cada fisión es de 200 MeV que comparada con 4 eV por átomo para la reacción química $C + O_2 \rightarrow CO_2$ da idea de la densidad de energía de la energía nuclear de fisión frente a las reacciones químicas muy exotérmicas.

Los choques de neutrones con la materia se extienden desde tipo elástico análogo al choque de bolas de billar hasta la absorción de los neutrones por los núcleos produciendo nuevos isótopos. De entre estos últimos son de máxima importancia la formación de Pu_{94}^{239} y U_{92}^{233} por captura de neutrones en la zona de energía 0,1 MeV



Los isótopos que por captura de neutrones originan isótopos fisibles se denominan *fértiles* y así los elementos U_{92}^{238} y Th_{90}^{232}

son fértiles y fisionables y su comportamiento, para fisión o captura este determinada por las secciones eficaces correspondientes para una determinada energía de los neutrones. En la tabla 4(a) se dan valores medios de parámetros del comportamiento de isótopos importantes con neutrones térmicos y rápidos. Los reactores nucleares comerciales con el ciclo del uranio producen los isótopos de Pu en mayor o menor proporción, En los reactores reproductores la producción de isótopos fisibles por captura de neutrones es superior a la de isótopos fisibles y fisionables consumidos y así un reactor de este tipo produce no solamente energía sino también combustible fisible para alimentar otros reactores.

La energía generada en un reactor nuclear es de origen térmico. El combustible se encuentra en forma sólida, en barras o placas envainadas con materiales poco absorbentes de neutrones. Dado que los neutrones producen fisiones, la distribución de focos térmicos dentro del combustible es la misma que la del flujo neutrónico en las barras o placas y la velocidad de generación de calor está dada por la velocidad de los procesos de fisión que tienen lugar en cada posición del combustible, es decir

$$Q = \sum_f \phi \cdot 200 \left(\frac{\text{MeV}}{\text{fisión}} \right) \quad (1)$$

donde \sum_f es la sección macroscópica de fisión $\sum_f = \sigma_f N_f$

σ_f , sección microscópica de fisión y N_f , el número de núcleos fisibles/cm³.

ϕ es el flujo neutrónico ($n^0/\text{cm}^2 \cdot \text{s}$) en el elemento de volumen considerado

$$Q = \sigma_f (\text{cm}^2) N_f \left(\frac{\text{núcleos}}{\text{cm}^3} \right) \phi \left(\frac{n^0}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}} \right) 200 \left(\frac{\text{MeV}}{\text{fisión}} \right) \quad (2)$$

La ec.(1) pone de manifiesto la variación de Q por la relación de σ_f con la energía de los neutrones y la modificación del flujo neutrónico, tanto en su composición de neutrones con mayor o menor energía por moderación en el medio, como por capturas de neutrones productivas y no productivas en los materiales del reactor.

TABLA 4-a

VALORES MEDIOS DE PARAMETROS NUCLEARES EN REACTORES TERMICOS (T) Y RAPIDOS (R)

| ISOTOPO | U_{92}^{238} | | U_{92}^{235} | | Pu_{94}^{239} | | U_{92}^{233} | |
|------------|----------------|------|----------------|------|-----------------|-------|----------------|-------|
| REACTOR | T | R | T | R | T | R | T | R |
| PARAMETRO | T | R | T | R | T | R | T | R |
| σ_f | - | 0,11 | 580 | 1,78 | 740 | 1,91 | 530 | 2,69 |
| ν | - | 2,61 | 2,42 | 2,50 | 2,90 | 2,96 | 2,5 | 2,57 |
| α | - | 1,44 | 0,172 | 0,24 | 0,365 | 0,231 | 0,093 | 0,108 |
| η | - | 0,07 | 1,06 | 1,01 | 1,12 | 1,40 | 1,28 | 1,32 |

σ_f , Sección eficaz microscópica de fisión expresada en barnios 1 barnio =

ν , Neutrones producidos por neutrón absorbido en una reacción de fisión.

α , Relación de secciones eficaces microscópicas de captura/fisión.

η , neutrones producidos por fisión por neutrón absorbido en el combustible.

tor. La generación de calor por fisiones es prácticamente instantánea extendiéndose desde 10^{-14} (s) para los neutrones producidos hasta 10^{-7} (s) de las radiaciones γ , que acompañan al proceso de fisión. La distribución de la energía asignada a los distintos componentes de la fisión es, por término medio, en MeV:

| | |
|--|---------|
| a) Energía cinética de fragmentos de fisición | 165 |
| b) Radiaciones γ instantáneas | 7 |
| c) Partículas β | 7 |
| d) Energía cinética de los neutrones | 5 |
| e) Radiaciones γ de productos de fisión | 6 |
| f) Neutrinos | 10 |
| | <hr/> |
| | 200 MeV |

La energía generada por fisiones en un reactor nuclear es del orden de 90-98% de la energía total, dependiendo del tipo de reactor y de la disposición de materiales estructurales, refrigerante y elementos combustibles. La energía restante se produce por los campos de radiaciones γ y partículas β así como por la moderación de neutrones en el refrigerante y materiales. En los reactores rápidos la moderación debe ser mínima para obtener un espectro de neutrones duro que favorezca las capturas en U_{92}^{238} para producir Pu_{94}^{239} .

Las partículas y radiaciones, en sus choques con la materia, producen transformaciones fisicoquímicas y desprendimiento de calor. Las primeras afectan a las propiedades de los materiales y el calor generado puede alterar las dimensiones o producir tensiones térmicas excesivas. Por todo ello, los aspectos térmicos de un reactor nuclear no quedan circunscritos solamente a los elementos combustibles, desde el punto de vista de la presencia de focos térmicos con generación de calor, sino que se extienden al comportamiento de los materiales bajo irradiación, lo que exige el conocimiento de flujos de partículas y variaciones dentro de los materiales y su absorción en función de los espesores, naturaleza y geometría. Las consideraciones anteriores se extienden a los pro-

blemas térmicos relacionados con el tratamiento de combustibles irradiados donde se genera calor por las especies radiactivas en transformación continua e igualmente de las aplicaciones de isótopos radiactivos, especialmente aquellas relacionadas con generación de energía en cantidades no muy elevadas pero de larga duración.

La transmisión de calor en cuerpos con generación de calor y régimen estacionario se estudia con la ecuación deducida en el capítulo 2 apartado 1

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - Q(x, y, z) \quad (3)$$

Cuando la conductividad térmica es isotrópica y constante dentro de un intervalo razonable de temperaturas, puede escribirse

$$\Delta^2 T = - \frac{Q}{k}(x, y, z) \quad (4)$$

En coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{Q(r, z)}{k} \quad (5)$$

y en coordenadas esféricas

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = - \frac{Q(r)}{k} \quad (6)$$

Las ecuaciones (4), (5), (6), con las condiciones de contorno en cada caso particular, determinan el campo de temperaturas impuesto por la presencia de los focos térmicos, las propiedades de los materiales y las condiciones de refrigeración. En la tabla 4(b) se dan valores de los combustibles y materiales estructurales más frecuentes en reactores nucleares.

Extendiendo las consideraciones sobre la aplicación de las ec. (3), (4) y (5) hay que considerar los valores de la conductividad térmica del combustible y vaina durante el quemado en el reactor. En una barra combustible con pastillas de UO_2 este material se resquebraja e hincha por efecto de los gases de fisión,

TABLA 4(b)
Propiedades de combustibles nucleares y vainas

| MATERIAL | ρ (g/cm ³) | C_p (Kcal/Kg°C) | k (Kcal/hm°C) | T (fusión) (°C) |
|--|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------|
| PLUTONIO | | | | |
| α (T < 100°C) | 19,7 | | 4,41 (0-100°C) | |
| β (117-200°C) | 17,7 | | 9,02 (0-100°C) | |
| γ (200-300°C) | 17,14 | | 10,9 (0-100°C) | |
| δ (300-475°C) | 16,02 | | 13,9 (0-100°C) | |
| ϵ (475-637°C) | 13,3 | | 13,6 (0-100°C) | 637 |
| TORIO | | | | |
| α (T < 1380°C) | | | | |
| β (1380-1690°C) | 11,6 | 0,028 | 38,1 (500°C) | 1690 |
| URANIO | | | | |
| α (T < 626°C) | 19,07 | 0,032 | 26,6 (500°C) | |
| β (662-769°C) | 18,10 | 0,043 | 38 (500°C) | |
| γ (769-1128°C) | 18 | | | |
| UO ₂ | 10,97 | 0,075 (100°C) 0,11 (2300°C) | 3,75 (500°C) 1,48 (2000°C) | 2750 |
| UO ₂ (80%)-PuO ₂ (20%) | 11,08 | 0,075 (100°C) 0,11 (2300°C) | 2,96 (500°C) 1,48 (200°C) | 2780 |
| ThO ₂ | 10,01 | 0,054 (25°C) 0,082 (2000°C) | 3,96 (500°C) 2,4 (1000°C) | 3300 |
| Zircaloy-2 | 6,57 | 0,072 (100°C) 0,085 (450°C) | 10,19 (100°C) 11,4 (450°C) | 1848 |
| Acero inoxidable (347) | 8,03 | 0,12 (0-100°C) | 12,7 (25°C) 18 (500°C) | 1400 |

además de los efectos de productos de fisión y su comportamiento con la vaina. El resultado es una pastilla deformada con puntos de contacto sobre la vaina llena de grietas, que dependen de la fabricación del combustible y de la forma de quemado en el reactor. La importancia del comportamiento del combustible en el reactor es primordial dado que las barras deben permanecer 3 años en funcionamiento, además de las paradas, puestas en marcha y variaciones de potencia.

La variación de la conductividad térmica con la temperatura se indica en la Fig. 4(a) para combustibles de UO_2 .

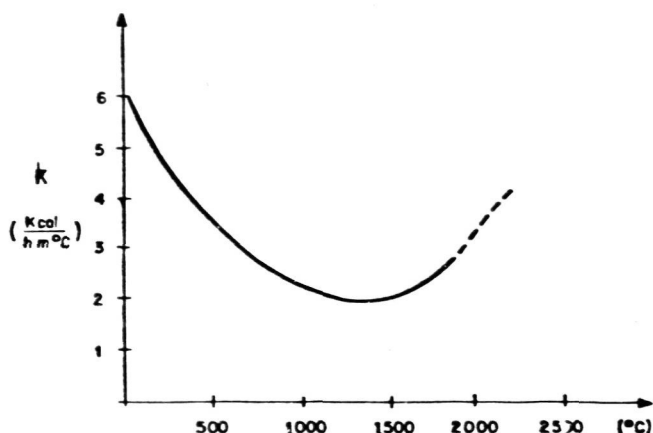


Fig. 4(a). Conductividad térmica del UO_2 irradiado.

Si la expresión de la conductividad térmica con la temperatura es una expresión no lineal, las ec. (4), (5), y (6) son no lineales y la solución tiene que hacerse por métodos numéricos, perdiéndose además las propiedades de superposición, que es la base

y fundamento de la generalidad de las ecuaciones de transmisión de calor y de otros campos análogos. Una solución razonable y muy utilizada es considerar un valor medio de k dado por

$$\bar{k} = \frac{\int_{T_1}^T k dT}{T - T_1}$$

o utilizando la transformación de Kirchoff (3) se transforma por las ecuaciones

$$\Theta = \int_{T_1}^T \frac{k}{k_1} dT \quad \text{la ec.}$$

$$\frac{k}{k_1} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{k}{k_1} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{k}{k_1} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

en la forma

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -\frac{Q}{k_0} \quad (6)$$

2. Generación de calor por fenómenos eléctricos y magnéticos

La materia en general, en presencia de campos eléctricos y magnéticos, genera calor por el paso de una corriente eléctrica a través de los circuitos que se forman entre los manantiales y sumideros de los campos anteriores. Desde el punto de vista térmico, es necesario conocer la distribución de focos térmicos con objeto de resolver las ecuaciones de distribución de temperatura con las condiciones de contorno de cada caso particular, y si los focos térmicos se generan por corrientes eléctricas, es necesario conocer estas últimas. La generación de calor por fenómenos eléctricos y magnéticos son en muchos casos indeseables, como sucede con las pérdidas en los conductores que transportan energía eléctrica o en las máquinas eléctricas de producción de transformación de esta energía.

En otras muchas aplicaciones, la energía eléctrica se transforma en energía térmica por las ventajas que pueda presentar frente a otros métodos de calentamiento, tales como

- Rendimiento 100% .
- Inercia térmica mínima.
- Limpieza.
- Control fácil.
- Ausencia de llamas
- Uniformidad.
- Calentamiento local.

- Utilización directa de las redes de energía.
- Procesos de calentamiento independientes.

En el marco de las aplicaciones es frecuente distinguir la generación de calor por

- a) Resistencias eléctricas
- b) Calentamiento por fenómenos de inducción
- c) Calentamiento dieléctrico
- d) Arcos eléctricos

a) *Resistencias eléctricas*

El paso de una corriente eléctrica continua a través de materiales conductores, metálicos y no metálicos genera calor por la conocida expresión

$$Q = RI^2$$

expresándose $Q (w)$ cuando R se expresa en (Ω) e I en (A) .

La generación de calor es uniforme en toda la masa del conductor siempre y cuando R e I sean constantes. En el caso de corriente alternas, la generación de calor es también uniforme para frecuencias inferiores, aproximadamente de 1000 (c/s) y en corrientes trifásicas

$$Q = 1,737 RI \cos \psi$$

donde $\cos \psi$ es conocido como factor de potencia. En un buen diseño con corriente alterna deben evitarse las inductancias y fases desequilibradas, para lograr un valor máximo de $\cos \psi$. La transmisión de calor de la resistencia pueden hacerse por convección, conducción o radiación de acuerdo con los criterios establecidos en el capítulo I. Las limitaciones de las resistencias eléctricas diseñadas para funcionar en estado sólido están dadas generalmente por la temperatura de fusión del material de la resistencia o por el medio ambiente, que puede atacar la resistencia produciendo alteraciones por corrosión, seguidas de posibles cambios dimensionales o estructuras del material.

Por la ec.(1) los focos térmicos se distribuyen uniformemente en la masa del conductor y el campo de temperaturas, como se verá más adelante, toma la forma de una parábola, cuyo valor máximo se encuentre en el eje de simetría.

Si la resistencia es función de T , como sucede en la mayoría de los materiales, la generación de calor no es uniforme y las distintas partes de la resistencias se comportan de forma diferente. Si la resistencia aumenta con T , se genera más calor en el centro y si la resistencia disminuye con T , sucede lo contrario. La distribución de corrientes tiende a oponerse a este fenómeno alcanzándose una situación de equilibrio dinámico entre corrientes, temperaturas y eliminación del calor generado. El fenómeno es tanto más acusado, cuanto mayores son las secciones de las resistencias y mayor la variación de R con T . En la tabla 4,3(a) se indican los materiales más frecuentes de resistencias eléctricas y en la Fig. 4.3(a) la resistencia específicas de grupos análogos.

Las resistencias eléctricas se acoplan a la forma de los hornos de utilización para obtener los flujos térmicos deseados. A Temperaturas elevadas, el mecanismo principal de transmisión de calor es la radiación, aplicándose los criterios dados en el capítulo 1. Temperaturas de 2000-3000(°C) con filamentos

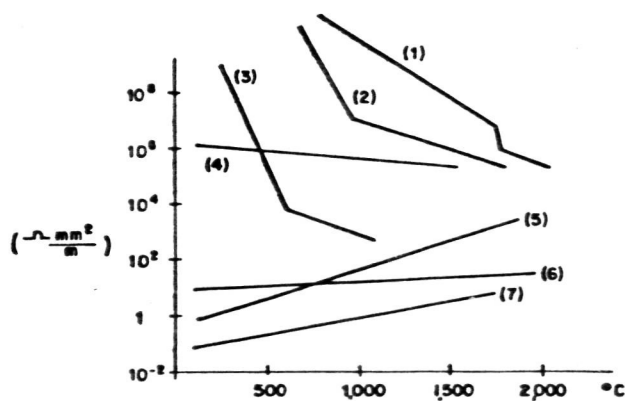


Fig. 4,3(a).

- | | |
|-------------------------|--------------|
| (1) Oxidos refractarios | (5) Carburos |
| (2) Oxidos refractarios | (6) Grafito |
| (3) Electrolitos | (7) Metales |
| (4) Semiconductores | |

adecuados se utilizan en lámparas conocidas como infrarrojo, con

TABLA 4-3(a). Propiedades eléctricas de materiales de resistencias

| MATERIAL | COMPOSICION | T_{max} (°C) | ρ_e ($\Omega \frac{mm^2}{m}$) | Coeficiente de temperatura, $\beta \cdot 10^6 (\% / ^\circ C)$ $R_e = R_0(1 + \beta \Delta T)$ |
|------------------------------|--|-------------------|---|---|
| Kanthal A | Cr (23%) - Al (6,2%) Co (1,9%) - Fe (68,5%) | 1300 | 1,39 | 48 (20-1300°C) |
| Kanthal A-1 | - | 1350 | 1,45 | 32 (20-1350°C) |
| Kanthal DSI | - | 1200 | 1,35 | 63 (20-1200°C) |
| Nicrome V | Ni (80%) - Cr (20%) | 1175 | 1,15 | 80 (20-1175) |
| Brightray | | | | |
| Pyroni | | | | |
| Nicrome | Ni (60%) - Cr (16%) | 950 | 1,10 | 140 (20-950°C) |
| Calomic | Fe (24%) | | | |
| Brightray B | | | | |
| Mangonic 3 | Ni (97%) - Mn (3) | 750 | 0,14 | 365 (20-750°C) |
| Platino | - | 1400 | 0,5 | |
| Platino-Rodio | Pt (87%) - Rh (13%) | 1540 | 0,5 | |
| Molibdeno | | 1600-2200 | 0,55 | |
| Tántalo | | 2000 | 0,60 | |
| Carburo de Silicio (SiC) | | 1400-1600 | 1,40.10 | |
| Carbón, grafito | | 2500-3000 | 9,5 | |
| Zirconia (ZrO ₂) | | 2400 | 10 | |

las cuales el calor por radiación se dirige por pantallas de forma parabólica, generalmente a la superficie del cuerpo receptor. Este sistema es de uso frecuente en el calentamiento de alimentos, secado de pinturas, y calentamiento de láminas de distintos materiales. Análogamente las resistencias se disponen en forma envainada en materiales adecuados tales como tubos, placas o cuerpos más complicados que se adaptan a las superficies que constituyen la carga. La separación entre la resistencia y la vaina se logra por medio de aislantes eléctricos en forma de polvo comprimido, o tubos. Son ejemplos bien conocidos, las planchas eléctricas, calentadores de inmersión, paneles, cintas flexibles con tejidos de materiales de sílice. Entre los materiales en polvo es muy usado el óxido de magnesita por sus excelentes propiedades. (Véase tablas del Apéndice II).

El diseño o comportamiento térmico del calentamiento por resistencias exige el conocimiento de la distribución de focos térmicos y de las condiciones de contorno. Las ecuaciones generales han sido consideradas en el capítulo (2) y sus aplicaciones específicas se desarrollan en este capítulo, para condiciones estacionarias y en los siguientes capítulos, para régimen transitorio y circunstancias especiales.

b) Calentamiento por fenómenos de inducción

La variación de un campo magnético da origen a una fuerza electromotriz e dada por la relación

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2)$$

donde $d\Phi/dt$ es la variación del flujo magnético con el tiempo \vec{E} es el campo eléctrico, extendiéndose la integral a la trayectoria de las líneas del campo creado. Si el flujo magnético es alterno, de la forma $\Phi = \Phi_0 \sin(\omega t)$ siendo $\omega = 2\pi f$ y f la frecuencia y si su variación tiene lugar en el seno de un material conductor, se origina una corriente dado por la ecuación

$$I = \frac{\Phi_0 \omega}{R^2 + (L\omega)^2} \cos(\omega t - \varphi) \quad (3)$$

donde $\tan \varphi = L\omega/R$ y, como es bien conocido, $L\omega$ es la resistencia inductiva. La energía transformada por efecto Joule vale

$$Q = eI \cos \varphi = \frac{\phi_0^2 \omega^2 R}{R^2 + (L\omega)^2} \quad (4)$$

La ec. (4) pone de manifiesto la generación de calor en el conductor en función de las características del campo inductor y de las propiedades del material donde se desarrolla la corriente. Este efecto es perjudicial cuando no se desea generación de calor, como sucede en las máquinas eléctricas en general, mientras que debe exacerbarse tanto como sea posible en la aplicación del calentamiento por inducción. El conocimiento de Q en cada posición del conductor permite aplicar las ecuaciones de transmisión de calor y conocer la distribución de temperaturas para determinadas condiciones de contorno. Obsérvese como en el conductor se superponen campos magnéticos, eléctricos y de temperaturas, a los que pueden añadirse el campo de esfuerzos y deformaciones por efecto externos e internos. Los primeros responden a las ecuaciones de Maxwell y los últimos se han tratado brevemente en el capítulo 2.

Se denomina *resistencia efectiva* la resistencia óhmica aumentada por efecto de la distribución de corriente en los conductores. En el caso de un conductor cilíndrico recorrido por una corriente se forma un campo magnético perpendicular a la dirección del campo eléctrico, con líneas que se cierran formando anillos concéntricos y que se extienden al exterior e interior del conductor. En un campo alterno se producen variaciones de flujo magnético dentro del conductor, dando lugar a corrientes que se superponen a la corriente principal. El valor del flujo en el conductor está dado por la expresión

$$\phi = \int_{r_1}^{r_2} B_z L dr = \mu \mu_0 L \int_{r_1}^{r_2} H_z dr \quad (5)$$

donde B_z y H_z son la inducción e intensidad del campo, μ la permeabilidad relativa y μ_0 la permeabilidad del vacío $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-8} \text{ (H/cm)}$ y L la longitud del conductor y la f.e.m. originada por la variación de

$$e = - \frac{d\phi}{d\tau} = - \mu \mu_0 L \frac{d}{d\tau} \int_{r_1}^{r_2} H_z dr \quad (6)$$

El valor de ϕ varía linealmente desde el centro si B_z es uniforme. La corriente principal y las corrientes desarrolladas por variación de ϕ tienen sentido contrario cuando el radio es más próximo al eje y el mismo sentido en las proximidades de la superficie del conductor. Este fenómeno se conoce como efecto superficial, con el resultado de una utilización deficiente del conductor y aumento de la resistencia. El efecto es mayor cuando aumente la frecuencia y es apreciable en conductores de pequeña sección para valores de $f \gg 1000$ (c/s). La resistencia efectiva se expresa de la forma:

$$R_e = a R_0 \quad (7)$$

donde

$$a \approx x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64} x \quad x = \frac{r_0}{2} \sqrt{\pi f \frac{\mu \mu_0}{\rho_e}}$$

Los conceptos expuestos son aplicables al calentamiento de la masa por presencia del campo inductor y al calentamiento de los conductores de corriente del inductor. El campo magnético es mayor en las proximidades del inductor y se superpone con los campos producidos por elementos inductores dispuestos convenientemente y así, en el caso de un solenoide con espiras suficientemente próximas, si se introduce en el interior un conductor, el efecto de las corrientes es uniforme en dirección axial. En dirección radial, la distribución de corrientes generadoras de calor es exponencial y la generación de calor está dada por una expresión de la forma

$$Q = Q_0 \left(\cosh \pi x \sqrt{\mu \mu_0 f \frac{\rho_e}{\rho_e}} - \cos 4 \pi x \sqrt{\mu \mu_0 f \frac{\rho_e}{\rho_e}} \right) \quad (8)$$

Para valores elevados de la frecuencia, la generación de calor se admite uniforme con un espesor e , para el cual se ha producido prácticamente todo el calor y dado por

$$e = \sqrt{\frac{\rho_e}{\mu \mu_0 f}} \quad (9)$$

e viene expresado en cm si, ρ_e ($\Omega \cdot \frac{cm^2}{cm}$), μ_0 ($\frac{\Omega \cdot s}{cm}$), f (c/s)

En la Fig. 4.3(b) se indican valores del espesor de calentamiento en función de la frecuencia para materiales usuales. Como

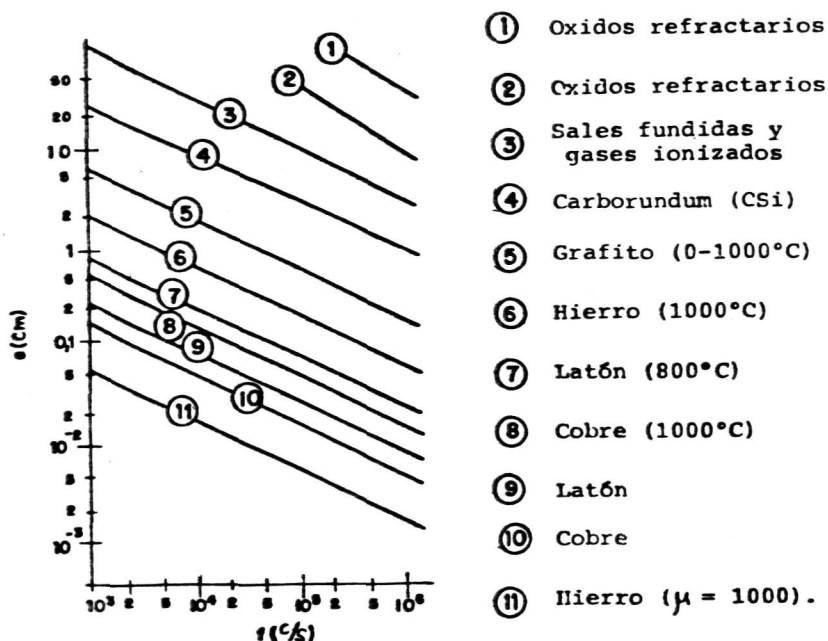


Fig. 4.3(b)

puede apreciarse en la ec.(9), para valores de la frecuencia y para materiales metálicos a temperatura no muy alta, el calentamiento es prácticamente superficial y el tratamiento adecuado se da en los capítulos posteriores, por la facilidad de desarrollo matemático con manantiales de calor puntuales, lineales o superficiales.

Los calentamientos por inducción presentan las ventajas de generación sin contacto físico, localización en volúmenes determinados y tiempos muy cortos. Las frecuencias que se emplean dependen de la naturaleza de la carga y del tiempo de calentamiento. La fusión de metales se extiende desde frecuencias bajas hasta

el orden $2 \cdot 10^5$ (c/s) . Cuanto menor es la frecuencia la zona de generación es más profunda, añadiéndose la transmisión de calor por conducción a la zona sólida. El calentamiento se realiza con generación de calor en régimen transitorio y su tratamiento se incluye en el capítulo 6. Las frecuencias más elevadas se utilizan para tratamientos térmicos de materiales en general, incluyendo desde formas simples, láminas, tubos, barras, o complicadas, tales como piezas mecanizadas, hasta partes de un equipo industrial.

Los problemas térmicos en régimen transitorio con generación de calor y fenómenos de fusión se complican por la presencia de una interfase sólido-líquido en movimiento. En el capítulo 8 se indican algunos métodos simplificados para su tratamiento.

c) Calentamiento dieléctrico

Se producen en cuerpos no conductores y, según sus aplicaciones, se conoce como calentamiento por onda corta, diatérmica o calentamiento electrostático. El término calentamiento dieléctrico incluye todas las aplicaciones de generación de calor por la polarizabilidad de la materia, en presencia de un campo eléctrico. Cuando las placas de un condensador se someten a una corriente alterna y existe un material dieléctrico entre las placas, se produce un desplazamiento de cargas en los elementos constituyentes del material y por la naturaleza alterna del campo eléctrico, se originan movimientos de vaiven que producen corrientes y generación de calor en toda la masa del dieléctrico. Cuando se trata de un dieléctrico perfecto, tales corrientes no se producen porque en corriente alterna la intensidad y tensión están defasadas 90° y la potencia es reactiva o ficticia, mientras que si el dieléctrico no es perfecto, aparece una componente de corriente en fase con la tensión desarrollándose el calentamiento dieléctrico. Si la modificación del ángulo de fase por la presencia del dieléctrico es φ , puede escribirse para el calor generado

$$Q = \frac{V^2}{Z} \cos \varphi \quad (15)$$

donde z es la impedancia del sistema $= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$, V (voltios)

caída de tensión entre los electrodos, φ ángulo de pérdidas dieléctricas. Para un condensador plano $C = \epsilon \epsilon_0 S/L$ donde

ϵ_0 es la constante absoluta del vacío $0,885 \cdot 10^{-12}$ (F/cm), ϵ la constante relativa, S , la superficie del condensador y L la distancia entre placas, el calor generado por cm^3 para un condensador plano vale

$$Q_1 \left(\frac{\text{W}}{\text{cm}^3} \right) = \frac{V^2}{L^2} C \omega \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \cos \varphi \quad (16)$$

y si $\cos \varphi$ es pequeño

$$Q_1 = \epsilon \epsilon_0 E^2 2\pi f \omega \varphi = 5,52 \cdot 10^{-13} \epsilon E^2 f \cos \varphi \quad (17)$$

donde E es el campo eléctrico $= V/L$ y f la frecuencia (c/s).

En la tabla 4.3(c) se dan valores de ϵ y φ para distintos materiales. Ambos valores son funciones de la temperatura y por lo tanto la generación de calor. Por la ec. (17), Q_1 es función de las variables que intervienen en la ecuación, pero el efecto de f sobre ϵ y φ puede ser mayor que la relación indicada. El potencial que se aplica está limitado por la aparición de fenómenos de ruptura del dieléctrico, que para los materiales más frecuentes es del orden de 20 kV, y en la práctica se trabaja entre 10-12 kV con campos eléctricos de 1000-2000 kV. La generación de calor dentro del material es función del campo eléctrico y este puede variar según sea la forma geométrica del condensador. Cuando la pieza a calentar es de forma arbitraria, se puede lograr un campo eléctrico uniforme por disposición de las placas del condensador en forma adecuada, dejando un espesor variable de aire entre placas y carga.

Las ventajas del calentamiento dieléctrico en medios no conductores son análogas a las de calentamiento por inducción en medios conductores, añadiéndose en el primer caso la generación de calor en toda la masa, según la distribución del campo eléctrico, los valores de φ , f , y la temperatura. Las frecuencias de trabajo se encuentran entre $10^4 - 10^8$ (c/s) y las temperaturas

TABLA 4-3(c). Propiedades de dieléctricos.

| Material | T(°C) | $\xi(a), t_q, \varphi(b)$ | $10^2 (c/k)$ | $10^3 (\epsilon/s)$ | $10^{10} (c/s)$ |
|-----------------------|-------|---------------------------|--------------|---------------------|-----------------|
| Arena | 25 | (a) | 3,42 | 2,5 | 2,5 |
| | | (b) | 0,19 | 0,017 | 0,0036 |
| Caucho | 25 | (a) | 2,4 | 2 | 2 |
| | | (b) | 10 | 44 | 30 |
| Cuero | 25 | (a) | 30 | 7 | |
| | | (b) | 140000 | 1000 | |
| Cuarzo fundido. | 25 | (a) | 3,78 | 3,78 | 3,78 |
| | | (b) | 8,5 | 4 | 2,5 |
| Esteatita (400) | 25 | (a) | 5,54 | 60 | 5,7 |
| | | (b) | 160 | 5,77 | 22 |
| Fibra de vidrio | 25 | (a) | 14 | 5,9 | 4 |
| | | (b) | 2500 | 800 | 360 |
| Hielo | -12 | (a) | | 4,8 | 3,7 |
| | | (b) | | 8000 | 7 |
| Marmol | 25 | (a) | 15 | 10 | 8,6 |
| | | (b) | 2000 | 390 | 120 |
| Plásticos | | | | | |
| Fenol-Formaldehido | 25 | (a) | 4,87 | 4,5 | 3,55 |
| | | (b) | 300 | 210 | 390 |
| Poliamidas | 25 | (a) | 3 | 3 | 2 |
| | | (b) | 150 | 200 | 100 |
| Acetato celulosa. | 25 | (a) | 3 | 3 | 2 |
| | | (b) | 100 | 200 | 100 |
| Resinas silicona | 25 | (a) | 3 | 3 | |
| | | (b) | 17 | 14 | |
| Cloruro polivinilo | 25 | (a) | 1 | 1 | 1 |
| | | (b) | 21 | 15 | 50 |
| Fibra poliester | 25 | (a) | 2 | 2 | 2 |
| | | (b) | 7 | 3 | 6 |
| Vidrio corning (0080) | 25 | (a) | 8,3 | 12 | 6,62 |
| | | (b) | 760 | 7,08 | 180 |
| Vidrio borosilicato | | (a) | 26 | 14 | 4 |
| | | (b) | 4,5 | 4,05 | 15 |

desde 100°C , para calentamiento de planchas de plástico, aglomerados, fusión de polvos y láminas de materiales de bajo punto de re blandecimiento, hasta la fusión de vidrios y otros cuerpos cerámicos a 1000°C-1500°C . El calentamiento dieléctrico tiene aplicaciones específicas que no son posibles con otros procedimientos, como es el caso de secado de piezas complicadas. El calentamiento uniforme expulsa el agua del interior sin producir variaciones dimensionales anormales, que dan lugar a grietas o resquebrajaduras. La eliminación de tensiones térmicas, preparación de semiconductores, catalizadores, son ejemplos de las varias aplicaciones que pre senta el calentamiento dieléctrico.

d) Arcos eléctricos

Los arcos eléctricos se producen por descargas eléctricas mantenidas a través de gases más o menos ionizados. Los componentes de un arco eléctrico son tres: cátodo, ánodo y columna de gas. Las temperaturas son distintas en cada uno de los componentes. El valor máximo corresponde a la columna y es del orden de 6000°K en los arcos normales, pudiendo llegar a 10000°K en los arcos de antorcha. Las temperaturas del cátodo y ánodo son del orden de 2000-2500°C , siendo mayores en el primero que en el segundo. Las aplicaciones del arco eléctrico son numerosas y se extienden conti nuamente, a medida que se profundiza en el conocimiento de los fenómenos que presenta el comportamiento de los componentes del arco. El calor generado se utiliza para fundir metales, bien en arco libre o con arco sumergido o bajo carga. La soldadura por arco es una de las aplicaciones más frecuentes, a las cuales pueden añadir se la fabricación de compuestos del tipo nitruros, carburos, etc. y reacciones químicas con moléculas estables que necesitan elevada temperatura para su descomposición.

La distribución de focos térmicos en un arco eléctrico se complica por la yuxtaposición de campos eléctricos, magnéticos y partículas libres con carga en movimiento. La característica común a todos los arcos es la presencia de materia en un estado que se denomina plasma y que intuitivamente se identifica con las llamas. El estado de plasma se conoce como cuarto estado de agregación, confirmando la idea elemental de la materia de los antiguos filóso

fos griegos, con cuatro elementos: aire, agua, tierra y fuego.

Un plasma en su sentido más amplio es la mezcla de tres componentes electrones, iones positivos, y átomos o moléculas, todos ellos libres y en movimiento, independientemente de su estado sólido, líquido o gas. Los plasmas de gases a temperaturas altas no están en equilibrio, a diferencia de las otras clases de plasmas. En la gráfica 4-3(d) se indican los más frecuentes.

Los plasmas mantienen su neutralidad eléctrica a escala macroscópica, es decir, en un volumen dado, la cantidad de cargas positivas es la misma que la de cargas negativas. Cualquier desviación de esta situación produce campos eléctricos elevados que tienen a restablecer el equilibrio. Un gas que tenga $n = 10^{15}$ (iones/cm³) de ambos signos y se quisieran separar 1 cm las cargas positivas y negativas, el valor del campo toma la forma

$$\frac{E}{x} = \frac{ne}{\epsilon_0} \quad (18)$$

siendo e la carga del electron $1,609 \cdot 10^{-19}$ (C) y $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ (F/cm)

$$E = \frac{1,60}{8,85} \cdot 10^5 \text{ (eV)}$$

A escala microscópica la neutralidad del plasma puede alterarse extendiéndose la perturbación a una distancia λ_D conocida como longitud de Debye. Si las cargas se separan λ_D , la energía potencial de longitud de cada partícula vale $k_B T$, k_B constante de Boltzmann. Cumpliéndose

$$eV \equiv k_B T \simeq \frac{n e^2 \lambda_D^2}{\epsilon_0} \quad \lambda_D = \left(\frac{k_B T \epsilon_0}{n e^2} \right)^{1/2} \quad (19)$$

k_B , puede expresarse en (eV/K) y su valor = $8,62 \cdot 10^{-5}$ (eV) y así para temperaturas de 10^4 °K $k_B T = 0,86$ (eV)

Sustituyendo valores en (19)

$$\lambda_D \simeq 7 \sqrt{\frac{T}{n}} \quad (20)$$

donde T es la temperatura del plasma e igual para los iones positivos y negativos.

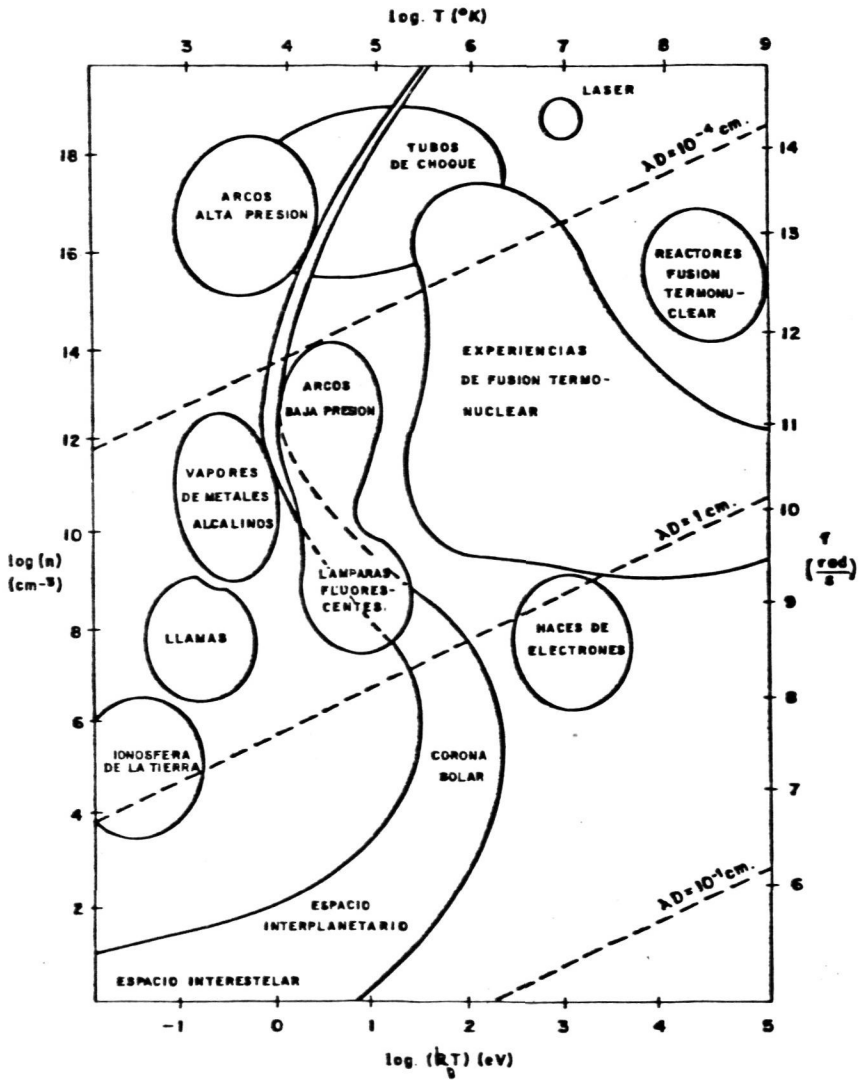


Fig. 4-3(d). Plasmas gaseosos.

Características de los arcos eléctricos

La Fig. 4.3(d) indica las zonas de plasma de los arcos eléctricos y sus parámetros fundamentales. Las presiones se extienden desde 10^{-2} (kg/cm^2) hasta 100 (kg/cm^2) con grado de ionización variable de 5% a 50%. Los tres componentes del arco, cátodo, plasma y ánodo son específicos en cada caso particular. El arco se obtiene acercando los electrodos hasta una posición para la cual se inicia la descarga a través del medio y posteriormente se separan los electrodos a la distancia de funcionamiento. La caída de tensión entre cátodo y ánodo no es muy elevada variando de 20-220 volt siendo mayor en corriente alterna que en corriente continua. Las corrientes se extienden desde 50-100 A para bajos voltajes hasta 10^6 A en electrodos fríos con cobre.

En el cátodo se desprenden electrones por emisión termoiónica con una velocidad dada por la ecuación de Richardson

$$i = A_1 T^2 \exp\left(-\frac{B}{T}\right) \quad (27)$$

donde i , (A/cm^2); T ($^\circ\text{K}$), A_1 es una característica del material del cátodo y $B = \phi e / k_B T$; ϕ , trabajo de extracción de los electrones del material, e carga del electrón y k_B la constante de Boltzmann.

Los electrones producidos son acelerados por el campo eléctrico, produciendo iones positivos en las inmediaciones del cátodo, a distancias de 10^{-3} cm. Los iones positivos se precipitan en el cátodo, elevan la temperatura de éste y producen más electrones por emisión secundaria. La emisión termoiónica puede aumentarse por incorporación de compuestos que presentan trabajo de extracción bajo, tales como óxidos de torio o bario. Los cátodos suelen denominarse: fríos, como el hierro o cobre, que llegar a corrientes de 10^6 A y cátodos calientes, tipo wolframio o grafito, con corrientes de 10^2 A. El cátodo presenta las mayores densidades de potencia por la naturaleza puntual de los focos térmicos.

En el plasma se tiene las temperaturas más elevadas que pue

den llegar hasta 20000°K , dependiendo de la composición, corriente y forma geométrica. La corriente de electrones realiza tres funciones: genera o mantiene el plasma, calienta éste por efecto Joule y compensa la presión del plasma por la presión del campo magnético creado por las corrientes. Cuanto mayor es la distancia entre cátodo y ánodo los plasmas son tanto más cilíndricos, debido a que el campo eléctrico es casi uniforme y el campo magnético son líneas circulares que confinan el plasma, mientras que a distancias menores los efectos de los campos magnéticos en las proximidades de los electrodos tienen mayor influencia y la forma tiende a ser esférica. La temperatura del plasma es función de las pérdidas por radiación que dependen de la composición del plasma, de su forma y volumen y de las características del medio que recibe las radiaciones. En arcos libres en hornos, la carga recibe calor por radiación del plasma, y por irradiación de las paredes de materiales cerámicos refractarios. Si la carga es uno de los electrodos interviene también la conducción, aumentando la proporción de este mecanismo cuando se trata de arcos sumergidos, debido a que el calentamiento se produce también por la resistencia del propio electrodo. La naturaleza radiante del plasma está fijada por todos los procesos que dan emisión fotónica, incluyendo la presencia de iones procedentes de los materiales del cátodo y ánodo. En casos específicos se pueden obtener los poderes emisivos por análisis espectral, calculándose el calor transmitido por las ecuaciones consideradas en el capítulo 1.

En el ánodo, los electrones pierden su energía cinética y su energía o trabajo de extracción, desprendiéndose mayor cantidad de calor que en el cátodo. Si la superficie del ánodo es pequeña, la elevación de temperatura es grande y se originan fenómenos de emisión termoiónica, que se oponen a la corriente del arco. La refrigeración en el caso de soldadura o el aumento de superficie disminuyen el fenómeno. La generación de calor se extiende a 10^{-3} cm de superficie y su distribución es de tipo gaussiano con valor máximo en el centro del ánodo, y depende de las características del plasma y de sus dimensiones.

En consecuencia, los componentes del arco, cátodo plasma y ánodo no son independientes y cada arco eléctrico es el resultado

de los fenómenos que tienen lugar en sus componentes. Los focos térmicos en el cátodo son los más elevados y pueden considerarse uniformes, y en el plasma y ánodo, en forma de campana o distribución gaussiana.

3) Reacciones químicas

Desde el punto de vista térmico las reacciones químicas son las fuentes o sumideros de energía más utilizados en nuestro planeta y su importancia se extiende desde reacciones muy exotérmicas como son la combustión de carbón, petróleo y combustibles en general, hasta las reacciones que tienen lugar en formas elementales de vida. Este espectro de aplicaciones tiene su correspondencia con otro de temperaturas desde aproximadamente 10000°K, donde la materia se encuentra en estado de plasma, hasta las proximidades del cero absoluto. La presencia de una reacción química implica la existencia de campos de temperatura y concentraciones. Estas consideraciones pueden parecer elementales, pero son convenientes si se trata de estimar los aspectos térmicos que puede presentar un reactor químico.

Los objetivos son los mismos que se plantean en los distintos capítulos de este libro. Conocer la distribución del campo de temperaturas que imponen la presencia de focos o flujos térmicos con las condiciones de contorno de un equipo o aparato y considerar su aplicación industrial con materiales y condiciones de funcionamiento.

La cantidad de calor que se desprende o absorbe en una reacción química está bien determinada por la variación de las funciones termodinámicas que intervienen en el proceso, expresadas por la ecuación

$$-\frac{\Delta G^\circ}{T} = R \ln K = \exp\left(-\frac{\Delta H^\circ}{RT} + \frac{\Delta S^\circ}{R}\right) \quad (1)$$

donde ΔG° , ΔH° y ΔS° , son las variaciones de energía libre, entalpía entropía expresadas en (Kcal/mol) o unidades equivalentes, R es la constante de los gases, 1,98 (cal/°K mol) y T la temperatura (°K). El conocimiento de ΔG° , ΔH° y ΔS° se obtiene considerando un estado de referencia convenientemente elegido. K es la constante de equilibrio de la reacción, dada por una

expresión de la forma

$$K = \frac{a_D^d a_E^e}{a_B^b a_C^c} \quad (2)$$

para una reacción del tipo $bD + cC \rightleftharpoons dD + eE$ donde, $a_{D, \dots}$ son las actividades de los componentes de la reacción.

En los equilibrios químicos, el estado de referencia se, elige a una presión determinada y las actividades vienen dadas por las presiones parciales de los componentes. Los valores dados por las presiones parciales de los componentes. Los valores de ΔG° , ΔH° y ΔS° se tienen para cada componente a partir de tablas de propiedades termodinámicas. La relación de K con T se obtiene por la ecuación

$$\left[\frac{\partial (\Delta G^\circ / T)}{\partial T} \right]_P = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial H^\circ}{\partial T} \right)_P - \frac{\Delta H^\circ}{T^2} - \left(\frac{\partial \Delta S^\circ}{\partial T} \right)_P \quad (3)$$

y si

$$\left(\frac{\partial \Delta H^\circ}{\partial T} \right)_P = T \left(\frac{\partial S^\circ}{\partial T} \right)_P \quad \left[\frac{\partial (\Delta G^\circ / T)}{\partial T} \right]_P = - \frac{\Delta H^\circ}{T^2} \quad (4)$$

y

$$R \left(\frac{\partial \ln K}{\partial T} \right)_P = \frac{\Delta H^\circ}{T^2} \quad \text{o} \quad R \left(\frac{\partial \ln K}{\partial (1/T)} \right)_P = -\Delta H^\circ \quad (5)$$

La ec. (5) permite también conocer el calor de reacción a partir de K , a distintas temperaturas. Teniendo en cuenta que

$$\Delta H^\circ = \Delta H_{T_1}^\circ + \int_{T_1}^{T_2} \sum C_p dT$$

donde \sum representa la suma de los calores específicos de los reaccionantes y productos con sus signos respectivos,

$$\ln \frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Delta H^\circ}{T^2} dT \quad (6)$$

Por las ecuaciones anteriores el calor de reacción, está perfectamente determinado siempre y cuando se tengan las propiedades termodinámicas de los componentes. También quedan fijadas las proporciones

nes de los componentes en estado de equilibrio.

La termodinámica de procesos reversibles considera solamente sistemas en equilibrio, sin distinguir entre procesos físicos o químicos y las respuestas son para todos los casos las mismas: energía absorbida o desprendida y composición del equilibrio. En el equilibrio, la velocidad de una reacción química es cero y desde el punto de vista del reactor químico corresponde a una situación límite. De los valores de ΔG° solo pueden desprenderse resultados cualitativos acerca de las posibilidades de una reacción. Si $\Delta G^\circ < 0$ la reacción es posible. Para $0 < \Delta G^\circ < 10 \text{ (Kcal/mol)}$ la reacción es dudosa y si $\Delta G^\circ > 10 \text{ (Kcal/mol)}$ la reacción es desfavorable pero no imposible.

El conocimiento de las velocidades de reacción se denomina *cinética química* y la aplicación de las reacciones químicas en el equipo más conveniente se denomina generalmente *diseño o estudio de reactores químicos*, donde interviene también el movimiento de fluidos, transmisión de calor, y transferencia de materia.

La velocidad de una reacción química es de la forma

$$r_i^* = \frac{1}{\kappa_i} \frac{dn_i}{dt} \quad (7)$$

donde n_i , es el número de moles de un componente i que aparece en la reacción, τ , es el tiempo y κ_i depende del estado del sistema; V si se considera el volumen de un fluido, m_i para la masa de un sólido y S para una superficie. Si el componente i desaparece en el transcurso de la reacción la ec. (7) tiene el signo -.

Para una reacción del tipo $aA + bB \rightarrow cC$ a V constante puede escribirse

$$r_A^* = \frac{dC_A}{dt} = r_i C_A^{a_i} C_B^{b_i} \quad (8)$$

donde a_i y b_i son los ordenes de la reacción con respecto a los componentes A y B ; pueden ser números enteros o fraccionarios y no coincidir con los números a y b de la ecuación estequiométrica.

trica; r_1 se conoce como constante específica de la reacción, que incluye los efectos de la temperatura y los mecanismos que intervienen en la reacción o que son controlantes. Dentro de un amplio intervalo de temperatura, r_1 se expresa por la conocida ecuación de Arrhenius

$$r_1 = f_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \quad (9)$$

donde f_0 se conoce como factor de frecuencias, E energía de activación (kcal/mol) R constante de los gases y T (°K)

Si la reacción anterior es reversible

$$r^* = r_1 C_A^{a_1} C_B^{b_1} - r_2 C_C^{c_1} \quad (10)$$

r_1 y r_2 son las constantes específicas directa e inversa y relacionadas con la constante de equilibrio

$$K = \frac{r_1}{r_2} = \frac{C_C^c}{C_A^a C_B^b} \quad (11)$$

Las velocidades de reacción se determinan experimentalmente en elementos diferenciales o integrales y los resultados se interpretan por distintos mecanismos, dando consistencia lógica a las velocidades obtenidas, lo que permite una extrapolación razonable a otras reacciones análogas. Frecuentemente los mecanismos de difusión de componentes, adsorción sobre superficies y reacción química actúan en serie y la analogía con la ley de Ohm indica que la velocidad controlante corresponde al mecanismo que presenta mayor resistencia.

Si existen reacciones simultáneas, las resistencias están en serie-paralelo y cuando alguna de las resistencias en paralelo es muy elevada, su efecto es despreciable. Si en una reacción interviene la difusión a temperaturas altas, la velocidad de la reacción es elevada, su resistencia es pequeña y la velocidad controlante es la difusión. A temperaturas bajas sucede lo contrario y controla la velocidad de reacción.

Con las consideraciones anteriores el problema de conocer la distribución de focos térmicos se complica, por la presencia de campos de concentraciones, fluidos en movimiento y variación de la velocidad de reacción con las concentraciones y temperaturas. El conjunto de los fenómenos que tienen lugar puede expresarse por las ecuaciones diferenciales expuestas en el capítulo 2 apartado 2.5,

$$\nabla(k \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p (V \text{ grad } T) + r_i^* \Delta H \pm Q \quad (12)$$

para el campo de distribución de temperaturas y

$$\nabla(D \nabla C_i) = \frac{\partial C_i}{\partial t} + V \text{ grad } C_i + r_i^* \pm Q_m \quad (13)$$

para el campo de distribución de concentración del componente i y se incluye la cantidad de materia $\pm Q_m$ y calor $\pm Q$ que se aporta o elimina del sistema. Las ecuaciones (12) y (13) pueden tratarse como lineales en tanto que sus variables puedan ser agrupadas o consideradas convenientemente. Los valores de k y D pueden referirse a sólidos o fluidos en régimen laminar o turbulento. En sólidos $V \text{ grad } T$ y $V \text{ grad } C_i$ no existen y las ecuaciones quedan reducidas a conducción y difusión en sólidos con soluciones completamente análogas, si r_i^* se expresa en forma lineal. Con fluidos se puede buscar valores de k y D que sean equivalentes a considerar válidas las ecuaciones (12) y (13), es decir k_e y D_e . Esta situación no es desconocida puesto que se trata de un caso análogo a transmisión de calor en sólidos anisótropos, cuya solución se obtiene relacionando los parámetros de anisotropía. El campo de velocidades presenta mayores dificultades, que pueden simplificarse por la introducción de grupos adimensionales, como método general de aproximar las ecuaciones no lineales. El lector puede apreciar las ventajas de obtener los grupos adimensionales a partir de las ecuaciones diferenciales y no a partir del análisis dimensional. Ambos métodos se han desarrollado en el capítulo 2.

4.4-1. Paredes planas con generación de calor uniforme

Consideremos el caso de una pared plana de superficie suficientemente grande para que no exista transmisión de calor en las direcciones Y ó Z Fig. (4,1-1). La conductividad k del material de la pared se supone constante y la generación de calor es uniforme. En régimen estacionario el calor debe eliminarse en la superficie por convección o radiación respectivamente o simultáneamente.

La ecuación de distribución de temperaturas dentro de la pared responde a la ecuación de distribución de temperaturas dentro de la pared responde a la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k}$$

y si $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

Con las condiciones

$$T = T_s \quad \text{en} \quad x = L_x/2$$

$$dT/dx = 0 \quad \text{en} \quad x = 0$$

La solución de la ecuación (1) es

$$T = -\frac{Q_0}{k} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (2)$$

en $x = 0 \quad dT/dx = 0 \quad \text{y} \quad C_1 = 0$

$$x = \frac{L_x}{2} \quad C_2 = T_s + \frac{Q_0}{k} \frac{L_x^2}{8}$$

y finalmente

$$T = \frac{Q_0}{k} \left(\frac{L_x^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right) + T_s \quad (3)$$

y la distribución de temperaturas adopta la forma cuadrática como

se indica en la Fig. 4,1-1). La temperatura máxima se presenta en $x = 0$ y tiene el valor

$$T_0 = T_s + \frac{Q_0}{8k} L_x^2 \quad (4)$$

El calor que sale por una de las caras vale

$$q = Q_0 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^3} \right) \cdot \frac{L_x}{2} (\text{m}) \cdot S (\text{m}^2)$$

Si existe convección y el coeficiente es $h \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} \right)$ se tiene la expresión

$$T_0 - t = \frac{q}{S} \left(\frac{1}{h} + \frac{L_x}{4k} \right) \quad (5)$$

o bien

$$T_0 - t = \frac{Q_0 L_x}{2} \left(\frac{1}{h} + \frac{L_x}{4k} \right) \quad (6)$$

Las ecuaciones (3), (5) y (6) resuelven los problemas relacionados con la temperatura máxima del material para valores dados de Q_0 y compatibles con el coeficiente h . Si h es bajo y Q elevado pueden obtenerse valores de T_0 superiores al punto de fusión del material y por ello hay que reducir el valor L_x eligiendo placas de menor espesor.

Si la pared tiene yuxtapuestas otras paredes de espesores $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ donde no hay generación de calor y con resistencias de contacto entre cada dos superficies dadas por $\Delta t_{c_1}, \Delta t_{c_2}, \dots$

$$T_0 - t = \frac{q}{S} \left[\frac{1}{h} + \frac{L_x}{4k} + \frac{\Delta x_1}{k_1} + \dots \right] + \Delta t_{c_1} + \dots \quad (7)$$

Ejemplo.- 4,1-(a)

Una pared plana de 2 cm de espesor genera calor uniformemente con una densidad de potencia de $5 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^3} \right)$. La conductividad térmica del material se supone constante y de valor $2 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m } ^\circ\text{C}} \right)$. La pared se encuentra rodeada de un fluido a 20°C y coeficiente de convección de $50 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} \right)$

Calcular

- Distribución de temperaturas en el interior de la pared
- Flujo térmico en la superficie
- Si la temperatura máxima que admite el material es de 175°C , hallar el espesor que puede tener la pared con la misma densidad de potencia que en el caso a).

Solución:

- Por la ec. (6) la temperatura en el centro de la pared vale

$$T-20 = 5 \cdot 10^5 \cdot \frac{2}{2} \cdot 10^{-2} \left(\frac{1}{50} + \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4} \right) = 100 + 12,5 \quad T_0 = 132,5 (^{\circ}\text{C})$$

y la distribución de temperaturas

$$T = T_0 - \frac{Q_0 x^2}{2k} = 132,5 - \frac{5 \cdot 10^5 x^2}{4}$$

En $x = L_x/2 \quad T = T_s = 132,5 - 12,5 = 120 (^{\circ}\text{C})$

$$\text{b) } \frac{q}{S} = Q_0 \cdot \frac{L_x}{2} = 5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} = 5000 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

- Nuevamente por la ecuación (6)

$$175 - 20 = \frac{5 \cdot 10^5}{2} \left(\frac{L_x}{50} + \frac{L_x^2}{8k} \right), \quad L_x = 2,8 \text{ (cm)}$$

$$\text{d) } \frac{q}{S} = Q_0 \cdot \frac{L_x}{2} = 5 \cdot 10^5 \cdot 1,4 \cdot 10^{-2} = 7000 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

4,1-2. Pared plana con generación de calor $Q = Q_0(1 + \beta T)$

El calentamiento de un conductor por el paso de corriente eléctrica es proporcional a $R I^2$. Para intervalos moderados de temperatura de resistencia eléctrica es función lineal de aquella y también lo es el calor generado. Por otra parte la conductividad es también función de la temperatura aunque no necesariamente

lineal por lo cual el problema puede ser complicado. Admitiendo la hipótesis de k constante, para una placa de espesor L_x y dimensiones Z e y suficientemente grandes para despreciar el calor transmitido en estas direcciones se cumple

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{Q_0}{k}(1+\beta T) \quad (1)$$

Resolviendo la ec. (1) por transformadas de Laplace

$$L[T] \equiv f(s) = \int_0^\infty T \exp(-sx) dx; \quad s^2 f(s) - sA - B = \frac{Q_0}{sk} - \frac{Q_0}{k} \beta f(s)$$

$$f(s) = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + a^2} \right) + \frac{sA}{s^2 + a^2} + \frac{B}{s^2 + a^2}$$

y por la inversión de $f(s)$

$$T = -\frac{1}{\beta} + \left(A + \frac{1}{\beta} \right) \cos(ax) + \frac{B}{a} \sin(ax) \quad (2)$$

con las condiciones de la Fig. 4,1-2 resulta

$$T = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\cos(ax)}{\cos(aL_x/2)} - 1 \right); \quad 0 < ax < \pi/2 \quad (3)$$

donde $a = \sqrt{\frac{Q_0 \beta}{k}}$

$$\text{En } x=0 \quad T_0 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1 - \cos(aL_x/2)}{\cos(aL_x/2)} \right)$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\cos(ax) - \cos(aL_x/2)}{1 - \cos(aL_x/2)} \quad (4)$$

Para un valor dado de β y espesor de la pared L_x se conoce la temperatura por la ec. (3) y la cantidad de calor por la relación $Q_0(1+\beta T)$

El flujo térmico en la superficie es $q_{1/2} = \bar{Q} L_x/2$ siendo

$$\bar{Q} = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x/2} Q_0(1+\beta T) dx = \frac{2Q_0}{L_x} \left(\frac{1}{a} \tan(aL_x/2) \right)$$

4.1-3. Paredes planas con generación de calor exponencial

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{Q_0}{k} \exp(-ax) \quad (1)$$

con las condiciones de la Fig. (4,1-3)

Aplicando a la ec. (1) la transformación de Laplace

$$s^2 f(s) - sA - B = -\frac{Q_0}{k} \frac{1}{(s+a)}$$

y

$$f(s) = \frac{1}{s^2} \left(B - \frac{Q_0}{ka} \right) + \frac{1}{s} \left(A + \frac{Q_0}{ka^2} \right) - \frac{Q_0}{ka^2} \cdot \frac{1}{(s+a)}$$

y

$$T = \left(B - \frac{Q_0}{ka} \right) x + \left(A + \frac{Q_0}{ka^2} \right) - \frac{Q_0}{ka^2} \exp(-ax) \quad (2)$$

con las condiciones de contorno

$$A = T_0 \quad B = \left(T_s - T_0 + \frac{Q_0}{ka^2} \exp(-aLx) - \frac{Q_0}{ka^2} \right) \frac{1}{Lx} + \frac{Q_0}{ka}$$

y finalmente

$$T = \left(T_s - T_0 + \frac{Q_0}{ka^2} \exp(-aLx) - \frac{Q_0}{ka^2} \right) \frac{x}{Lx} + T_0 + \frac{Q_0}{ka^2} (1 - \exp(-ax)) \quad (3)$$

o

$$T_0 - T = \left(T_0 - T_s \right) \frac{x}{Lx} + \frac{Q_0}{ka^2} \left[(1 - \exp(-aLx)) \frac{x}{Lx} + \exp(-ax) - 1 \right] \quad (4)$$

Ejemplo.- 4,1-3

Una chapa de acero de 4 cm de espesor se utiliza como protector de un flujo elevado de radiaciones γ sobre la pared de un recipiente en un reactor nuclear de agua a presión. La temperatura en las superficies de la chapa es de 280°C . La generación de calor en la superficie expuesta a las radiaciones es de $2,6 \cdot 10^7 \text{ (kcal/hm}^2\text{)}$ y la variación de generación de calor en función del espesor viene dada por $Q = 2,6 \cdot 10^7 \exp(-30x)$ donde x se expresa en m. Se desea conocer la posición y el valor de

la temperatura máxima en la chapa. La conductividad térmica del acero se estima en $30 \text{ (Kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$

Solución:

Por derivación de la ec. 4,1-3(4) respecto a x , teniendo en cuenta que $T_o - T_s = 0$ se tiene

$$\frac{1}{L_x} [1 - \exp(-aL_x)] = a \exp(ax)$$

y

$$x = -\frac{1}{30} \ln \left[\frac{1 - \exp(-1,2)}{30 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \right] = 1,79 \cdot 10^{-2} \text{ (m)}$$

y

$$T_{mx} - T_o = \frac{2,6 \cdot 10^7}{30^3} \left[\left(\exp(-1,2) - 1 \right) \frac{1,79}{4} + 1 - \exp(-0,537) \right] = 96(^{\circ}\text{C})$$

4,1-4. Pared plana con generación de calor $Q = Q_o \cos(\pi x / 2L_x)$

Si se admite conducción solamente en la dirección x

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{Q_o}{k} \cos\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \quad (1)$$

donde L'_x es la distancia para la cual $Q = 0$ con las condiciones que se indican en la fig. (4,1-4). Aplicando a la ec.(1) la transformación de Laplace

$$s^2 f(s) - As - B = -\frac{Q_o}{k} \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{donde} \quad a^2 = \left(\frac{\pi}{2L_x}\right)^2$$

y

$$f(s) = -\frac{Q_o}{k} \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + a^2} \right] + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2}$$

y por la inversión de

$$T = -\frac{Q_o}{k} \frac{1}{a^2} (1 - \cos(ax)) + A + Bx \quad (2)$$

y con las condiciones de contorno

$$T = T_o - \frac{Q_o}{k} \frac{1}{a^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \right) \quad (3)$$

Si $L_x = L'_x$ en $x = L_x$

$$T_s = T_o - \frac{Q_o}{k} \frac{1}{a^2} = T_o - \frac{Q_o}{k} \left(\frac{2L_x}{\pi} \right) \quad (4)$$

El valor medio de Q en la pared es

$$\bar{Q} = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} Q_o \cos\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) dx = \frac{2L'_x}{\pi L_x} Q_o \sin\left(\frac{\pi L_x}{2L_x}\right) \quad (5)$$

Ejemplo.- 4,1-1(b)

El núcleo de un reactor nuclear de investigación tipo piscina, esta formado por placas compuestas de 0,5 mm de espesor de una aleación U-Al emparedada entre 2 chapas de Al de 0,5 mm de espesor cada una. La aleación U-Al contiene 0,765 g de U^{235} por cm^3 . El flujo neutrónico medio es de $1,9 \cdot 10^{13}$ ($n^0/cm^2.s$) y la temperatura del agua de refrigeración es de $20^\circ C$. El coeficiente de convección superficie exterior-agua es de 6000 ($kcal/hm^2^\circ$). Admitiendo que la conductividad del combustible es la misma que la de Al, Calcular:

- Densidad de potencia en el combustible
- Distribución de temperaturas en la sección del combustible.
- Flujo térmico en la superficie.

Solución:

- La generación de calor es el número de fisiones multiplicadas por la energía desprendida en cada fisión y

$$Q = N \sigma_f \phi E_f$$

$$N = \frac{\text{Número átomos fisibles}}{\text{cm}^3 \text{ de combustibles}} = 0,602 \cdot 10^{24} \cdot \frac{0,765}{235} = 1,9 \cdot 10^{21}$$

σ_f sección eficaz microscópica para la fisión = 577 barnios a $25^\circ C$ 1 barnio = $10^{-24} cm^2$ Admitiendo una temperatura de $40^\circ C$ la función que relaciona σ_f con T puede escribirse

$$\sigma_f = \frac{6(T_o)}{1,128} \left(\frac{T_o}{T} \right)^{0,5} = \frac{577}{1,128} \left(\frac{293}{313} \right)^{0,5} = 494 \quad \text{barnios}$$

$$\phi = 1,9 \cdot 10^{13} \text{ (n}^0\text{/cm}^2\text{.s)}$$

$$E_f \approx 200 \text{ (MeV/fisión)}$$

$$Q = 1,9 \cdot 10^{21} \cdot 494 \cdot 10^{-24} \cdot 1,9 \cdot 10^{13} \cdot 200 = 3,56 \cdot 10^{15} \left(\frac{\text{MeV}}{\text{s cm}^3} \right) \equiv 570 \left(\frac{\text{W}}{\text{cm}^3} \right)$$

$$\equiv 4,9 \cdot 10^8 \text{ (Kcal/h.m}^3\text{)}$$

$$b) \quad k_{Ae} = 175 \text{ (Kcal/h.m}^0\text{C)}$$

Por la ec. (7)

$$T_{0-25} = \frac{Q_0 L x}{2} \left[\frac{1}{h} + \frac{L x}{4k} + \frac{\Delta x_1}{k} \right] = 4,9 \cdot 10^8 \cdot \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{2} \left[\frac{1}{6000} + \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 175} + \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{175} \right] = 20,4$$

y

$$T_0 = 20,4 + 25 = 45,4 \text{ (}^0\text{C)}$$

Ejemplo.- 4,1-4(a)

Las placas combustibles del ejemplo 4,1-1(b) tienen dimensiones; exteriores $637.70.1,5 \text{ (mm}^3\text{)}$; combustibles $603.58,5.0,5 \text{ (mm}^3\text{)}$; canales de refrigeración, $637.66,1.6,2 \text{ (mm}^3\text{)}$. La temperatura de entrada del agua es de 20^0C y su velocidad en los canales $1,8 \text{ (m/s)}$. El flujo de neutrones máximo es 3,6 veces el flujo neutrónico medio siendo éste último $1,9 \cdot 10^{13} \text{ (n}^0\text{/cm}^2\text{.s)}$. Calcular:

- Número de placas necesarias para producir 3 MW
- Temperatura máxima en el combustible y en la superficie exterior de la vaina.
- Distribución de temperaturas en la masa de refrigerante en la dirección del agua.

Solución:

$$a) \quad 3 \text{ MW} \equiv 3000 \cdot 860 = 2,58 \cdot 10^6 \text{ (Kcal/h)}$$

$$Q \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^3} \right) \cdot V_c \left(\frac{\text{m}^3}{\text{placa}} \right) \cdot n (\text{n}^\circ \text{ placas}) = 2,58 \cdot 10^6$$

$$= 4,9 \cdot 10^8 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^3} \right) \text{ (ejemplo 4,1-1(b)) } \quad V_c = 17,6 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$n = 299$ es decir aproximadamente 300 placas

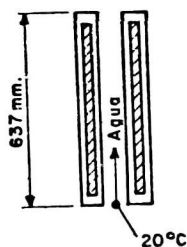


Fig. del ejemplo 4,1-4(a).

b) Admitiendo que la transmisión de calor tiene lugar en la dirección perpendicular al eje x , y despreciando el efecto del reflector sobre el flujo neutrónico, para la placa situada en el centro del núcleo

$$\bar{Q} = \frac{2}{\pi} \frac{L_x}{L_x} Q_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{L_x}{L_x}\right) \approx 4,9 \cdot 10^8 \cdot 3,6 \cdot \frac{2}{\pi} = 1,12 \cdot 10^9 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^3} \right)$$

La distribución de temperaturas en el centro de la placa ec. 4,1-1(7)

$$T - 20 = 1,76 \cdot 10^9 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{h} + \frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{2,175} + \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{175} \right]$$

El valor de h se calcula por la ecuación (véase apartado 2,4)

$$Nu = \frac{h D_e}{k} = 0,027 Re^{0,8} Pr^{0,33} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0,14}$$

con las propiedades térmicas a la temperatura de la masa de agua y μ_s la viscosidad a la temperatura de la superficie de la placa.

A 20°C $Pr = 7,01$ $k = 0,514 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^\circ\text{C}} \right)$, $Re = 1,8 \cdot 1,13 \cdot 10^4$

$$De = \frac{4 \cdot \text{area canal}}{\text{perímetro mojado}} = \frac{4 \cdot 6,2 \cdot 66,1}{2(6,2 + 66,1)} = 11,3 \text{ (mm)} ; \left(\frac{\mu_{20}}{\mu_{80}} \right)^{0,1} = 1,10$$

$$h = 0,027 \cdot \frac{0,514}{1,13 \cdot 10^{-2}} \cdot 2846 \cdot 1,90 \cdot 1,10 = 7305 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2\text{C}} \right)$$

y $T = 20 + 61,8 = 81,8 (^\circ\text{C})$

c) El balance de energía en un elemento dx

$$m c_p dt = Q(x) dv = Q(x) \cdot Z \cdot \frac{L_y}{2} dx$$

donde m masa de agua por unidad de tiempo z anchura del combustible y L_y espesor del mismo. Integrando la ecuación anterior y teniendo en cuenta que una placa caliente un canal y $2L_x = 0,603$

$$t_x - t_0 = \frac{z L_y}{m c_p} \cdot \frac{2L_x Q_0}{\pi} \left[\frac{\sin(\frac{\pi x}{2L_x})}{2L_x} + 1 \right]$$

y en $x = L_x$

$$t_{L_x} - 20 = \frac{42 L_y L_x}{m c_p \pi} Q_0 = \frac{2.585 \cdot 10^{-2} \cdot 0,603 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,12 \cdot 10^9}{\pi \cdot 1 \cdot 1,84 \cdot 3600 \cdot 10^3 \cdot 6,2 \cdot 66 \cdot 10^{-6}} = 4,63(^{\circ}\text{C})$$

La temperatura de la superficie T_s en función de la distancia x

$$\begin{aligned} T_{s,x} - t_0 &= \frac{Q_0 z L_y 2L_x}{\pi m c_p} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \right] + \frac{Q_0 z L_y}{2 h z^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \\ &= 2,31 \left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \right] + 33,9 \cos\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \end{aligned}$$

El valor máximo de $T_{s,x} - t_0$ se encuentra derivando e igualando a cero la ecuación anterior, resultando, $\arctg\left(\frac{\pi L}{2L_x}\right) = 0,068$; $x = 0,013$ es decir a una distancia de la base $L_x + 0,013 = 0,314$ (m)

y

$$(T_{s,x} - t_0)_{\max} = 2,37 + 33,8 = 36,1(^{\circ}\text{C}) ; (T_s)_{\min} = 36,1 + 20 = 56,1(^{\circ}\text{C})$$

4,1-5. Pared plana con generación de calor $Q = Q_0 x^2$

Si se admite conducción en la dirección x

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{Q_0}{k} x^2 \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 4,1-5, aplicando a (1) la transformación de Laplace

$$s^2 f(s) - A s - B = -\frac{Q_0}{k} \frac{2!}{s^3}$$

$$f(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} - \frac{Q_0}{k} \frac{2!}{s^5}$$

y por la inversión de $f(s)$

$$T = A + Bx - \frac{Q_0}{k} \frac{x^4 2!}{4!} = A + Bx - \frac{Q_0}{k} \frac{x^4}{12} \quad (2)$$

y con las condiciones de contorno

$$T = T_0 - \frac{Q_0}{k} \frac{x^4}{12} = T_s + \frac{Q_0}{12k} (l^4 - x^4) \quad (3)$$

y el flujo térmico en la superficie $x=l$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{q}{s} = \frac{1}{k} \quad q/s = \frac{Q_0 l^3}{3} \quad (4)$$

4,1-6. Pared plana con generación de calor $Q = Q_0 \cosh(ax)$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{Q_0}{k} \cosh(ax) \quad (1)$$

con las condiciones de la Fig. 4,1-6.

Por la transformación de Laplace

$$f(s) = \frac{B}{s^2} + \frac{A}{s} - \frac{Q_0}{k} \frac{s}{(s^2 - a^2)s^2}$$

y por la inversión de $f(s)$

$$T = A + Bx + \frac{Q_0}{ka^2} (1 - \cosh(ax)) \quad (2)$$

y con las condiciones de contorno

$$\text{En } x=0, \quad \frac{dT}{dx} = 0, \quad B=0 \quad (3)$$

$$\text{En } x=l, \quad T=T_s \quad A = T_s - \frac{Q_0}{ka^2} (1 - \cosh(al))$$

y finalmente

$$T = T_s + \frac{Q_0}{ka^2} (\cosh(al) - \cosh(ax)) \quad (4)$$

La temperatura máxima en $x=0$ vale

$$T_0 = T_s + \frac{Q_0}{2ka^2} (2 \cosh(al) - 1) \quad (5)$$

y el flujo térmico en la superficie

$$(q/s)_{Lx} = -k (dT/dx)_{Lx} = \frac{Q_0}{a} \sinh(ax) \quad (6)$$

Ejemplo 4,1-6.

Se desea conocer el efecto de variación en la temperatura máxima y flujo térmico en la superficie en una placa con una cara adiabática al admitir generación de calor uniforme Q_0 o generación de calor según la ley $Q_0 \cosh(340x)$, $Q_0 = 10^8 \text{ (Kcal/m}^3\text{)}$, $L_x = 2 \cdot 10^{-3} \text{ (cm)}$

Solución:

Para generación uniforme de acuerdo con el apartado 4,1-1

$$T_0 - T_s = \frac{Q_0 L_x^2}{2k}$$

y para generación $Q_0 \cosh(0,34x)$

$$T'_0 - T_s = \frac{Q_0}{2k(0,34)^2} (2 \cosh(0,34L_x) - 1)$$

Si $T_s \approx Cte$ en los dos casos

$$\frac{T_0 - T_s}{T'_0 - T_s} = \frac{L_x^2 (340)^2}{2 \cosh(0,34L_x) - 1} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 1,15 \cdot 10^5}{2 \cosh(340 \cdot 2 \cdot 10^{-3}) - 1} = 0,31$$

y para los flujos térmicos

$$\frac{(q/s)_0}{(q/s)_{0'}} = \frac{L_x \cdot 340}{\sinh(0,68)} = 0,73$$

4.2-1. Rectángulo con generación de calor uniforme

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

Con las condiciones que se indican en la fig. 4,2-1.

Aplicando a los miembros de la ec.(1) la transformada finita del seno de Fourier,

$$\bar{L}_F^s [T(x,y)] \equiv \bar{f}_F^s(\xi, \gamma) = \int_0^{2Lx} T(x,y) \sin(\xi x) dx \quad \xi = \frac{m\pi}{2Lx}$$

$$\bar{L}_F^s \left[-\frac{Q_0}{k} \right] = \int_0^{2Lx} -\frac{Q_0}{k} \sin(\xi x) dx = -\frac{2Q_0 2Lx}{k\pi(2m+1)} = f_0$$

$$\bar{L}_F^s \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] = -\xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, \gamma)$$

$$\bar{L}_F^s \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = \frac{d^2 \bar{f}_F^s(\xi, \gamma)}{d\gamma^2}$$

y finalmente la ec. (1) se transforma en

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^s(\xi, \gamma)}{d\gamma^2} - \xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, \gamma) = f_0 \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x,y) = \frac{1}{Lx} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{f}_F^s(\xi, \gamma) \quad (3)$$

Aplicando a (2) la transformación de Laplace $f(s) \equiv L[\bar{f}_F^s(\xi, \gamma)]$

$$s^2 f(s) - As - B - \xi^2 f(s) = f_0$$

$$f(s) = A \frac{s}{s^2 - \xi^2} + \frac{B}{s^2 - \xi^2} + \frac{f_0}{\xi^2} \left(\frac{s}{s^2 - \xi^2} - \frac{1}{s} \right)$$

y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_F^s(\xi, \gamma) = \left(A + \frac{f_0}{\xi^2} \right) \cosh(\xi \gamma) + \frac{B}{\xi} \sinh(\xi \gamma) - \frac{f_0}{\xi^2} \quad (4)$$

y con las condiciones de contorno

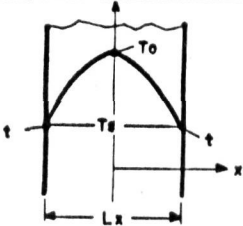
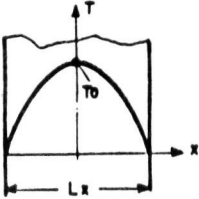
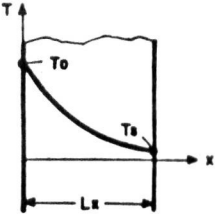
$$\bar{f}_F^s(\xi, \gamma) = 0 \quad \text{en} \quad \gamma = 0 \quad A = 0$$

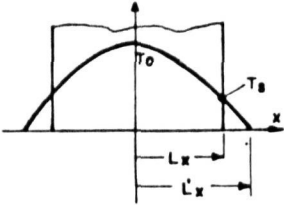
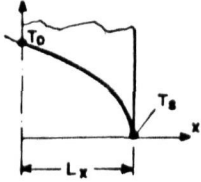
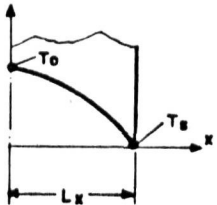
$$\bar{f}_F^s(\xi, \gamma) = 0 \quad \text{en} \quad \gamma = 2Ly \quad B = \frac{f_0}{\xi^2} \frac{(1 - \cosh(2\xi Ly)) \xi}{\sinh(2\xi Ly)}$$

y

$$\bar{f}_F^s(\xi, \gamma) = \frac{f_0}{\xi^2} \left[\cosh(\xi \gamma) - \tanh(\xi Ly) \sinh(\xi \gamma) - 1 \right] \quad (5)$$

y por la inversión (3) y con los valores de ξ y f_0

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|---|
|  <p>Fig. 4,1-1</p> | $\frac{dT}{dx} = 0 \quad x=0$ $T = T_s \quad x = \frac{Lx}{2}$ $\frac{q}{S} = h(T_s - t)$ $Q = Cte = Q_o$ | $T_o - t = Q_o \frac{Lx}{2} \left(\frac{1}{h} + \frac{Lx}{4k} \right) = \frac{q}{S} \left(\frac{1}{h} + \frac{Lx}{4k} \right)$ |
|  <p>Fig. 4,1-2</p> | $\frac{dT}{dx} = 0 \quad x=0$ $T = T_s \quad x = \frac{Lx}{2}$ $Q = Q_o(1 + \beta T), \quad \beta = Cte$ | $T = T_o \frac{\cos(ax) - \cos(aLx/2)}{1 - \cos(aLx/2)}$ $a = \sqrt{\frac{Q_o \beta}{k}}$ $\bar{Q} = \frac{2Q_o}{Lx a} \operatorname{tg}\left(\frac{aLx}{2}\right)$ |
|  <p>Fig. 4,1-3</p> | $T = T_o \quad x=0$ $T = T_s \quad x=Lx$ $Q = Q_o \exp(-ax)$ $a = Cte$ | $T_o - T = (T_o - T_s) \frac{2x}{Lx} + \frac{Q_o}{ka^2} \left[(1 - \exp(-aLx)) \frac{2x}{Lx} + \exp(-ax) - 1 \right]$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 4,1-4</p> | $\frac{dT}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad x=0$ $T = T_0 \quad x=0$ $T = T_s \quad x=L_x$ $Q = Q_0 \cos(\pi x / 2L_x)$ | $T = T_0 - \frac{Q_0}{k} \frac{1}{a^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \right)$ $a = \frac{\pi}{2L_x}$ $\bar{Q} = \frac{2L_x}{\pi L_x} Q_0 \sin\left(\frac{\pi L_x}{2L_x}\right)$ |
|  <p>Fig. 4,1-5</p> | $\frac{dT}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad x=0$ $T = T_0 \quad x=0$ $T = T_s \quad x=L_x$ $Q = Q_0 x^2$ | $T = T_0 - \frac{Q_0 x^4}{12k}$ $\frac{q}{s} = \frac{Q_0 x^3}{3} \quad \text{en} \quad x=L_x$ |
|  <p>Fig. 4,1-6</p> | $\frac{dT}{dx} = 0 \quad x=0$ $T = T_0 \quad x=0$ $T = T_s \quad x=L_x$ $Q = Q_0 \cosh(ax)$ $a = Cte$ | $T = T_s + \frac{Q_0}{ka^2} (\cosh(aL_x) - \cosh(ax))$ $\left(\frac{q}{s}\right)_{L_x} = \frac{Q_0}{a} \sinh(aL_x)$ |

$$T(x, y) = \frac{16 Q_0 L_x^2}{k \pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \left[1 - \frac{\cosh \left[(2m+1) \pi (L_y - y) / 2 L_x \right]}{\cosh \left[(2m+1) \pi L_y / 2 L_x \right]} \right] \frac{\sin \left[(2m+1) \pi x / 2 L_x \right]}{(2m+1)^3} \quad (6)$$

4,2-2. Rectángulo con generación de calor uniforme y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

Con las condiciones que se indican en la Fig. 4,2-2.

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$\begin{aligned} \bar{L}_F \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] &= \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cos(\xi_i x) dx = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\xi_i x) + \xi_i T \sin \xi_i x \right]_0^{L_x} - \xi_i^2 \int_0^{L_x} T(x) \cos(\xi_i x) dx \\ &= -\xi_i^2 \bar{F}_F^c(\xi_i, y) \end{aligned}$$

puesto que en $x=0$, $\frac{\partial T}{\partial x}=0$ y en $x=L_x$; $\frac{\partial T}{\partial x} + a_x T=0$ donde
 $a_x = h_x/k$ siendo h_x el coeficiente de convección en
 la cara L_x y k la conductividad térmica del material

$$\bar{L}_F \left[-\frac{Q_0}{k} \right] = \int_0^{L_x} -\frac{Q_0}{k} \cos(\xi_i x) dx = -\frac{Q_0}{k} \frac{1}{\xi_i} \sin(\xi_i L_x) = f_0$$

$$\bar{L}_F \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = \frac{d^2 \bar{F}_F^c(\xi_i, y)}{dy^2}$$

y la ec.(1) toma la forma

$$\frac{d^2 \bar{F}_F^c(\xi_i, y)}{dy^2} - \xi_i^2 \bar{F}_F^c(\xi_i, y) = f_0 \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i y)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{F}_F^c(\xi_i, y) \quad (3)$$

siendo ξ_i las raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$

Aplicando a (2) la transformación de Laplace resulta

$$f(s) = \left(A + \frac{f_0}{\xi_i^2} \right) \cosh(\xi_i y) + \frac{B}{\xi_i} \sinh(\xi_i y) - \frac{f_0}{\xi_i^2}$$

y por las condiciones de contorno

$$\begin{array}{lll} \text{Para } y=0 & \frac{\partial T}{\partial y} = 0 & B=0 \\ y=L_y & \frac{\partial T}{\partial y} + a_y T = 0 & A = \frac{f_0}{\xi_i^2} \left[\frac{a_y - \xi_i \sinh(\xi_i L_y) - a_y \cosh(\xi_i L_y)}{\xi_i \sinh(\xi_i L_y) + a_y \cosh(\xi_i L_y)} \right] \end{array}$$

y

$$\bar{T}_F(\xi_i, y) = \frac{f_0}{\xi_i^2} \left[\frac{\cosh(\xi_i y)}{\xi_i \cosh(\xi_i L_y) + a_y \sinh(\xi_i L_y)} - 1 \right] \quad (4)$$

Sustituyendo en (3) los valores de y teniendo en cuenta que

$$(\xi_i^2 + a_x^2) \frac{1}{\xi_i} \sin(\xi_i L_x) = \frac{a_x}{\cos(\xi_i L_x)}$$

$$T(x, y) = \frac{2Q_0 a_x}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x)}{\xi_i^2 [L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \cos(\xi_i L_x) \left[1 - \frac{a_y \cosh(\xi_i y)}{\xi_i \sinh(\xi_i L_y) + a_y \cosh(\xi_i L_y)} \right] \quad (5)$$

Ejemplo 4, 2-2.

Se desea utilizar una resistencia eléctrica para obtener un flujo térmico de $20 \text{ (W/cm}^2\text{)}$ en la superficie de una cinta de sección rectangular de $20.25 \text{ (mm}^2\text{)}$. La resistencia eléctrica del material de $0.028 \text{ }\Omega/\text{m}$ y su conductividad térmica es de $15 \text{ (Kcal/h.m}^{\circ}\text{C)}$. Para el flujo térmico de $20 \text{ (W/cm}^2\text{)}$ el coeficiente de convección-radiación al medio que rodea la resistencia se estima en $150 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{°C)}$.
Calcular:

- 1) Generación de calor en la resistencia.
- 2) Corriente eléctrica
- 3) Temperatura en el centro de la resistencia admitiendo que la generación de calor es uniforme. La temperatura de fusión del material es de 1400°C .

Solución:

- 1) La generación de calor vale

$$\frac{20 \cdot (4+0,5) \cdot 10^2}{2 \cdot 0,25 \cdot 10^{-4}} \left(\frac{W}{m^3} \right) = 1,8 \cdot 10^8 \left(\frac{W}{m^3} \right) = 1,54 \cdot 10^8 \text{ (Kcal/h.m}^3)$$

2) Calor generado por m de cinta

$$20 \cdot 4,5 \cdot 100 = 9 \text{ Kw ; } I = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^3}{0,028}} = 566 \text{ A.}$$

3) Aplicando la ec.4,2-2(5)

$$\alpha_x = \alpha_y = \frac{h}{k} = \frac{150}{15} = 10$$

Considerando la cuarta parte de la sección rectangular ξ_i son las raíces de la ecuación

$$L_x \xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = \alpha_x L_x = 0,0125$$

y por la tabla I-3(5) Apéndice I

$$\xi_1 L_x = 0,11 \quad , \quad \xi_2 L_x = 3,14 \quad , \quad \xi_3 L_x = 6,28 \quad , \quad \xi_4 L_x = 9,42 \quad \xi_5 L_x = 12,56$$

En el centro, $x=y=0$

$$T(0,0) = \frac{2 \cdot 1,54 \cdot 10^8 \cdot 10}{15} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{[1,25 \cdot 10^{-3}(\xi_i^2 + 100) + 10] \xi_i^2 \cos(\xi_i L_x)} \left[1 - \frac{10}{\xi_i^2 \sinh(\xi_i L_y) + 10 \cos(\xi_i L_y)} \right]$$

$$= 1211 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

Obsérvese que la temperatura en $x=0 \quad y=L_y$ alcanza 1170°C . Si la resistencia eléctrica es función lineal con T la generación de calor es menor en las proximidades de la superficie y la temperatura en el centro aumenta. Este efecto es tanto más acusado cuanto menor es la conductividad térmica del material produciéndose variaciones dimensionales en el elemento generador y las correspondientes tensiones térmicas. Las ecuaciones del apartado 4,2-4 dan la distribución de temperaturas cuando la generación de calor es lineal. Un análisis más profundo de los fenómenos anteriores pueden obtenerse considerando la variación de la conductividad térmica con la temperatura y aplicando la transformación de Kirchhoff $\bar{k} = \int_{T_2}^{T_1} k(T) \frac{dT}{T_1 - T_2}$

4,2-3. Rectángulo con generación de calor $Q=Q_0(1+\beta T)$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q_0}{k}(1+\beta T) \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 4.2-3.

Aplicando la transformada finita del seno de Fourier a (1) en forma análoga al apartado 4,2-1

$$\frac{d^2 \bar{T}_F^s(\xi, \gamma)}{d\gamma^2} - \xi^2 \bar{T}_F^s(\xi, \gamma) = f_0 - \frac{Q_0}{k} \beta \bar{T}_F^s(\xi, \gamma) \quad (2)$$

donde

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{2Lx} \sin(\xi x) dx = \frac{2Q_0}{k} \frac{2Lx}{(2m+1)\pi}$$

para m impar. Aplicando a la ec. (2) la transformada de Laplace

$$f(s) \left(s^2 + \frac{Q_0 \beta}{k} - \xi^2 \right) = As + B + \frac{f_0}{s}$$

$$\bar{T}_F^s(\xi, \gamma) = \left(A + \frac{f_0}{s^2} \right) \cosh(\sigma \gamma) + \frac{B}{\sigma} \sinh(\sigma \gamma) - \frac{f_0}{\sigma^2}$$

Por las condiciones de contorno

En

$$\gamma=0 \quad A=0$$

$$\gamma=2Ly \quad B = \frac{f_0}{\sigma} \left(\frac{1 - \cosh(2\sigma Ly)}{\sinh(2\sigma Ly)} \right)$$

$$y \quad \bar{T}_F^s(\xi, \gamma) = \frac{f_0}{\sigma^2} \left(\frac{\cosh[\sigma(Ly-\gamma)]}{\cosh(\sigma Ly)} - 1 \right) \quad (4)$$

y por la inversión de $\bar{T}_F^s(\xi, \gamma)$

$$T(x, y) = \frac{4Q_0}{\pi k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi x/2Lx]}{(2m+1)\sigma^2} \left[1 - \frac{\cosh[\sigma(Ly-\gamma)]}{\cosh(\sigma Ly)} \right] \quad (5)$$

$$\text{donde} \quad \sigma^2 = [(2m+1)\pi/2Lx]^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}$$

4.2-4. Rectángulo con generación de calor, $Q=Q_0(1+\beta T)$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2} = -\frac{Q_0}{k}(1+\beta T) \quad (1)$$

con las condiciones de la Fig. 4,2-4.

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier en forma análoga al apartado 4,2-2

$$\frac{d^2 \bar{T}_F(\xi, y)}{dy^2} - \xi_i^2 \bar{T}_F(\xi, y) = \bar{f}_0 - \frac{Q_0 \beta}{k} \bar{T}_F(\xi, y) \quad (2)$$

siendo

$$\bar{f}_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \cos(\xi_i x) dx = -\frac{Q_0}{k} \cdot \frac{1}{\xi_i} \sin(\xi_i L_x)$$

con la inversión

$$T(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{T}_F(\xi_i, y) \quad (3)$$

y ξ_i son las raíces de $\xi_i \tan(\xi_i L_x) = a_x$

Aplicando a (2) la transformación de Laplace

$$f(s) = \left(A + \frac{f_0}{\sigma_i^2} \right) \cosh(\sigma_i y) + \frac{B}{\sigma_i} \sinh(\sigma_i y) - \frac{f_0}{\sigma_i^2} \quad (4)$$

$$\sigma_i^2 = \xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}$$

Por las condiciones de contorno

$$\text{En } y=0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad B=0$$

$$y=L_y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} + a_y T = 0 \quad A = \frac{f_0}{\sigma_i^2} \left[\frac{a_y - \sigma_i \sinh(\sigma_i L_y) - a_y \cosh(\sigma_i L_y)}{\sigma_i \sinh(\sigma_i L_y) + a_y \cosh(\sigma_i L_y)} \right]$$

$$y \quad \bar{T}_F(\xi_i, y) = \frac{f_0}{\sigma_i} \left[\frac{a_y \cos(\sigma_i y)}{\sigma_i \sinh(\sigma_i L_y) + a_y \cosh(\sigma_i L_y)} - 1 \right] \quad (5)$$

Sustituyendo en (3) los valores de $\bar{T}_F(\xi_i, y)$, y si $\frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \sin(\xi_i L_x)}{\xi_i} = \frac{a_x}{\cos(\xi_i L_x)}$

$$T(x, y) = \frac{2 Q_0 a_x}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] \sigma_i^2 \cos(\xi_i L_x)} \left[1 - \frac{a_y \cosh(\sigma_i y)}{\sigma_i \sinh(\sigma_i L_y) + a_y \cosh(\sigma_i L_y)} \right] \quad (6)$$

Ejemplo 4,2-4

Se desea conocer las temperaturas en la superficie y en el centro de la resistencia eléctrica del ejemplo 4,2-2, considerando que la resistencia es función lineal de la temperatura

Solución:

La generación de calor en la resistencia eléctrica es $R I^2$ y en función de la temperatura puede escribirse

$$R_0 (1 + 6 \cdot 10^{-5} T) I^2 = Q_0 (1 + \beta T) = Q$$

Tomando el valor de $Q = 1,54 \cdot 10^8 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$ a una temperatura media de $\frac{1211+1170}{2} = 1190$

$$Q_0 = \frac{1,54}{1,071} \cdot 10^8 = 1,43 \cdot 10^8 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

Aplicando la ec. 4,2-4(6) con los valores de ξ_i obtenidos en 4,2-2

$$\delta_1^2 = \xi_1^2 - \frac{Q_0 \beta}{k} = 7744 - 572 = 7172 \quad \delta_1 = 84,6$$

y en forma análoga

$$\delta_2^2 \approx \xi_2^2 \quad \delta_3^2 \approx \xi_3^2 \quad \delta_4^2 \approx \xi_4^2 \quad \delta_5^2 \approx \xi_5^2$$

Para el punto 0,0

$$T(0,0) = \frac{2 \cdot 1,43 \cdot 10^8}{15} \cdot 10 \sum_{i=1}^5 \frac{1}{[1,25 \cdot 10^{-3} (\xi_i^2 + 100) + 10]} \cdot \frac{1}{\delta_i^2} \cdot \frac{1}{\cos(\xi_i \cdot 1,25 \cdot 10^{-3})} \cdot \left[1 - \frac{10}{\delta_i \sinh(10^{-2} \delta_i) + 10 \cosh(10^{-2} \delta_i)} \right] = 1250 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

Para el punto (0,1)

$$T(0,1) = 1197 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

Para el punto (0,125,1) $T(0,125,1) = 1190 \text{ (}^\circ\text{C)}$

Para el punto (0,125,0) $T(0,125,0) = 1244 \text{ (}^\circ\text{C)}$

Los resultados obtenidos son ligeramente superiores a los obtenidos en el ejemplo 4,2-2 y no tienen mayor significación cuando la temperatura de fusión del material está muy por encima de la temperatura de trabajo. En nuestro caso la diferencia es de 150°C lo cual exige un control de dimensiones de la lámina y el funcionamiento en ausencia de atmósferas que por corrosión erosión o fatiga alteren las dimensiones o resistencia del material.

4.2-5. Rectángulo con generación de calor $Q = Q_0 \exp[-(bx+cy)]$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q_0}{k} \exp[-(bx+cy)] \quad (1)$$

Con las condiciones que se indican en la Fig. 4.2-5.

Aplicando a (1) las transformadas finitas del seno de Fourier

$$\bar{L}_F^s \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] = -\xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, y)$$

$$\bar{L}_F^s \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = \frac{d^2 \bar{f}_F^s(\xi, y)}{dy^2}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_F^s \left[-\frac{Q_0}{k} \exp[-(bx+cy)] \right] &= \int_0^{2L_x} -\frac{Q_0}{k} \exp[-(bx+cy)] \sin(\xi x) dx \\ &= -\frac{Q_0}{k} \frac{\exp[-cy]}{\xi^2 - b^2} \left[\exp(-2bL_x) (-\xi \cos(2\xi L_x) + \xi) \right] = f_0 \exp(-cy) \end{aligned}$$

y

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^s(\xi, y)}{dy^2} - \xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, y) = f_0 \exp(-cy) \quad (2)$$

donde $\xi = \frac{m\pi}{2L_x}$ y la inversión

$$T(x, y) = \frac{2}{2L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{f}_F^s(\xi, y) \quad (3)$$

Aplicando a (3) la transformación de Laplace $\bar{f}(s) = L[\bar{f}_F^s(\xi, y)]$

$$\xi^2 f(\xi) - A\xi - B - \xi^2 f(\xi) = \frac{f_0}{\xi + c}$$

$$f(\xi) = \frac{A\xi}{\xi^2 - \xi^2} + \frac{B}{\xi^2 - \xi^2} + \left(\frac{C - \xi}{\xi^2 - \xi^2} + \frac{1}{\xi + c} \right) \frac{f_0}{(C + \xi)(C - \xi)}$$

y por la inversión de $f(\xi)$

$$\bar{f}_F^{\pm}(\xi, y) = \left(A - \frac{f_0}{C^2 - \xi^2} \right) \cosh(\xi y) + \frac{1}{\xi} \left(B + \frac{C f_0}{C^2 - \xi^2} \right) \sinh(\xi y) + \frac{f_0}{C^2 - \xi^2} \exp(-cy) \quad (4)$$

Por las condiciones de contorno

$$\text{En } y=0 \quad \bar{f}_F^{\pm}(\xi, 0) = 0 \quad A = 0$$

$$\text{En } y=L_y \quad \bar{f}_F^{\pm}(\xi, L_y) = 0$$

y

$$\bar{f}_F^{\pm}(\xi, y) = -\frac{f_0}{C^2 - \xi^2} \left[\frac{\sinh[\xi(L_y - y)]}{\sinh(\xi L_y)} + \sinh(\xi y) \left(\frac{C}{\xi} - \frac{\exp(-cL_y)}{\sinh(\xi L_y)} \right) - \exp(-cy) \right] \quad (5)$$

y sustituyendo en (3) $\bar{f}_F^{\pm}(\xi, y)$, f_0

$$T(x, y) = \frac{Q_0}{L_x k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi [1 - \exp(-2bL_x) \cos(2\xi L_x)]}{(\xi^2 - b^2)(C^2 - \xi^2)} \left[\frac{\sinh[\xi(L_y - y)]}{\sinh(\xi L_y)} + \sinh(\xi y) \left(\frac{C}{\xi} + \frac{\exp(-cL_y)}{\sinh(\xi L_y)} \right) - \exp(-cy) \right] \quad (6)$$

$$\text{donde } \xi = \frac{m\pi}{L_x}$$

4.2-6. Rectángulo con generación de calor $Q = Q_0 \exp[-(bx + cy)]$ y convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q_0}{k} \exp[-(bx + cy)] \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 4,2-6.

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fou-

rier y teniendo en cuenta

$$\begin{aligned}\bar{f}_F^c \left[-\frac{Q_0}{k} \exp[-(bx+cy)] \right] &= \int_0^{L_x} -\frac{Q_0}{k} \exp[-(bx+cy)] \cos(\xi_i x) dx \\ &= -\frac{Q_0}{k} \frac{\exp(-cy)}{\xi_i^2 - b^2} \left[\exp(-bL_x) [b \cos(\xi_i L_x) + \xi_i \sin(\xi_i L_x)] + b \right] = f_0 \exp(-cy)\end{aligned}$$

resulta

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^c(\xi_i, y)}{dy^2} - \xi_i^2 \bar{f}_F^c(\xi_i, y) = f_0 \exp(-cy) \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x, y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{f}_F^c(\xi_i, y) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$

Aplicando a (2) la transformación de Laplace y su inversión como en el apartado 4,2-5,

$$\bar{f}_F^c(\xi_i, y) = \left(A - \frac{f_0}{c^2 - \xi_i^2} \right) \cosh(\xi_i y) + \frac{1}{\xi_i} \left(B + \frac{C f_0}{c^2 - \xi_i^2} \right) \sinh(\xi_i y) + \frac{f_0}{c^2 - \xi_i^2} \exp(-cy)$$

Por las condiciones de contorno

$$\text{En } y=0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad B=0$$

$$\text{En } y=L_y \quad \frac{\partial T}{\partial y} + a_y T = 0$$

y

$$\begin{aligned}\bar{f}_F^c(\xi_i, y) &= -\frac{f_0}{c^2 - \xi_i^2} \left[\frac{\xi_i \left([a_y \sinh(\xi_i L_y) + \xi_i \cosh(\xi_i L_y)] + \xi_i \exp(-cL_y)(c - a_y) \right)}{a_y \cosh(\xi_i L_y) + \xi_i \sinh(\xi_i L_y)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \cosh(\xi_i y) - \frac{c}{\xi_i} \sinh(\xi_i y) - \exp(-cy) \right] \quad (4)\end{aligned}$$

Sustituyendo (4) en (3) y teniendo en cuenta el valor de f_0

$$T(x,y) = \frac{2Q_0}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x) \exp(-b L x)}{[L x (\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] (\xi_i^2 - b^2) (c^2 \xi_i^2)} \left[b \cos(\xi_i L x) + \xi_i \sin(\xi_i L x) + b \right] \left[\frac{c}{\xi_i} \cdot \right. \\ \left. \frac{[(a_y - c) \xi_i \exp(-c L y) - a_y \sinh(\xi_i L y) - \xi_i \cosh(\xi_i L y)] \cosh(\xi_i L y) + \frac{c}{\xi_i} \sinh(\xi_i y) + \exp(-c y)}{a_y \cosh(\xi_i L y) + \xi_i \sinh(\xi_i L y)} \right] \quad (5)$$

4.2-7. Rectángulo con generación de calor $Q = Q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2L_y}\right)$ y convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{Q_0}{k} \sin\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{2L_y}\right) \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 4,2-6.

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier se tiene

$$\int_0^{L_x} -\frac{Q_0}{k} \sin\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2L_y}\right) \cos(\xi_i x) dx = -\frac{Q_0}{k} \sin\left(\frac{\pi y}{2L_y}\right) (4\pi + 16 \xi_i \sin(\xi_i L_x)) \cdot \frac{1}{(\pi - 4\xi_i^2)^2} \\ = f_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2L_y}\right)$$

y en forma análoga para los restantes términos de (1) resulta

$$\frac{d^2 \bar{T}_F(\xi_i, y)}{dy^2} - \xi_i^2 \bar{T}_F(\xi_i, y) = f_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2L_y}\right) \quad (2)$$

con la inversión

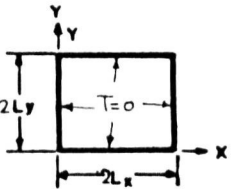
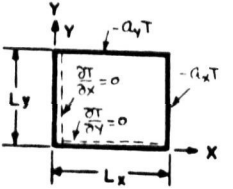
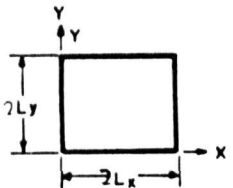
$$T(x,y) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_x^2 + \xi_i^2) \cos(\xi_i x)}{[L x (a_x^2 + \xi_i^2) + a_x]} \bar{T}_F^c(\xi_i, y) \quad (3)$$

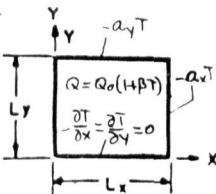
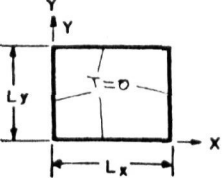
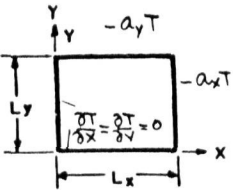
donde ξ_i son las raíces de la ecuación $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$

Aplicando a (2) la transformación de Laplace

$$s^2 f(s) - A s - B - \xi_i f(s) = f_0 \left(\frac{\pi}{2L_y} \right) \cdot \frac{1}{s^2 + \left(\frac{\pi}{2L_y} \right)^2} \\ f(s) = \frac{A s}{s^2 - \xi_i^2} + \frac{B}{s^2 - \xi_i^2} + f_0 \left(\frac{\pi}{2L_y} \right) \frac{1}{[s^2 + \left(\frac{\pi}{2L_y} \right)^2] (s^2 - \xi_i^2)}$$

y por la inversión de $f(s)$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|---|
|  <p>Fig. 4,2-1</p> | $T=0$ en $x=0$ $y=0$ $x=2L_x$ $y=2L_y$ $\frac{\partial T}{\partial y}=0$ $y=L_y$ $\frac{\partial T}{\partial x}=0$ $x=L_x$ $Q=Ch$ | $T(x,y) = \frac{16 Q_0 L_x^2}{\pi^3 k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{(2m+1)\pi(L_y-y)}{2L_x}\right)}{\cosh\left(\frac{(2m+1)\pi L_y}{2L_x}\right)} \right] \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{2L_x}\right)$ |
|  <p>Fig. 4,2-2</p> | $\frac{\partial T}{\partial x}=0$ $y=0$ $\frac{\partial T}{\partial y}=0$ $x=0$ $\frac{\partial T}{\partial x}=-a_x T$ $x=L_x$ $\frac{\partial T}{\partial y}=-a_y T$ $y=L_y$ $a_x = \frac{h_x}{k}$; $a_y = \frac{h_y}{k}$; $Q=Ch=Q_0$ | $T(x,y) = \frac{2 Q_0 a_x}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] \xi_i^2 \cosh(\xi_i L_x)} \left[1 - \frac{a_y \cosh(\xi_i y)}{\xi_i \sinh(\xi_i L_y) + a_y \cosh(\xi_i L_y)} \right]$ <p>ξ_i, raíces de $\xi_i \tanh(\xi_i L_x) = a_x$</p> |
|  <p>Fig. 4,2-3</p> | $T=0$ en $x=0$ $y=0$ $x=2L_x$ $y=2L_y$ $\frac{\partial T}{\partial x}=0$ $x=L_x$ $\frac{\partial T}{\partial y}=0$ $y=L_y$ $Q=Q_0(1+\beta T)$, $\beta=Ch$ | $T(x,y) = \frac{1 Q_0}{\pi k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2L_x}\right]}{\sigma^2 (2m+1)} \left[1 - \frac{a_y \cosh((L_y-y)\sigma)}{\cosh \sigma L_y} \right]$ $\sigma^2 = \left[\frac{(2m+1)\pi}{2L_x} \right]^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 4,2-4</p> | $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x=0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad y=0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -a_x T \quad x=L_x$ $\frac{\partial T}{\partial y} = -a_y T \quad y=L_y$ $Q = Q_0(1 + \beta T) \quad \beta = \text{cte}$ $a_x = \frac{h_x}{k} \quad a_y = \frac{h_y}{k}$ | $T(x,y) = \frac{2Q_0 a_x}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \xi_i \cos(\xi_i L_x) \left[1 - \frac{\cosh(\xi_i y) a_y}{\xi_i \sinh(\xi_i L_y) + a_y \cosh(\xi_i L_y)} \right]$ $\xi_i = \xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k} \quad \xi_i, \text{ raíces de } \xi_i \tanh(\xi_i L_x) = a_x$ |
|  <p>Fig. 4,2-5</p> | $T = 0 \quad \text{en} \quad x=0$ $y=0$ $x=2L_x$ $y=L_y$ $Q = Q_0 \exp[-(bx+cy)]$ | $T(x,y) = \frac{Q_0}{k L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi [1 - \exp(-2bL_x) \cdot \cos(2\xi L_x)]}{(\xi^2 - b^2)(c^2 - \xi^2)} \cdot \frac{[\sinh[(L_y - y)\xi]]}{[\sinh(L_y \xi)]} + \frac{\sinh(\xi y)}{\sinh(L_y \xi)}$ $\cdot \left(\frac{c}{\xi} + \frac{\exp(-cL_y)}{\sinh(\xi L_y)} - \exp(-cy) \right]$ $\xi = \frac{m\pi}{2L_x}$ |
|  <p>Fig. 4,2-6</p> | $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x=0$ $\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad y=0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -a_x T \quad x=L_x$ $\frac{\partial T}{\partial y} = -a_y T \quad y=L_y$ $Q = Q_0 \exp[-(bx+cy)]$ $a_x = \frac{h_x}{k} \quad a_y = \frac{h_y}{k}$ | $T(x,y) = \frac{2Q_0}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x) \exp(-bL_x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] (\xi_i^2 - b^2)(c^2 - \xi_i^2)} \cdot [b \cos(\xi_i L_x) + \xi_i \sinh(\xi_i L_x) + b]$ $\cdot \left[\frac{c}{\xi_i} \left(\frac{(a_y - c) \xi_i \exp(-cL_y) - a_y \sinh(\xi_i L_y) - \xi_i \cosh(\xi_i L_y)}{a_y \cosh(\xi_i L_y) + \xi_i \sinh(\xi_i L_y)} \right) \cos(\xi_i L_y) + \frac{\xi_i}{\xi_i} \sinh(\xi_i y) + \exp(-cy) \right]$ $\xi_i, \text{ raíces de } \xi_i \tanh(\xi_i L_x) = a_x$ |

$$\bar{f}_F^c(\xi, y) = A \cosh(\xi y) + \left(B + \frac{f_0 \left(\frac{\pi}{2L_y} \right)}{\xi^2 + \left(\frac{\pi}{2L_y} \right)^2} \right) \frac{\sinh(\xi y)}{\xi} - \frac{f_0}{\xi^2 + \left(\frac{\pi}{2L_y} \right)^2} \sin \left(\frac{\pi}{2L_y} y \right) \quad (4)$$

Por las condiciones de contorno

$$\text{En } y=0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad B=0$$

$$\text{En } y=L_y \quad \frac{\partial T}{\partial y} + a_y T = 0$$

y

$$\begin{aligned} \bar{f}_F^c(\xi, y) = \frac{f_0}{\xi^2 + \tau^2} & \left[\frac{(\xi_i a_y \sinh(\tau L_y) - a_y \sinh(\xi_i L_y) + \tau \xi_i \cosh(\tau L_y) - \tau \xi_i \cosh(\xi_i L_y))}{\xi_i [a_y \cosh(\xi_i L_y) + \xi_i \sinh(\xi_i L_y)]} \right. \\ & \left. + \frac{\tau}{\xi_i} \sinh(\xi_i \tau) - \sinh(\tau y) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

y substituyendo en (3) los valores de $\bar{f}_F^c(\xi_i, y)$ y f_0 , $\tau = \frac{\pi}{2L_y}$

$$\begin{aligned} T(x, y) = \frac{2Q_0}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\alpha_i^2 + \xi_i^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\alpha_i^2 + \xi_i^2) + \alpha_i x]} \cdot \frac{4\pi + 16 \xi_i \sinh(\xi_i L_y)}{(4 - 4\xi_i)^2 (\xi_i^2 + \tau^2)} \cdot \\ \cdot \left[\frac{a_y \sinh(\xi_i L_y) + \tau \xi_i \cosh(\xi_i L_y) - \xi_i a_y \sinh(\tau L_y) - \tau \xi_i \cosh(\tau L_y)}{\xi_i [a_y \cosh(\xi_i L_y) + \xi_i \sinh(\xi_i L_y)]} + \right. \\ \left. + \frac{\tau}{\xi_i} \sinh(\xi_i y) - \sinh(\tau y) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

4.3-1. Paralelepípedo con generación de calor uniforme

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 4.3-1.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier y teniendo en cuenta que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{Q_0}{k} \right) \right] = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \cos \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) dx = -\frac{2Q_0}{k} \frac{L_x}{(2m+1)\pi} = f_0 \quad (\text{Para } m \text{ impar})$$

resulta

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_F^s(\xi, \eta, z)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \bar{f}_F^s(\xi, \eta, z)}{\partial z^2} - \xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, \eta, z) = f_0 \quad (2)$$

con la inversión, $\xi = (2m+1)\frac{\pi}{L_x}$

$$T(x, y, z) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{f}_F^s(\xi, \eta, z) \quad (3)$$

aplicando nuevamente la transformada finita del seno de Fourier a la ec. (2)

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^{s'}(\eta, y)}{dy^2} - (\xi^2 + \eta^2) \bar{f}_F^{s'}(\eta, y) = f_0' \quad (4)$$

$$f_0' = \frac{2}{\eta} \quad \eta = (2p+1)\frac{\pi}{L_z}$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^s(\xi, z, y) = \frac{2}{L_z} \sum_{p=0}^{\infty} \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, y) \sin(\eta y) \quad (5)$$

Resolviendo la ec. (4) por la transformada de Laplace

$$\bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, y) = \left(A + \frac{f_0'}{\sigma^2} \right) \cosh(\sigma y) + \frac{B}{\sigma} \sinh(\sigma y) - \frac{f_0'}{\sigma^2} \quad (6)$$

$$\sigma^2 = \eta^2 + \xi^2$$

y por las condiciones $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ en $y = L_y$, $T = 0$ $y = 0$

$$\bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, y) = \frac{f_0'}{\sigma^2} \left[\frac{\cosh \sigma(L_y - y)}{\cosh(\sigma L_y)} - 1 \right] \quad (7)$$

Finalmente por la inversión de (5) y (3)

$$T(x, y, z) = \frac{8Q_0}{k L_x L_z} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\eta z)}{(\xi^2 + \eta^2) \xi \eta} \left[1 - \frac{\cosh \sigma(L_y - y)}{\cosh(\sigma L_y)} \right] \quad (8)$$

4.3-2. Paralelepípedo con generación de calor uniforme u convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 4.3-2.

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta, z)}{\partial^2 \eta^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta, z)}{\partial z^2} - \xi_i^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta, z) = f_0 \quad (2)$$

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \cos(\xi_i x) dx = -\frac{Q_0}{k} \cdot \frac{1}{\xi_i} \sin(\xi_i x)$$

con la inversión

$$T(x, y, z) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta, z) \quad (3)$$

$$\xi_i \text{ son las raíces de } \xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$$

Aplicando a (2) nuevamente la transformada del coseno de Fourier

$$\frac{d^2 \bar{T}_F^{c'}(\xi_i, \eta, \gamma)}{d\gamma^2} - (\xi_i^2 + \eta_i^2) \bar{T}_F^{c'}(\xi_i, \eta, \gamma) = f_0' \quad (4)$$

con la inversión

$$\bar{T}_F^{c'}(\xi_i, \eta, z) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\eta_i^2 + a_z^2) \cos(\eta_i z)}{[L_z(\eta_i^2 + a_z^2) + a_z]} \bar{T}_F^{c'}(\xi_i, \eta, \gamma) \quad (5)$$

$$\eta_i \text{ son las raíces de } \eta_i \operatorname{tg}(\eta_i L_z) = a_z$$

Resolviendo (4) por la transformación de Laplace

$$\bar{T}_F^{c'}(\xi_i, \eta, \gamma) = \left(A + \frac{f_0'}{\xi_i^2}\right) \cosh(\xi \gamma) + \frac{B}{\xi} \sinh(\xi \gamma) - \frac{f_0'}{\xi^2} \quad (6)$$

y por las condiciones de contorno

$$\bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \gamma) = \frac{f_0'}{\sigma^2} \left[\frac{a_y \cosh(\sigma y)}{a_y \cosh(\sigma L_y) + \sigma \sinh(\sigma L_y)} - 1 \right] \quad (7)$$

$$\sigma^2 = \eta_j^2 + \xi_i^2$$

y por las inversiones (5) y (3) teniendo en cuenta las relaciones de las raíces ξ_i y η_j

$$T(x, y, z) = 4 \frac{Q_0}{k} a_x a_z \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j z)}{\sigma^2 \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_z) [L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] [L_z(\eta_j^2 + a_z^2) + a_z]} \cdot \left[1 - \frac{a_y \cosh(\sigma y)}{a_y \cosh(\sigma L_y) + \sigma \sinh(\sigma L_y)} \right] \quad (8)$$

donde $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$

4.3-3. Paralelepípedo con generación de calor $Q = Q_0(1 + \beta T)$ u convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} (1 + \beta T) \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 4.3-3.

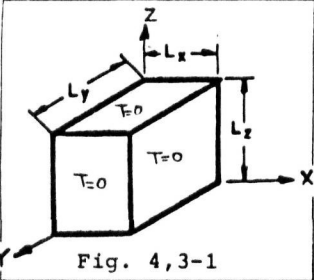
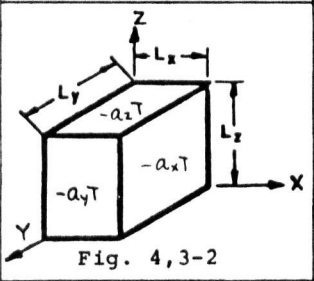
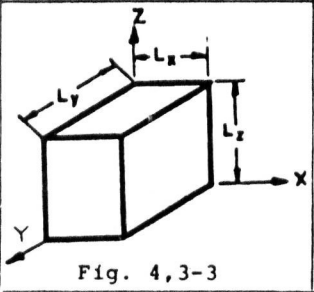
Procediendo en forma análoga al apartado 4.3-2. De (1) se tiene

$$\frac{\partial^2 \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, z)}{\partial z^2} - \sigma_0^2 \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, z) = f_0 \quad (2)$$

donde $\sigma_0^2 = \xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}$ y ξ_i son las raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$ con la inversión

$$T(x, y, z) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, z) \quad (3)$$

Por aplicación a (2) nuevamente de la transformada finita del coseno de Fourier

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|--|--|
|  <p>Fig. 4,3-1</p> | $T=0 \text{ en } \begin{aligned} x=0 &; x=L_x \\ y=0 &; y=L_y \\ z=0 &; z=L_z \end{aligned}$ $Q_0 = \text{cte}$ | $T(x,y,z) = \frac{8 Q_0}{k L_x L_z} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\eta z)}{(\xi^2 + \eta^2) \xi \eta} \left[1 - \frac{\cosh(\sigma(L_y - y))}{\cosh(\sigma L_y)} \right]$ $\sigma^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad \xi = (2m+1) \frac{\pi}{L_x} \quad \eta = (2p+1) \frac{\pi}{L_z}$ |
|  <p>Fig. 4,3-2</p> | $\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \quad x=0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad y=0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \quad z=0; \quad Q_0 = \text{cte} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= -a_x T, \quad x=L_x; \quad a_x = \frac{h_x}{k} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= -a_y T, \quad y=L_y; \quad a_y = \frac{h_y}{k} \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= -a_z T, \quad y=z; \quad a_z = \frac{h_z}{k} \end{aligned}$ | $T(x,y,z) = \frac{4 Q_0 a_x a_z}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j z)}{(\xi_i^2 + \eta_j^2) \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_z)} \cdot$ $\cdot \frac{\left[L_x (\xi_i^2 + a_x^2) + a_x \right] \left[L_z (\eta_j^2 + a_z^2) + a_z \right] \left[1 - \frac{a_y \cosh(\sigma y)}{a_y \cosh(\sigma L_y) + \sigma \sinh(\sigma L_y)} \right]}{\left[L_x (\xi_i^2 + a_x^2) + a_x \right] \left[L_z (\eta_j^2 + a_z^2) + a_z \right]}$ $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 \quad \xi_i, \text{ raíces de } \xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$ $\eta_j \quad \quad \quad \eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_z) = a_z$ |
|  <p>Fig. 4,3-3</p> | <p>Condiciones de la Fig. 4,3-2 y</p> $Q = Q_0 (1 + \beta T)$ $\beta = \text{cte}$ | $T(x,y,z) = \frac{4 Q_0 a_x a_z}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j z)}{\sigma_i^2 \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_z) [L_x (\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] [L_z (\eta_j^2 + a_z^2) + a_z]}$ $\cdot \left[1 - \frac{a_y \cosh(\sigma_i y)}{a_y \cosh(\sigma_i L_y) + \sigma_i \sinh(\sigma_i L_y)} \right]$ $\sigma_i^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}$ |

$$\frac{d^2 \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, y)}{dy^2} - \sigma_i^2 \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, y) = f_0^i \quad (4)$$

con $\sigma_i^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}$ η_j las raíces de $\eta_j \tanh(\eta_j L_2) = a_2$
con la inversión

$$\bar{f}_F^c(\xi_i, y, z) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + a_2^2) \cos(\eta_j z)}{[L_2(\eta_j^2 + a_2^2) + a_2]} \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, y) \quad (5)$$

Resolviendo la ec. (4) con las condiciones de contorno

$$\bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, y) = \frac{f_0^i}{\sigma_i^2} \left[\frac{a_y \cosh(\sigma_i y)}{a_y \cosh(\sigma_i L_y) + \sigma_i \sinh(\sigma_i L_y)} - 1 \right] \quad (6)$$

y por las inversiones (5) y (3)

$$T(x, y, z) = \frac{4Q_0 a_x a_z}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j z)}{\sigma_i^2 \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_z) [L_x(\xi_i^2 + a_x^2) - a_x] [L_y(\eta_j^2 + a_2^2) + a_2]} \left[1 - \frac{a_y \cosh(\sigma_i y)}{a_y \cosh(\sigma_i L_y) + \sigma_i \sinh(\sigma_i L_y)} \right] \quad (7)$$

4.4-1. Cilindro infinito con generación de calor uniforme

En régimen estacionario y si la conductividad térmica se supone constante la ecuación para el sólido

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k}$$

se transforma en

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones, Fig. (4,4-1)

$$\begin{array}{ll} T = T_s & r = R \\ \frac{dT}{dr} = 0 & r = 0 \\ T = T_0 & r = 0 \end{array} \quad (2)$$

La ecuación (1) puede escribirse

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{Q_0}{k} \quad (3)$$

y la solución general es

$$T = -\frac{Q_0 r^2}{4k} + C_1 \ln r + C_2 \quad (4)$$

Con las condiciones (2) resulta finalmente

$$T = T_0 - \frac{Q_0 r^2}{4k} \quad (5)$$

La expresión (5) da la distribución de temperaturas en el cilindro en función del radio.

En $r=R$ se cumple

$$T_s = T_0 - \frac{Q_0 R^2}{4k} \quad (6)$$

y el calor a través de la superficie admitiendo L suficientemente grande para que se cumpla $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$

$$Q_0 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^3} \right) \cdot \pi R^2 L = q \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h}} \right)$$

y

$$T_0 - T_s = \frac{q}{4\pi L k} \quad (7)$$

Si el calor se elimina del cilindro con un coeficiente de transmisión de calor h ($\text{kcal/h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$)

$$T_0 - t_f = \frac{q}{2\pi L} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{R h} \right) \quad (8)$$

o

$$T_0 - t_f = \frac{q}{2\pi R L} \left(\frac{R}{2k} + \frac{1}{h} \right) \quad (9)$$

donde $q/2\pi R L$ representa el flujo térmico en la superficie del cilindro.

Si el cilindro está envuelto con otro material de espesor ΔR , y con una caída de temperaturas en la superficie de contacto ΔT_c

$$T_o - t = \frac{q}{2\pi L} \left[\frac{1}{2k} + \frac{1}{(R+\Delta R)h} + \frac{1}{R_1} \ln \left(\frac{R+\Delta R}{R} \right) \right] + \Delta T_c \quad (10)$$

Ejemplo 4,4-1(a)

De un reactor nuclear de agua a presión se tienen los datos siguientes:

Potencia térmica 2652 MW_t

Calor generado en el combustible 97,4%

Presión nominal del agua en la refrigeración del núcleo
154 kg/cm²

Temperatura del agua a la entrada en el núcleo 283°C

Temperatura del agua a la salida del núcleo 322°C

Generación de calor media en el combustible $2,77 \cdot 10^8$ (Kcal/h.m²)
(comb.nuevo)

Tres circuitos primarios.

El combustible está formado por pastillas de UO₂ con un contenido medio de uranio 235 de 2,10% para la región I del núcleo, 2,6% para la región II y 3,10% para la región III. La densidad de las pastillas es 95% de la densidad teórica (10,97 (g/cm³)) y sus dimensiones iniciales son 0,8191 cm de diámetro y 1,346 (cm) de altura. Las pastillas se alojan en un tubo de Zircaloy-4 de 0,0489 cm de espesor quedando un huelgo entre pastilla y tubo de 0,0165 cm. La longitud activa de las barras combustibles es de 364,9 cm. Las barras combustibles se acoplan en elementos combustibles de 17x17 = 289 de cuales 264 son barras combustibles, 24 barras son de control y una de instrumentación. La dis-

tancia entre centros de barra en el elemento es de 1.2598 cm siendo el diámetro exterior del tubo de Zircalov-4 de 0.9499 cm . es decir un espacio entre barras de 0.309 cm . La distancia entre centros de elementos combustibles es de 21,5036 cm y las barras combustibles se mantienen en los elementos por medio de rejillas espaciadoras. Se desea estimar.

- a) Número de barras para generar la potencia térmica de 2692 MWt
- b) Potencia por metro de barra.
- c) Flujo térmico medio en la superficie exterior de las ba
rras.
- d) Peso de UO_2 para una carga completa del reactor.
- e) Caudal y velocidad del agua a través del núcleo.
- f) Coeficiente de transmisión de calor entre barras y agua de refrigeración.
- g) Distribución de temperaturas en una sección radial de la barra admitiendo generación de calor uniforme en el combustible.
- h) Repetir g) si la generación de calor máxima en una pas
tilla durante el generado del combustible es 2,50 ve
ces la generación de calor media.

- a) La potencia generada en las barras es

$$2652.0974 = 2583 \text{ MWt} \approx 2.22 \cdot 10^9 \text{ (kcal/r.)}$$

Potencia generada por barra combustible

$$2.77 \cdot 10^8 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h.m}^3} \right) \cdot 3.649 \cdot \pi \cdot \frac{0.8191^2}{4} \cdot 10^{-4} (\text{m}^3) = 5.32 \cdot 10^4 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h. barra}} \right)$$

$$n^{\circ} \text{ de barras } \frac{2,22 \cdot 10^9}{5,32 \cdot 10^4} = 41705$$

$$b) \frac{5,32 \cdot 10^4}{3,649} \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{barra}} \right) \left(\frac{\text{barra}}{\text{m}} \right) = 1,495 \cdot 10^4 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}} \right) \equiv 16,96 \left(\frac{\text{kw}}{\text{m}} \right)$$

$$c) \left(\frac{\bar{q}}{s} \right) = \frac{1,459 \cdot 10^4 \cdot 10^2}{\pi \cdot 0,949} = 4,89 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^2} \right)$$

$$d) \quad 41705 \text{ barras} \equiv 157 \text{ elementos combustibles}$$

Peso de UO_2 / elemento

$$264 \cdot 3,649 \cdot \frac{\pi \cdot 0,8191^2}{4} \cdot 10^{-4} \cdot 10970 \cdot 0,95 = 527 \text{ (kg)}$$

$$\text{Peso total de } \text{UO}_2 = 82.739 \text{ (kg)}$$

$$e) \quad q = m c_p (t_e - t_s)$$

Tomando el valor de c_p del agua a $150 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$ y $\bar{t} = 303 \text{ (}^{\circ}\text{C)}$
 $c_p = 1,28 \text{ (kcal/kg } ^{\circ}\text{C)}$

$$m = \frac{2,22 \cdot 10^9}{1,28 \cdot 39} = 4,44 \cdot 10^7 \left(\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right) \equiv 1,48 \cdot 10^7 \left(\frac{\text{kg}}{\text{h} \cdot \text{circuito}} \right)$$

La sección libre al paso de agua = $21,5^2 \cdot 157$ elementos - 45373 barras = $4,04 \text{ m}^2$

$$4,44 \cdot 10^7 \left(\frac{\text{kg}}{\text{h}} \right) \frac{1}{700} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right) \frac{1}{4,04} \left(\text{m}^2 \right) \cdot \frac{1}{3600} \left(\frac{\text{h}}{\text{s}} \right) = v = 4,36 \text{ (m/s)}$$

f) Por la expresión adimensional

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} \text{ ó } \frac{h De}{k_f} = 0,023 \left(\frac{G De}{\mu_f} \right)^{0,8} \left(\frac{c_p \mu_f}{k_f} \right)^{0,4}$$

$$k_f (303^{\circ}\text{C}) \text{ y } 150 \text{ kg/cm}^2 = 0,434 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m} \cdot ^{\circ}\text{C}} \right), \quad \mu_f = 0,316 \left(\frac{\text{kg}}{\text{h} \cdot \text{m}} \right)$$

$$De = \frac{4 \cdot \text{Sección}}{\text{Perímetro mojado}} = \frac{4 \cdot (1,2598^2 - \pi \cdot 0,4740^2)}{\pi \cdot 0,9499} = 1,17 \text{ (cm)}$$

$$G = v \cdot \rho = 4,36 \cdot 3600 \cdot 700 = 1,098 \cdot 10^7 \left(\frac{\text{kg}}{\text{h} \cdot \text{m}^2} \right), \quad Pr^{0,4} = 1$$

$$h = 0,023 \cdot \frac{0,434}{1,17 \cdot 10^{-2}} \cdot 3,07 \cdot 10^4 = 26192 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}} \right)$$

- g) La aplicación de la ec. 4,4-1(5) de distribución de temperatura en el combustible exige el conocimiento de la conductividad térmica en las pastillas de UO_2 . Durante el funcionamiento del reactor las pastillas modifican sus dimensiones y forma y la situación real desde el punto de vista térmico es una masa de UO_2 que se acopla a la vaina con puntos de contacto entre ambos. De los datos existentes se considera como valor aceptable la expresión de Robertson

$$\int_0^{2800(^\circ C)} k dT = 97 (W/cm), \quad \int_0^{400(^\circ C)} k dT = 17 (W/cm)$$

$$\bar{k} (2800(^\circ C) y 400(^\circ C)) = 2,86 (kcal/hm^\circ C)$$

La caída de temperatura entre vaina y combustible es función de la estructura de los contactos y gases que llenan el hueco. Para una potencia de 170 (W/cm de barra) con los resultados obtenidos por Ficara y otros puede tomarse la resistencia de contacto, $h_c = 3000$

($kcal/hm^\circ C$) La conductividad térmica del Zincoloy-4

$$k_v = 10,36 (kcal/hm^\circ C) \quad \text{Aplicando la ec. 4,1-4(10)}$$

$$T_o - 303 = \frac{q}{2\pi L} \left[\frac{1}{2k_c} + \frac{1}{R_i h_c} + \frac{1}{k_v} \ln \left(\frac{R_o}{R_i} \right) + \frac{1}{h R_o} \right]$$

$$\text{v si } \left(\frac{q}{L} \right) = \frac{q}{2\pi R L} = 4,89 \cdot 10^5 (kcal/hm^2)$$

$$T - 303 = 4,89 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,819 \cdot 10^{-2}}{2} \left[\frac{1}{2,86 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 10^2}{3000 \cdot 0,852} + \frac{1}{10,36} \ln \left(\frac{0,949}{0,852} \right) + \frac{10,2}{26192 \cdot 0,949} \right] = 548(^\circ C) \quad T_o = 851(^\circ C)$$

y la distribución de temperaturas en los distintos componentes del combustible son

- Temperatura en la superficie exterior de la vaina

$$T_e = 319(^\circ C)$$

- Temperatura en la superficie interior de la vaina

$$T_i = 339(^\circ C)$$

- Temperatura en la superficie del combustible

$$T_c = 495(^{\circ}\text{C})$$

- Temperatura en el centro del combustible

$$T_o = 851(^{\circ}\text{C})$$

h) Para generación de calor máxima

$$T_o - 303 = 5.10^3 [\text{---}] \quad T_o = 1673(^{\circ}\text{C})$$

$$T_c = 783(^{\circ}\text{C}), \quad T_i = 393(^{\circ}\text{C}) \quad T_e = 353(^{\circ}\text{C})$$

4,4-2. Cilindro infinito con generación de calor $Q_o(1+\beta T)$

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_o}{k} (1+\beta T) \quad (1)$$

Con la condición, Fig. 4,4-2

$$T=0 \quad r=R \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i) = -\int_0^R \frac{Q_o}{k} r J_0(\xi_i r) dr - \frac{Q_o}{k} \beta \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

$$\int_0^R -\frac{Q_o}{k} r J_0(\xi_i r) dr = -\frac{Q_o}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

y de (3)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i) \left(\xi_i^2 - \frac{Q_o}{k} \beta \right) = \frac{Q_o}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

$$T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i (\xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}) J_1(\xi_i R)} \quad (6)$$

4.4-3. Cilindro infinito con generación de calor $Q = Q_0(1 + \beta T)$ " con vección.

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} (1 + \beta T) \quad (1)$$

con la condición, Fig. (4,4-3)

$$\frac{dT}{dr} + \frac{h}{k} T = 0 \quad r=R \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i) = -\int_0^R \frac{Q_0}{k} r J_0(\xi_i r) dr - \frac{Q_0 \beta}{k} \bar{T}_{H,0}(\xi_i) \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r) \bar{T}_{H,0}(\xi_i)}{(\xi_i^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)} \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

y si

$$\int_0^R -\frac{Q_0}{k} r J_0(\xi_i r) dr = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i) = \frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} \frac{J_1(\xi_i R)}{(\xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k})}$$

y finalmente

$$T(r) = \frac{2Q_0 a_r}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R) (\xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k})} \quad (5)$$

Ejemplo 4.4-2

Los elementos calefactores de un horno son resistencias eléctricas de 3 (mm) de diámetro y 0,200 (Ω/m) a 0°C. La caída

de tensión por metro de resistencia es de 15 (V/m) . La temperatura de la carga del horno es de 600°C . El calor se transmite a la carga por radiación y convección. Para el mecanismo de radiación el factor de forma entre 600°C y 1000°C referido a un metro de elemento calefactor es 0.80 y el coeficiente de convección 20 $(\text{kcal/h m}^2\text{ }^\circ\text{C})$. La conductividad térmica del material es de 10 $(\text{kcal/h m }^\circ\text{C})$ entre $600\text{--}1000^\circ\text{C}$ y la variación de la resistencia con la temperatura está dada por la ecuación $\rho = \rho_0(1 + 4.5 \cdot 10^{-5} T)$ se desea conocer:

- 1) Potencia generada por la resistencia admitiendo generación de calor uniforme.
- 2) Temperatura en la superficie de la resistencia.
- 3) Temperatura en el centro de la resistencia.
- 4) Rendimiento térmico del material de la resistencia en función del radio admitiendo generación de calor lineal.

Solución:

- 1) Por la ec. 4,4-1(5) el flujo en la superficie vale

$$-k \left(\frac{dT}{dr} \right)_R = \frac{Q_R}{2} = \bar{F} \sigma (T_s^4 - t_0^4) + h(T_s - t_0) \quad (a)$$

donde $T_s (^\circ\text{K})$ es la temperatura en la superficie, $t_0 (^\circ\text{K})$ la temperatura de la carga, \bar{F} factor de forma, h , coeficiente de convección

$$Q = \frac{V^2}{R} = \frac{15^2}{0.2(1 + 4.5 \cdot 10^{-5} T_s)} \cdot \frac{1}{\pi R^2} \cdot 0.86 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2} \right)$$

y sustituyendo valores en (a)

$$\frac{15^2 \cdot 0.86}{0.2(1 + 4.5 \cdot 10^{-5} T_s) \cdot 2\pi R} = 0.8 \cdot 4.88 \cdot 10^{-8} (T_s^4 - 873^4) + 20 (T_s - 873)$$

Resolviendo esta ecuación $Q = 9.7 \cdot 10^4 \text{ (kcal/h m}^2\text{)}$

2) $T_s = 1025 \text{ (}^\circ\text{C)}$

3) Por la ec. (5) $T_{\max} = 1025 + \frac{9.7 \cdot 10^4 \cdot 1.5^2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10} \approx 1025 \text{ (}^\circ\text{C)}$

4) La variación de temperaturas dentro de la resistencia es despreciable. Si no fuese así, se aplica la ec. 4.4-3(5) obteniéndose la distribución de temperaturas en función del radio y si la generación de calor es función de ρ el rendimiento térmico del material esta dado por la relación $T(r)/r$.

4.4-4. Cilindro infinito con generación de calor $Q = Q_0 \exp(br)$

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} \exp(br) \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 4.4-4.

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel de orden cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i) = -\int_0^R \frac{Q_0}{k} \exp(br) \cdot r J_0(\xi_i r) dr \quad (2)$$

resolviendo la integral por transformación de Laplace

$$\begin{aligned} \frac{b}{Q_0} \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i) &= L^{-1} \left[\frac{f(s)}{s} \right] = L^{-1} \left[-\frac{d}{ds} L[J_0(\xi_i r)] \right] = L^{-1} \left[\frac{1}{(s-b)^2 + \xi_i^2} \right]^{1/2} \\ &= \exp(br) \cdot \frac{R}{\xi_i^3} J_1(\xi_i R) \end{aligned}$$

con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \quad (3)$$

De (2)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i) = \frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i^3} J_1(\xi_i R) \exp(bR) \quad (4)$$

$$T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \exp(bR) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^3 J_1(\xi_i R)} \quad (5)$$

4,4-5. Cilindro infinito con generación de calor $Q_0 \exp(br)$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} \exp(-br) \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 4,4-5.

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i) = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R) \exp(-bR) \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\alpha_i^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \bar{T}_{H,0}(\xi_i) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\alpha_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Sustituyendo $\bar{T}_{H,0}(\xi_i)$ en (3)

$$T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \exp(bR) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^2 (\alpha_i^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)} \quad (4)$$

4,4-6. Cilindro infinito con generación de calor $Q = Q_0 I_0(ar)$ superficie a temperatura dada

Cumple la ecuación, donde I_0 es la función de Bessel modificada de primera especie y orden cero

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} I_0(ar) \quad (1)$$

con la condición, Fig. (4,4-6)

$$T=0 \quad r=R \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i) = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R I_0(ar) r J_0(\xi_i r) dr \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{T}_{u,0}(\xi_i) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

$$\int_0^R I_0(ar) r J_0(\xi_i r) dr = \frac{[a J_0(\xi_i R) I_1(aR) + \xi_i J_1(\xi_i R) I_0(aR)] R}{a^2 + \xi_i^2} \quad (5)$$

y si $J_0(\xi_i R) = 0$

$$T(r) = \frac{2 Q_0}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_0(aR) J_0(\xi_i r)}{\xi_i (a^2 + \xi_i^2) J_1(\xi_i R)}$$

Ejemplo 4,4-6

En las barras combustibles del reactor nuclear de agua a presión del ejemplo 4,4-1 el flujo neutrónico en dirección radial dentro de la barra disminuye respecto al flujo en el moderador. Si la generación de potencia es proporcional al flujo neutrónico ambas tienen la misma ecuación. Para nuestro caso la generación de calor es de la forma $Q_0 I_0(31r)$ donde r es la posición radial en la barra combustible expresada en m. Se desea conocer la distribución de temperatura en el combustible y la temperatura en el centro de la pastilla.

Solución

Comparando las ecuaciones de generación de calor uniforme y 4,4-6(5) para la región de combustible se tiene

$$\frac{T_1(r) - T_{s1}}{T_2(0) - T_2(r)} = \frac{2 Q_0 \cdot 4k}{k R \cdot Q_0 R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_0(aR) J_0(\xi_i r)}{\xi_i (a^2 + \xi_i^2) J_1(\xi_i R)}$$

Para $r = 0$

$$\frac{T_1(0) - T_{s1}}{T_2(0) - T_{s2}} = \frac{8}{R^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_0(aR)}{\xi_i (a^2 + \xi_i^2) J_1(\xi_i R)}$$

De la tabla I-3(3) del Apéndice I las raíces $\xi_i R$ son

$$\xi_1 R = 2,40 \quad \xi_2 R = 5,52 \quad \xi_3 R = 8,65 \quad \xi_4 R = 11,79 \quad \xi_5 R = 14,93$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior

$$\frac{T_1(0) - T_{s1}}{T_2(0) - T_{s2}} = \frac{8,23 \cdot 10^6}{0,819^3} \sum_{i=1}^5 \frac{I_0(0,126)}{(3i^2 + \xi_i^2) \xi_i J_1(\xi_i R)} = 1,10$$

Si las temperaturas $T_{s1} = T_{s2}$

$$T_1(0) = 1,10 T_2(0)$$

Sustituyendo el valor $T_2(0) = 1673$ calculado en el ejemplo 4,4-1 $T_1(0) = 1856(^{\circ}\text{C})$

4,4-7. Cilindro infinito con generación de calor $Q_0 I_0(br)$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = - \frac{Q_0}{k} I_0(br) \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 4,4-7

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$- \xi_i^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i) = \int_0^R - \frac{Q_0}{k} I_0(br) \cdot r J_0(\xi_i r) dr \quad (2)$$

Con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R^3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 I_0(\xi_i r)}{(a r^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $a r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Integrando la expresión (2)

$$\xi_i^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i) = \frac{R [b J_0(\xi_i R) I_1(bR) + \xi_i J_1(\xi_i R) I_0(bR)]}{b^2 + \xi_i^2}$$

y sustituyendo en (3)

$$T(r) = \frac{2Q_0}{kR} [b I_0(r) + ar I_0(br)] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(Qr^2 + \xi_i^2)(b + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)} \quad (4)$$

Ejemplo 4.4-7

En las barras combustibles del reactor nuclear de agua a presión del ejemplo 4.4-1 el flujo neutrónico en dirección radial dentro de la barra presenta una disminución por efecto de la absorción de neutrones dependiendo de la energía de estos últimos y de la posición. Si la generación de potencia es proporcional al flujo neutrónico para nuestro caso la expresión de Q es de la forma

$$Q_0 I_0(31 r) \quad \text{expresando } r \text{ en m.}$$

Se desea conocer la distribución de temperaturas en el combustible para $Q_0 = 645 \cdot 10^8 \text{ (Kcal/hm}^2\text{)}$

Solución

En el apartado a) del ejemplo 4.4-1 los términos del hueco, vaina y coeficiente de convección exterior pueden considerarse constantes y equivalentes a un coeficiente total referido al radio de la pastilla de combustible

$$0,078 + 0,0104 + 0,008 = \frac{1}{hR} \quad h = \frac{2 \cdot 10^2}{0,096 \cdot 0,819} = 2543 \text{ (Kcal/hm}^2\text{°C)}$$

aplicando la ec. 4.4-7(4)

$$T = \frac{645 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^2}{2,86 \cdot 0,819} \left[31 I_0(0,126) + \frac{2543}{2,86} I_0(0,126) \right] \sum_{i=1}^{\infty} \left(\quad \right)$$

Por la tabla I-3(4) del Apéndice I y para $QrR = 889 \cdot 0,409 \cdot 10^{-2} = 3,63$ se tienen las raíces

$$\xi_1 R = 1,86 \quad \xi_2 R = 4,54 \quad \xi_3 R = 7,47 \quad \xi_4 R = 10,50 \quad \xi_5 R = 13,56$$

Para el centro $J_0(0) = 1$

$$T = 5,93 \cdot 10^{10} (1,93 + 893) \sum_{i=1}^5 \frac{1}{(889^2 + \xi_i^2) (31^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)} \approx 820 \text{ (°C)}$$

Teniendo en cuenta que la temperatura de referencia vale 303 (°C)
 $T_0 = 1603 \text{ (°C)}$

4,4-8. Cilindro infinito con generación de calor $Q=Q_0 J_0(br)$ y su superficie a temperatura dada

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} J_0(br) \quad (1)$$

con la condición

$$T=0 \quad R=r \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i) = -\frac{Q_0}{k} \left[\frac{\xi_i J_0(bR) J_1(\xi_i R) - b J_0(\xi_i R) J_1(bR)}{\xi_i^2 - b^2} \right] R \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$ y substituyendo en (4)

$$T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_i} \frac{J_0(bR) J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 - b^2) J_1(\xi_i R)} \quad (5)$$

4,4-9. Cilindro infinito con generación de calor $Q=Q_0 J_0(br)$ y convección.

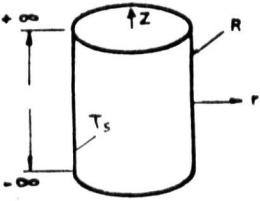
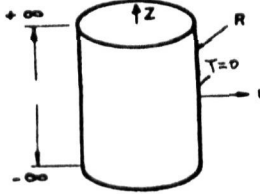
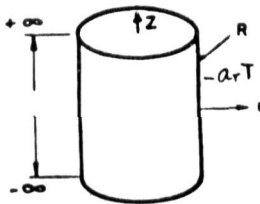
Cumple la ecuación

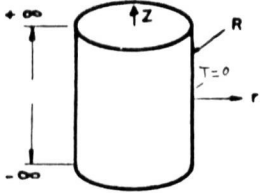
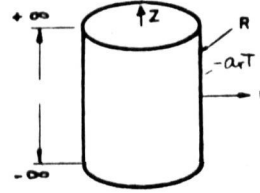
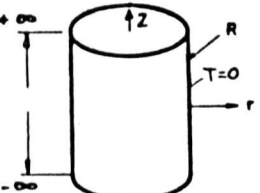
$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} J_0(br) \quad (1)$$

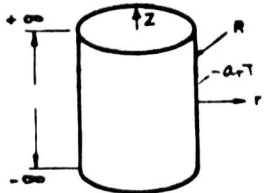
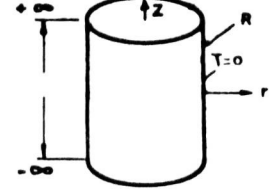
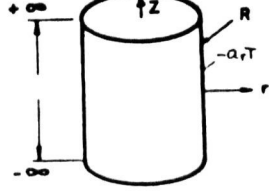
con la condición, Fig. 4,4-9

$$\frac{dT}{dr} + \frac{h}{k} T = 0 \quad r=R \quad a_r = \frac{h}{k} \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|---|--|
|  <p>Fig. 4,4-1</p> | $\frac{dT}{dr} = 0 \quad r=0$ $T = T_0 \quad r=R$ $T = T_s \quad r=R$ $Q_0 = \text{cte}$ | $T(r) = T_0 - \frac{Q_0 r^2}{4k}$ |
|  <p>Fig. 4,4-2</p> | $T = 0 \quad r=R$ $Q = Q_0(1+\beta T)$ $\beta = \text{cte}$ | $T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i \left(\xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k} \right) J_1(\xi_i R)}$ ξ_i , raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$ |
|  <p>Fig. 4,4-3</p> | $\frac{dT}{dr} = -a_r T \quad R=r$ $a_r = \frac{h}{k}$ $Q = Q_0(1+\beta T)$ $\beta = \text{cte}$ | $T(r) = \frac{2Q_0 a_r}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(a_r^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R) \left(\xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k} \right)}$ ξ_i raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|---|
|  <p>Fig. 4,4-4</p> | $T=0$ $r=R$ $Q=Q_0 \exp(br)$ | $T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \exp(br) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^3 J_1(\xi_i R)}$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R)=0$</p> |
|  <p>Fig. 4,4-5</p> | $\frac{dT}{dr} = -a_r T$ $r=R$ $a_r = \frac{h}{k}$ $Q=Q_0 \exp(br)$ | $T(r) = \frac{2Q_0}{kR} a_r \exp(br) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^2 (a_r^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)}$ <p>ξ_i, raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$</p> |
|  <p>Fig. 4,4-6</p> | $T=0$ $r=R$ $Q=Q_0 I_0(ar)$ | $T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I_0(ar) J_0(\xi_i r)}{(a^2 + \xi_i^2) \xi_i J_1(\xi_i R)}$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R)=0$</p> |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 4,4-7</p> | $\frac{dT}{dr} = -a_r T \quad r=R$ $\frac{h}{R} = a_r$ $Q = Q_0 I_0(br)$ | $T(r) = \frac{2 Q_0}{k R} [b I_1(bR) + a_r I_0(bR)] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(a_r^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R) (b^2 + \xi_i^2)}$ $\xi_i, \text{ raíces de } a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$ |
|  <p>Fig. 4,4-8</p> | $T=0 \quad r=R$ $Q = Q_0 J_0(br)$ | $T(r) = \frac{2 Q_0}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(bR) J_0(\xi_i r)}{\xi_i (\xi_i^2 - b^2) J_1(\xi_i R)}$ $\xi_i, \text{ raíces de } J_0(\xi_i R) = 0$ |
|  <p>Fig. 4,4-9</p> | $\frac{dT}{dr} = -a_r T \quad r=R$ $a_r = \frac{h}{R}$ $Q = Q_0 J_0(br)$ | $T(r) = \frac{2 Q_0}{k R} (a_r J_0(bR) - b J_1(bR)) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 - b^2) (a_r^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)}$ $\xi_i, \text{ raíces de } a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$ |

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i) = -\frac{Q_0}{k} \frac{[\xi_i J_0(bR) J_1(\xi_i R) - b J_0(\xi_i R) J_1(bR)] R}{\xi_i^2 - b^2} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2}{[a_r^2 + \xi_i^2]} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$ y sustituyen
do el valor de $\bar{f}_{H,0}(\xi_i)$

$$T(r) = \frac{2Q_0}{kR} [a_r J_0(bR) - b J_1(bR)] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 - b^2)(a_r^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \quad (5)$$

4,5-1. Cilindro finito con generación de calor uniforme

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 4,5-1

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) + \frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R r J_0(\xi_i r) dr \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (3)$$

ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$ y

$$\int_0^R -\frac{Q_0}{k} r J_0(\xi_i r) dr = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

La ecuación (2) toma la forma

$$\frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} - \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i, 0) = f_0 \quad (4)$$

Aplicando a la ec. (4) la transformada de Laplace

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \left(A + \frac{f_0}{\xi_i^2} \right) \cosh(\xi_i z) + \frac{B}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) - \frac{f_0}{\xi_i^2} \quad (5)$$

En

$$\begin{aligned} z=0 \quad \bar{f}_{H,0}(\xi_i, 0) &= 0 & A &= 0 \\ z=L_z \quad \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 & B &= -\frac{f_0}{\xi_i} \frac{\sinh(\xi_i L_z)}{\cosh(\xi_i L_z)} \end{aligned}$$

y finalmente

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \frac{f_0}{\xi_i^2} \left[\frac{\cosh[\xi_i(L_z - z)]}{\cosh(\xi_i L_z)} - 1 \right] \quad (6)$$

y sustituyendo en la ec. (3)

$$T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^3 J_1(\xi_i R)} \left[1 - \frac{\cosh[\xi_i(L_z - z)]}{\cosh(\xi_i L_z)} \right] \quad (7)$$

4,5-2. Cilindro finito con generación de calor uniforme y convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

Con las condiciones que se indican en la figura 4,5-2, aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) + \frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} = -\int_0^R \frac{Q_0}{k} r J_0(\xi_i r) dr = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R) = f_0 \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\alpha_i^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (3)$$

ξ_i son las raíces de $\alpha_i r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

. Resolviendo la

ec. (2) por transformación de Laplace

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \left(A + \frac{f_0}{\xi_i^2} \right) \cosh(\xi_i z) + \frac{B}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) - \frac{f_0}{\xi_i^2} \quad (4)$$

Por las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \text{En } z=0 \quad B &= a_2 A \\ z=L_2 \quad \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \quad A = - \frac{f_0}{\xi_i^2} \frac{\xi_i \sinh(\xi_i L_2)}{(\xi_i \sinh(\xi_i L_2) + a_2 \cosh(\xi_i L_2))} \end{aligned}$$

y

$$\bar{T}_{h,0}(\xi_i, z) = \frac{f_0}{\xi_i^2} \left[\frac{a_2 \cosh[\xi_i(L_2 - z)]}{\xi_i \sinh(\xi_i L_2) + a_2 \cosh(\xi_i L_2)} - 1 \right] \quad (5)$$

Sustituyendo en (3) los valores de (5) y (2)

$$T(r, z) = \frac{2 Q_0 a_r}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^2 (a_r^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)} \left[1 - \frac{a_2 \cosh[\xi_i(L_2 - z)]}{\xi_i \sinh(\xi_i L_2) + a_2 \cosh(\xi_i L_2)} \right] \quad (6)$$

Ejemplo 4,5-2

Un cilindro de 30 cm de diámetro y 1,5 m de altura contiene materiales radiactivos embebidos en una masa vítrea que ocupa todo el volumen del cilindro. La generación de calor puede considerarse uniforme con valores de 10 (W/l) a los tres meses y 1 (W/l) a los cinco años. Si las propiedades del material son $\rho = 2200 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ y $k = 0,150 \text{ (Kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$ y el coeficiente de convección radiación al exterior es de $25 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$ se desea conocer la distribución de temperaturas a los tiempos indicados.

Solución

Admitiendo régimen estacionario la generación por unidad de tiempo y de volumen.

Para el tiempo de tres meses

$$Q = 10 \left(\frac{\text{W}}{\ell} \right) \equiv 8600 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h.m}^3} \right)$$

y para el recipiente $q = 8600 \cdot \pi D^2 L / 4 = 911 \text{ Kcal/h}$

A los tres años $Q = 860 \text{ (Kcal/h.m}^3\text{)}, \quad q = 91,1 \text{ (Kcal/h)}$

Aplicando la ec.4,5-2(6)

$$a_r = a_z = 25/0,5 = 50$$

$$a_r R = 50, 0,15 = 7,5$$

Por la tabla I-3(4) Apéndice I las raíces ξ_i son

$$\xi_1 R = 2,10 \quad \xi_2 R = 4,83 \quad \xi_3 R = 7,80 \quad \xi_4 R = 10,79 \quad \xi_5 R = 13,82$$

y sustituyendo valores

$$T(r, z) = 1,61 \cdot 10^6 \sum_{i=1}^5 \frac{J_0(\xi_i r)}{(50^2 + \xi_i^2) \xi_i^2 J_0(\xi_i R)} \left[1 - \frac{50 \cosh((0,75-z)\xi_i)}{\xi_i \sinh(0,75\xi_i) + 50 \cosh(0,75\xi_i)} \right]$$

$$\text{En el centro } I_0(\xi_i r) = J_0(\xi_i 0) = 1 \quad z = l_z \quad \cosh(\xi_i 0) = 1$$

$$T(0, 0,75) \simeq 148^\circ\text{C} + t_a \quad (\text{temperatura ambiente})$$

La temperatura en el centro de la superficie lateral

$$T(0,15, 0,75) \simeq 23,5 + t_a$$

En las superficies superior e inferior

$$T(0, 1,5) = T(0,0) = 106 + t_a$$

$$T(0,15, 0,75) = 16,9 + t_a$$

A los tres años las temperaturas son los valores anteriores divi
didos por 10 .

4,5-3. Cilindro finito con generación de calor

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} (1 + \beta T) \quad (1)$$

Con las condiciones que se indican en la Fig. 4,5-3

Aplicando a la ec.(1) la transformada de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) + \frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} = \int_0^R \frac{Q_0}{k} r J_0(\xi_i R) dr - \frac{Q_0 \beta}{k} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (3)$$

ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

Aplicando a la ec. (2) la transformación de Laplace y su inversión

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \left(A + \frac{f_0}{\sigma^2} \right) \cosh(\sigma z) + \frac{B}{\sigma} \sinh(\sigma z) - \frac{f_0}{\sigma^2} \quad (4)$$

donde

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R) \quad \sigma^2 = \left(\xi_i^2 - \frac{Q_0}{k} \beta \right)$$

Por las condiciones de contorno

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \frac{f_0}{\sigma^2} \left[\frac{\cosh[\sigma(l-z)]}{\cosh(\sigma l)} - 1 \right] \quad (5)$$

y sustituyendo (5) y f_0 en (3)

$$T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i J_1(\xi_i R)} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \left[1 - \frac{\cosh[\sigma(l-z)]}{\cosh(\sigma l)} \right] \quad (6)$$

4,5-4. Cilindro finito con generación de calor $Q = Q_0(1+\beta T)$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} (1+\beta T) \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 4,5-4. Aplicando a (1) la transformación de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) + \frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R) - \frac{Q_0 \beta}{k} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\alpha_i^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \bar{f}_{u,0}(\xi_i, z) \quad (3)$$

ξ_i son las raíces de $\alpha_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Resolviendo la ec. (2) por transformadas de Laplace

$$\bar{f}_{u,0}(\xi_i, z) = \left(A + \frac{f_0}{\sigma^2} \right) \cosh(\sigma z) + \frac{B}{\sigma} \sinh(\sigma z) - \frac{f_0}{\sigma^2} \quad (4)$$

y por las condiciones de contorno

$$\bar{f}_{u,0}(\xi_i, z) = \frac{f_0}{\sigma^2} \left[\frac{\alpha_2 \cosh[\sigma(L-z)]}{\alpha_2 \cosh(\sigma L) + \sigma \sinh(\sigma L)} - 1 \right] \quad (5)$$

$$\sigma^2 = \xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}$$

Sustituyendo f_0 y (5) en (3)

$$T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR} \alpha_r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{(\alpha_i^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \sigma_i^2 \left[1 - \frac{\alpha_2 \cosh[\sigma(L-z)]}{\sigma \sinh(\sigma L) + \alpha_2 \cosh(\sigma L)} \right]$$

4,5-5. Cilindro finito con generación de calor $Q = Q_0 \exp[-(br+cz)]$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} \exp[-(br+cz)] \quad (1)$$

Con las condiciones que se indican en la Fig. 4,5-5. Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{u,0}(\xi_i, z) + \frac{d^2 \bar{f}_{u,0}(\xi_i, z)}{dz^2} = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R \exp(-cz) \exp(-br) r J_0(\xi_i r) dr = f_0 \exp(-cz) \quad (2)$$

Si la transformada de Laplace de la función vale

$$L[r J_0(\xi_i r) \exp(-br)] = \frac{s+b}{[(s+b)^2 + \xi_i^2]^{3/2}}$$

$$f^{-1}(s) = \left[\frac{r}{\xi_i} [\exp(-br) J_1(\xi_i r)] \right]_0^R$$

y finalmente

$$f_0 = \frac{Q_0}{k} \frac{R}{s_i} J_1(s_i R) \exp(-bR)$$

Aplicando a la ec. (2) la transformada de Laplace

$$f(s) = \frac{As}{s^2 - \xi_i^2} + \frac{B}{s^2 - \xi_i^2} + \frac{f_0}{\xi_i^2 - c^2} \left(\frac{s-c}{s^2 - \xi_i^2} - \frac{1}{s+c} \right)$$

y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \left(A + \frac{f_0}{\sigma^2} \right) \cosh(\xi_i z) + \frac{1}{\xi_i} \left(B - \frac{cf_0}{\sigma^2} \right) \sinh(\xi_i z) - \frac{f_0}{\sigma^2} \exp(-cz) \quad (3)$$

donde $\sigma^2 = \xi_i^2 - c^2$

Por las condiciones de contorno

En $z=0$ $\bar{f}_{H,0}(\xi_i, 0) = 0$ $A=0$

En $z=L_2$ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$

y

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \frac{f_0}{\sigma^2} \left[\frac{\cosh[\xi_i(L_2 - z)]}{\cosh(\xi_i L_2)} - \frac{c}{\xi_i} \frac{\sinh(\xi_i z)}{\cosh(\xi_i L_2)} \exp(-cL_2) - \exp(-cz) \right] \quad (4)$$

Sustituyendo en la inversión de $\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)$

$$T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\exp(-bR) J_0(s_i r)}{(\xi_i^2 - c^2) J_1(\xi_i R)} \left[\frac{c \sinh(\xi_i z)}{\xi_i \cosh(\xi_i L_2)} \exp(-cL_2) + \exp(-cz) - \frac{\cosh[\xi_i(L_2 - z)]}{\cosh(\xi_i L_2)} \right] \quad (5)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

4,5-6. Cilindro finito con generación de calor $Q=Q_0 \exp[-(br+cz)]$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} \exp[-(br+cz)] \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 4,5-6.

Aplicando a la ec. (1) la transformadas finitas de Hankel de grado cero y teniendo en cuenta la transformación del segundo miembro dada en el apartado 4,5-5

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{u,0}(\xi_i, z) + \frac{d^2 \bar{f}_{u,0}(\xi_i, z)}{dz^2} = f_0 \exp(-cz) \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2}{(\alpha_i^2 + \xi_i^2)} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R)} \bar{f}_{u,0}(\xi_i, z) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\alpha_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Aplicando a la ec. (2) la transformación de Laplace y su inversión

$$\bar{f}_{u,0}(\xi_i, z) = \left(A + \frac{f_0}{\xi_i^2}\right) \cosh(\xi_i z) + \frac{1}{\xi_i} \left(B - \frac{cf_0}{\xi_i}\right) \sinh(\xi_i z) - \frac{f_0}{\xi_i^2} \exp(-cz) \quad (4)$$

Por las condiciones de contorno

$$\text{En } z=0 \quad B = \alpha_z A + \frac{2c}{\xi_i} f_0$$

$$\text{En } z=L_z \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

y

$$\bar{f}_{u,0}(\xi_i, z) = \frac{f_0}{\xi_i^2} \left[\frac{(a_z - c) \cosh[\xi_i(L_z - z)] - c \left(\frac{a_z}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) + \cosh(\xi_i z)\right) \exp(-cL_z) - \exp(-cz)}{\xi_i \sinh(\xi_i L_z) + a_z \cosh(\xi_i L_z)} \right] \quad (5)$$

Sustituyendo $\bar{f}_{u,0}(\xi_i, z)$ en (3)

$$T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR} \exp(-br) \alpha_r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 - c^2)(\alpha_i^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \left[\exp(-cz) + \frac{\left(\frac{c}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) + \cosh(\xi_i z)\right) \exp(-cL_z) - (a_z - c) \cosh[\xi_i(L_z - z)]}{\xi_i \sinh(\xi_i L_z) + a_z \cosh(\xi_i L_z)} \right] \quad (6)$$

4.5-7. Cilindro finito con generación de calor $Q = Q_0 J_0\left(\frac{br}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2L_z}\right)$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} J_0\left(\frac{br}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2L_2}\right) \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la figura 4,5-7.

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) + \frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} = -\frac{Q_0}{k} \sin\left(\frac{\pi z}{2L_2}\right) \int_0^R J_0\left(\frac{br}{R}\right) J_0(\xi_i r) r dr \quad (2)$$

aplicando la transformación de Laplace se tiene

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(\xi_i^2 + (\frac{b}{R})^2)^{1/2}} \cdot \frac{s}{(s^2 + \xi_i^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{s} \right] = \frac{\xi_i J_0(a) J_1(R)}{(\frac{b}{R})^2 - \xi_i^2} = -\frac{f_0}{Q_0} \frac{k}{Q_0}$$

Resolviendo la ec.(2) por transformación de Laplace

$$f(s) = \frac{A s}{s^2 + \xi_i^2} + \frac{B}{s^2 + \xi_i^2} + \frac{f_0 c}{(s^2 + \xi_i^2)(s^2 + c^2)}$$

y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = A \cosh(\xi_i z) + \left(B + \frac{f_0 c}{s^2 + c^2}\right) \frac{1}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) - \frac{f_0}{\xi_i^2 + c^2} \sinh(cz).$$

Por las condiciones de contorno

$$\text{En } z=0 \quad \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = 0 \quad A=0$$

$$\text{En } z=L_2 \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad B = \frac{f_0}{\xi_i^2 + c^2} \left[\frac{\sinh(cL_2)}{\cosh(\xi_i L_2)} - c \right]$$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \frac{f_0}{\xi_i^2 + c^2} \left[\frac{1}{\xi_i} \frac{\sinh(cL_2) \sinh(\xi_i z)}{\cosh(\xi_i L_2)} - \sinh(cz) \right] \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de $\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)$ en la inversión

$$T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(b) J_0(\xi_i r)}{[\xi_i^2 + (\frac{b}{R})^2][(\frac{b}{R})^2 - \xi_i^2]} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{2L_2}\right) - \frac{1}{\xi_i} \frac{\sinh(\frac{\pi z}{2L_2}) \sinh(\xi_i z)}{\cosh(\xi_i L_2)} \right]$$

4.5-8. Cilindro finito con generación $Q=Q_0 J_0\left(\frac{br}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2L_z}\right)$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} J_0\left(\frac{br}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2L_z}\right) \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 4,5-8.

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita de Hankel y de acuerdo con el apartado 4,5-7

$$-\bar{T}_{H,0}(\xi_i, z) + \frac{d^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} = -\frac{Q_0 \xi_i J_0(b) J_1(\xi_i R)}{k \left(\frac{b}{R}\right)^2 - \xi_i^2} \sin\left(\frac{\pi z}{2L_z}\right) \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2}{(a_i^2 + \xi_i^2)} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i R)} \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Resolviendo la ec.(2) por transformadas de Laplace

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i, z) = A \cosh(\xi_i z) + \left(B + \frac{f_0 c}{\xi_i^2 + c^2}\right) \frac{1}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) - \frac{f_0}{\xi_i^2 + c^2} \sin(cz) \quad (4)$$

donde $c = \frac{\pi}{2L_z}$

Por las condiciones de contorno

En $z=0$ $B = Q_2 A$

En $z=L_z$ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$

y

$$\begin{aligned} \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z) = \frac{f_0 c}{\xi_i^2 + c^2} & \left[\frac{\cos(cz) + \cosh(\xi_i L_z)}{\xi_i \sinh(\xi_i L_z) + a_2 \cosh(\xi_i L_z)} \left(\cosh(\xi_i z) + \frac{Q_2}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) \right) \right. \\ & \left. + \frac{Q_2}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) - \frac{1}{c} \sin(cz) \right] \quad (5) \end{aligned}$$

y sustituyendo en (3)

$$T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR^2} a_r I_0(b) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{\left(\left(\frac{b}{R}\right)^2 - \xi_i^2\right)(\xi_i^2 + c^2)} \cdot c \left[\frac{1}{c} \sin(cz) - \frac{a_z}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) \right] - \frac{\cos(cz) + \cosh(\xi_i l_z)}{\xi_i \cosh(\xi_i l_z) + a_z \cosh(\xi_i l_z)} \left(\cosh(\xi_i z) + \frac{a_z}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) \right) \quad (6)$$

4,5-9. Cilindro finito con generación de calor $Q = Q_0 I_0(br) \cos\left(\frac{\pi z}{2l_z}\right)$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} I_0(br) \cos\left(\frac{\pi z}{2l_z}\right) \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la figura 4,5-9.

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z) + \frac{d^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} = -\int_0^R \frac{Q_0}{k} I_0(br) \cos\left(\frac{\pi z}{2l_z}\right) J_0(\xi_i r) r dr = f_0 \cos(cz) \quad (2)$$

donde

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \frac{\xi_i J_1(\xi_i R) I_0(aR)}{(b^2 + \xi_i^2)} \quad c = \frac{\pi}{2l_z}$$

con la inversión

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (3)$$

ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

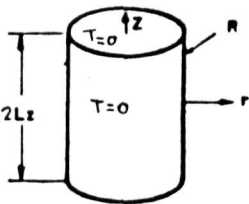
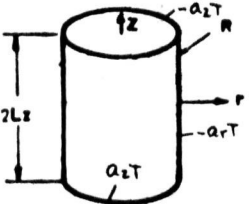
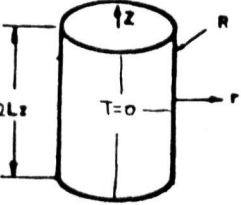
Aplicando a la ec.92) la transformación de Laplace

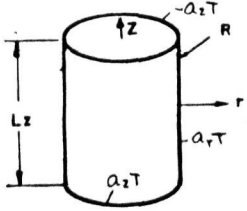
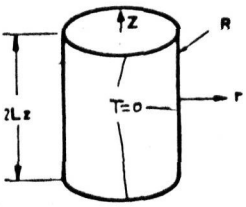
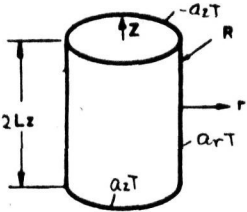
$$f(s) = \frac{As}{s^2 - \xi_i^2} + \frac{B}{s^2 - \xi_i^2} + \frac{f_0 s}{(s^2 - \xi_i^2)(s^2 - c^2)}$$

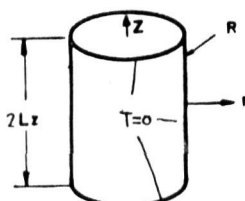
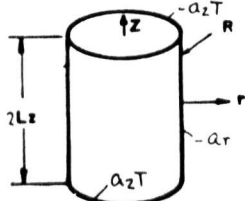
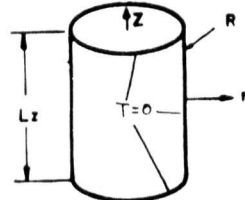
y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i, z) = \left(A + \frac{f_0}{\xi_i^2 + c^2} \right) \cosh(\xi_i z) + \frac{B}{\xi_i} \sinh(\xi_i z) - \frac{f_0}{\xi_i^2 + c^2} \cos(cz) \quad (4)$$

Por las condiciones de contorno

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|---|
|  <p>Fig. 4,5-1</p> | $T=0 \quad r=R$ $T=0 \quad z=0$ $T=0 \quad z=2L_z$ $Q_0 = \text{cte}$ | $T(r,z) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^3 J_1(\xi_i R)} \left[1 - \frac{\cosh[\xi_i(L_z - z)]}{\cosh(\xi_i L_z)} \right]$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |
|  <p>Fig. 4,5-2</p> | $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r=R$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad z=L_z; \quad a_r = \frac{h_r}{k}$ $\frac{\partial T}{\partial z} = -a_z T, \quad z=2L_z; \quad a_z = \frac{h_z}{k}$ $\frac{\partial T}{\partial z} = a_z T \quad z=0$ $Q_0 = \text{Ch}$ | $T(r,z) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^3 (a_r^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)} \left[1 - \frac{a_z \cosh(\xi_i(L_z - z))}{\xi_i \sinh(\xi_i L_z) + a_z \cosh(\xi_i L_z)} \right]$ <p>ξ_i, raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$</p> |
|  <p>Fig. 4,5-3</p> | $T=0 \quad r=R$ $T=0 \quad z=0$ $T=0 \quad z=2L_z$ $Q = Q_0(1 + \beta T)$ $\beta = \text{cte}$ | $T(r,z) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i J_1(\xi_i R) \sigma^2} \left[1 - \frac{\cosh[\sigma(L_z - z)]}{\cosh(\sigma L_z)} \right]$ <p>$\sigma^2 = \xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}$</p> |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|--|---|
|  <p>Fig. 4,5-4</p> | $\frac{\partial T}{\partial z} = -a_z T, \quad z = L_z, \quad \frac{h_z}{k} = a_z$ $\frac{\partial T}{\partial z} = a_z T, \quad z = 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T, \quad r = R$ $a_r = \frac{h_r}{k}, \quad Q = Q_0(1 + \beta T)$ $\beta = \text{Cte}$ | $T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR} a_r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{(a_r^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)} \sigma_i^2 \left[1 - \frac{a_z \cosh[\sigma_i(L_z - z)]}{\sigma_i \sinh(\sigma_i L_z) + a_z \cosh(\sigma_i L_z)} \right]$ $\sigma_i^2 = \xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}; \quad \xi_i, \text{ raíces de } a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$ |
|  <p>Fig. 4,5-5</p> | $T = 0 \quad r = R$ $T = 0 \quad z = 0$ $T = 0 \quad z = 2L_z$ $Q = Q_0 \exp[-(br + cz)]$ | $T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR} \exp(-br) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 - c^2) J_0(\xi_i R)} \left[\frac{c \sinh(\xi_i z)}{\xi_i \sinh(\xi_i L_z)} \exp(-cL_z) + \exp(-cz) - \frac{\cosh[\xi_i(L_z - z)]}{\cosh(\xi_i L_z)} \right]$ $\xi_i, \text{ raíces de } J_0(\xi_i R) = 0$ |
|  <p>Fig. 4,5-6</p> | $\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad z = L_z$ $\frac{\partial T}{\partial z} = -a_z T \quad z = 2L_z$ $\frac{\partial T}{\partial z} = a_z T, \quad z = 0; \quad a_z = \frac{h_z}{k}$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_r T, \quad r = R, \quad a_r = \frac{h_r}{k}$ $Q = Q_0 \exp[-(br + cz)]$ | $T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR} a_r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r) \exp(-br)}{(\xi_i^2 - c^2)(a_r^2 + \xi_i^2) J_0(\xi_i R)} \left[\exp(-cz) + \frac{(c/\xi_i) \sinh(\xi_i z) + \cosh(\xi_i z) \exp(-cL_z) - (a_z - c) \cosh(\xi_i(L_z - z))}{\xi_i \sinh(\xi_i L_z) + a_z \cosh(\xi_i L_z)} \right]$ $\xi_i, \text{ raíces de } a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|---|
|  <p>Fig. 4,5-7</p> | $T=0 \quad r=R$ $T=0 \quad z=0$ $T=0 \quad z=2Lz$ $Q = Q_0 J_0\left(\frac{br}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2Lz}\right)$ | $T(r,z) = \frac{2Q_0}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(b) J_0(\xi_i r)}{\left[\left(\frac{b}{R}\right)^2 - \xi_i^2\right] \left[\left(\frac{b}{R}\right)^2 - \xi_i^2\right]} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2Lz}\right)}{2Lz} - \frac{\sin\left(\frac{\pi z}{2Lz}\right) \sinh(\xi_i z)}{\xi_i \cosh(\xi_i Lz)} \right]$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |
|  <p>Fig. 4,5-8</p> | $\frac{\partial T}{\partial z} = -a_z T, z=0; a_z = \frac{h_z}{R}$ $\frac{\partial T}{\partial z} = a_z T \quad z=0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T, r=R; a_r = \frac{h_r}{R}$ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad z=Lz$ $Q = Q_0 J_0\left(\frac{br}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{Lz}\right)$ | $T(r,z) = \frac{2Q_0}{R^2} a_r J_0(b) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{\left[\left(\frac{b}{R}\right)^2 - \xi_i^2\right] \left(\xi_i^2 + \left(\frac{\pi}{2Lz}\right)^2\right)} \cdot \frac{\pi}{2Lz} \left[\frac{2Lz \sin\left(\frac{\pi z}{2Lz}\right)}{\pi} - \frac{Q_z \sinh(\xi_i z)}{\xi_i} - \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi z}{2Lz}\right) + \cosh(\xi_i Lz)\right)}{\xi_i \sinh(\xi_i Lz) + a_z \cosh(\xi_i Lz)} \left(\cosh(\xi_i z) + \frac{Q_z \sinh(\xi_i z)}{\xi_i} \right) \right]$ <p>ξ_i, raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$</p> |
|  <p>Fig. 4,5-9</p> | $T=0 \quad r=R$ $T=0 \quad z=0$ $T=0 \quad z=Lz$ $Q = Q_0 I_0(br) \cos\left(\frac{\pi z}{2Lz}\right)$ | $T(r,z) = \frac{2Q_0}{R^2} I_0(bR) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{\left(\xi_i^2 + C^2\right) \left(b^2 + \xi_i^2\right)} \left[\cos(Cz) + \frac{\xi_i \sin(Cz) \sinh(\xi_i z)}{\xi_i \cosh(\xi_i Lz)} - \frac{\cosh(\xi_i (Lz-z))}{\cosh(\xi_i Lz)} \right]$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |

En $z = 0$ $A = 0$

En $z = L_z$ $B = \frac{f_0}{\delta_i^2 + c^2} \left[\frac{\cosh[\delta_i(L_z - z) - \delta_i \sinh(\delta_i z)]}{\cosh(\delta_i L_z)} \right]$

$$\bar{T}_{H_2O}(\delta_i, z) = \left[\frac{\cos[\delta_i(L_z - z) - c/\delta_i \sin(cL_z) \sinh(\delta_i z)]}{\cosh(\delta_i L_z)} - \cos(cz) \right] \quad (5)$$

y sustituyendo en la ec. (3)

$$T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR^2} I_0(bR) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i J_0(\delta_i r)}{(\delta_i^2 + c^2)(b + \delta_i^2)} \left[\cos(cz) + \frac{c}{\delta_i} \frac{\sin(cL_z) \sinh(\delta_i z)}{\cosh(\delta_i L_z)} - \frac{\cosh[\delta_i(L_z - z)]}{\cosh(\delta_i L_z)} \right] \quad (6)$$

4,6-1. Tubo infinito con generación de calor uniforme

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con la solución general

$$T = -\frac{Q_0}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (2)$$

a) Si en $r = R_0$ $\frac{dT}{dr} = 0$ y en $r = R_e$, $T = T_e$ Fig. 4,6-1

$$C_1 = \frac{2Q_0}{4k} R_0^2 \quad C_2 = T_e + \frac{Q_0}{4k} (R_e^2 - 2R_0^2 \ln R_e)$$

y

$$T - T_e = \frac{Q_0}{4k} (R_e^2 - r^2 - 2R_0^2 \ln \frac{R_e}{r}) \quad (3)$$

La temperatura máxima se tiene en $r = R_0$ y

$$T_0 - T_e = \frac{Q_0}{4k} [R_e^2 + R_0^2 (1 + 2 \ln \frac{R_e}{R_0})] \quad (4)$$

Si en $r = R_e$ existe convección en un fluido a temperatura, t_e y con coeficiente, h_e

$$\pi (R_e^2 - R_0^2) L Q_0 = q$$

$$T - t_e = \frac{q}{\pi L} \left[\frac{R_o^2 - R_i^2}{4k} \frac{(1 + 2 \ln(R_o/R_i))}{(R_o^2 - R_i^2)} + \frac{1}{2 h_e R_o} \right] \quad (5)$$

b) Si en $r = R_e$ $\frac{dT}{dr} = 0$ y en $r = R_o$ $T = T_o$ Fig. 4,6-2

$$C_1 = \frac{2Q_o R_e^2}{4k}$$

y

$$T - T_o = \frac{Q_o}{4k} [R_o^2 - r^2 + 2R_e^2 \ln(r/R_o)] \quad (6)$$

La temperatura máxima se tiene en $r = R_e$

$$T_e - T_o = \frac{Q_o}{4k} [R_o^2 - R_e^2 + 2R_e^2 \ln(R_o/R_e)] \quad (7)$$

Si en $r = R_o$ existe convección en un fluido a temperatura, t_o y con coeficiente, h_o

$$T_e - t_o = \frac{q}{\pi L} \left[\frac{R_o^2 - R_e^2}{4k} \frac{(1 + 2 \ln(R_o/R_e))}{(R_o^2 - R_e^2)} + \frac{1}{2 h_o R_o} \right] \quad (8)$$

c) Si las superficies correspondientes a los radios R_e y R_o están refrigeradas Fig. (4,6-3), la temperatura máxima se produce en un radio R_i tal, que se cumple $C_1 = 2Q_o R_i^2 / 4k$

$$T - T_o = \frac{Q_o}{4k} [R_o^2 - r^2 - 2R_i^2 \ln(r/R_o)] \quad (9)$$

$$T - T_e = \frac{Q_o}{4k} [R_e^2 - r^2 - 2R_i^2 \ln(R_e/r)] \quad (10)$$

Las cantidades de calor q_e y q_o son distintas y

$$T_i - t_e = \frac{q}{\pi L} \left[\frac{R_e^2 - R_i^2}{4k} \frac{(1 + 2 \ln(R_e/R_i))}{(R_e^2 - R_i^2)} + \frac{1}{2 h_e R_e} \right] \quad (11)$$

$$T_i - t_o = \frac{q}{\pi L} \left[\frac{R_o^2 - R_i^2}{4k} \frac{(1 + 2 \ln(R_o/R_i))}{(R_o^2 - R_i^2)} + \frac{1}{2 h_o R_o} \right] \quad (12)$$

De (11) y (12) conjuntamente con $q_e + q_o = \pi L Q (R_o^2 - R_i^2)$ se obtiene el valor de R_i para valores dados de, t_e, t_o, h_e y h_o , así como la temperatura máxima, T_i conocido el valor de R_i

En el caso particular de $t_e = t_o$ y $h_e R_e = h_o R_o$, $T_e = T_o$
y de las ec. (9) (10)

$$q_e = q_o = q/2$$

$$R_i^2 = \frac{R_e^2 - R_o^2}{\ln \left(\frac{R_e}{R_o} \right)^2}$$

$$T_i - t_o = \frac{q}{2\pi L} \left[\frac{R_o^2 - R_i^2 (1 - 2 \ln(R_i/R_o))}{4k(R_e^2 - R_o^2)} + \frac{1}{h_o R_o} \right] \quad (13)$$

Ejemplo 4,6-1

Un reactor químico de lecho fijo presenta los siguientes aspectos térmicos:

1. La reacción es exotérmica y tiene lugar en el volumen comprendido entre dos tubos concéntricos de 50 y 18 mm de diámetro exterior y 1 mm de espesor en ambos tubos.
2. La conductividad térmica del lecho entre los tubos citados es de $1 \text{ (kcal/hm}^2\text{)}^{\circ}\text{C}$ y la del material de los tubos es de $50 \text{ (kcal/hm}^2\text{)}^{\circ}\text{C}$
3. Para mantener un gradiente de temperatura bajo dentro del lecho se refrigera el reactor por el interior del tubo concéntrico de menor diámetro y por el exterior del tubo de mayor diámetro.
4. La temperatura máxima del reactor no debe pasar de 350°C y en éste estudio se supone generación de calor uniforme tanto axial como radial.

Se desea conocer

- a) Cantidad de calor que puede eliminarse manteniendo la temperatura en la superficie del lado del catalizador del tubo interior a 250°C .
- b) Flujo térmico en las superficies de los tubos.

- c) Temperatura en el refrigerante si el coeficiente de transmisión de calor tubo-refrigerante vale 5000 (kcal/h.m².°C) para el tubo interior y 1875 (kcal/h.m².°C) para el tubo exterior.
- d) Perfil de temperatura en la región de catalizador comprendida entre los dos tubos concéntricos.

Solución

- a) La temperatura en las superficies internas de los tubos es la misma y la resistencia térmica a través de las paredes de los tubos es despreciable frente a la resistencia tubo-refrigerante y $t_o = t_e$

La relación

$$\frac{1}{h_e R_e} = \frac{2}{1875 \cdot 4,8 \cdot 10^{-2}} = 0,022 \left(\frac{\text{h.m}^\circ\text{C}}{\text{kcal}} \right)$$

y

$$\frac{1}{h_o R_o} = \frac{2}{5000 \cdot 1,8 \cdot 10^{-2}} = 0,222 \left(\frac{\text{h.m}^\circ\text{C}}{\text{kcal}} \right)$$

y por lo tanto se cumple la ec.4,6-1(13).

La temperatura máxima $T_i = 350^\circ\text{C}$ se alcanza en el radio R_i :

$$R_i^2 = \frac{(2,4^2 - 0,9^2) \cdot 10^{-4}}{\ln(2,4/0,9)^2} = 2,52 \cdot 10^{-4} \quad R_i = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ (m)}$$

Si

$$t_e = t_o \quad T_e = T_o$$

y

$$T_i - T_o = 350 - 250 = \frac{q}{2\pi L} \left[\frac{2,4^2 - 1,58^2 (1 - 2 \ln(1,52/0,9))}{2k(2,4^2 - 0,9^2)} \right] \quad (a)$$

$$\frac{q}{L} = 2114 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{m}} \right)$$

La densidad de calor $Q = \frac{2q}{L\pi(R_e^2 - R_o^2)} = 262 \cdot 10^6 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h.m}^3} \right)$ de lecho.

$$b) \quad (q/s)_o = q/2\pi R_o L = \frac{2114}{6,28 \cdot 0,9 \cdot 10^{-2}} = 3,74 \cdot 10^4 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)} \quad \text{para el interior}$$

$$(q/s)_e = q/2\pi R_e L = \frac{2114}{6,28 \cdot 2,54 \cdot 10^{-2}} = 1,40 \cdot 10^4 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)} \quad \text{para el exterior}$$

$$c) \quad T_i - t_o = 350 - t_o = E_c(a) + (q/h_s)_o = 100 + \frac{2144 \cdot 0,022}{6,28} = 107,5^\circ\text{C}$$

$$t_o = 242,5^\circ\text{C}$$

d) El perfil de temperaturas es de la forma $T = f(r)$

$$T - 242 = \frac{2000}{\pi} \left[\frac{2,4^2 - r^2 (1 + 2 \ln(R_e/r))}{4k(2,4^2 - r^2)} + \frac{0,025}{2} \right] \quad \text{para } R_i \leq r \leq R_e$$

$$T - 242 = \frac{2000}{\pi} \left[\frac{0,8^2 - r^2 (1 - 2 \ln(r/R_o))}{4k(r - R_o^2)} + \frac{0,025}{2} \right] \quad \text{para } R_o \leq r \leq R_i$$

con la temperatura máxima $T_i = 350^\circ\text{C}$ en $r = R_i = 1,58(\text{cm})$

Si el radio medio entre los tubos concéntricos vale $1,65(\text{cm})$ el perfil de temperaturas no es simétrico hallándose el máximo desplazado hacia la zona del tubo interior.

4,6-2. Tubo infinito con generación de calor $Q = Q_o(1 + \beta T)$

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_o}{k}(1 + \beta T) \quad (1)$$

a) Para las condiciones indicadas en la Fig. 4,6-2(a).

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel en la forma desarrollada en el apartado 3,3-5,3

$$-\xi^2 \bar{f}_{H,o}(\xi) = -\frac{Q_o}{k} \int_{R_o}^{R_e} r C_o(\xi, r) dr - \frac{Q_o}{k} \beta \bar{f}_{H,o}(\xi) \quad (2)$$

$$\bar{f}_{H,o}(\xi) = \frac{f_o}{\xi^2 + \frac{Q_o}{k} \beta} = \frac{f_o}{\xi^2} \quad (3)$$

donde

$$C_o(\xi, r) = J_o(\xi, r) Y_o'(\xi, R_e) - J_o'(\xi, R_e) Y_o(\xi, r)$$

y si $J_o'(\xi, R_e) = -J_1(\xi, R_e)$, $Y_o'(\xi, R_e) = -Y_1(\xi, R_e)$

donde ξ_i son las raíces de la ecuación 3,3-5,3(6) con la inversión 3,3-5,3(8), y

$$\begin{aligned} f_0 &= -\frac{Q_0}{k} \left[\int_{R_0}^{R_e} J_1(\xi_i R_e) r Y_0(\xi_i r) dr - \int_{R_0}^{R_e} Y_1(\xi_i R_e) r J_0(\xi_i r) dr \right. \\ &= \frac{Q_0}{k} J_1(\xi_i R_e) \left[\frac{r}{\xi_i} Y_1(\xi_i r) + \frac{2r^2}{\xi_i^2} \right]_{R_0}^{R_e} - \frac{Q_0}{k} Y_1(\xi_i R_e) \left[\frac{r}{\xi_i} J_1(\xi_i r) \right]_{R_0}^{R_e} \quad (4) \end{aligned}$$

y finalmente

$$T(r) = \frac{Q_0 \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0(\xi_i R_0) + \alpha r J_0(\xi_i R_0)]^2 C_0(\xi_i r) f_0}{[\xi_i J_0(\xi_i R_0) + \alpha r J_0(\xi_i R_0)]^2 [(a^2 + \xi_i^2) J_0'(\xi_i R_0)]^2 \sigma^2} \quad (5)$$

b) y c) Por tratamiento análogo al caso 4,6-2(a) se obtienen las soluciones indicadas en las Fig. 4,6-2(b) y 4,6-2(c).

4,7-1. Tubo finito con generación de calor uniforme

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

a) Condiciones indicadas en la Fig. 4,7-1(a)

Procediendo como en el apartado 3,3-5,3 aplicando la transformada finita de Hankel a la ec. (1)

$$\frac{d^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} - \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = -\frac{Q_0}{k} \int_{R_0}^{R_e} r C_0(\xi_i r) dr = f_0 \quad (2)$$

$$C_0(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i R_e) - J_0'(\xi_i R_e) Y_0(\xi_i r)$$

$$-\frac{Q_0}{k} \int_{R_0}^{R_e} r C_0(\xi_i r) dr = -\frac{1}{\xi_i} \left[\frac{Q_0}{k} r J_1(\xi_i r) Y_0'(\xi_i R_e) + J_1(\xi_i R_e) Y_1(\xi_i r) + \frac{2r}{\xi_i} \right]_{R_0}^{R_e} \quad (3)$$

de acuerdo con la ec. 3,5-5,1(11)

Resolviendo la ec.(2) en forma análoga al apartado 4,5-2

$$\bar{f}_{u,o}(\xi_i z) = \frac{f_o}{\xi_i^2} \left[\frac{\cosh[\xi_i(l_2 - z)]}{\cosh(\xi_i l_2)} - 1 \right] \quad (4)$$

Por la inversión 3,3-5,3(8) se obtiene la ecuación que se indica en la Fig. 4,7-1.

b) Para las condiciones de la Fig. 4,7-1(b)

La solución se obtiene análogamente al caso a)

c) Para las condiciones de la Fig. 4,7-1(c). La solución es la correspondiente a la del apartado 3,3-5,3(b), para cilindro finito de altura $2l_2$ y la introducción del factor Q_o/k tal como se indica en la Fig. 4,7-1(c).

Ejemplo 4,7-1

En el reactor químico considerado en el ejemplo 4,6-1, la altura de los tubos es de 0,5 (m). Calcular los apartados que se indican en el citado ejemplo.

Solución:

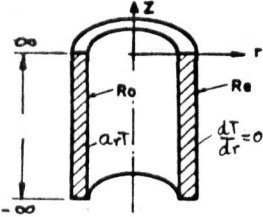
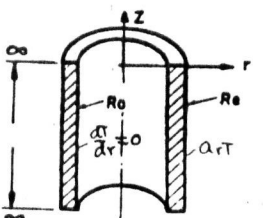
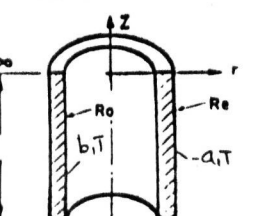
d) El perfil de temperaturas en función del radio y altura viene dado por la ecuación de la Fig. 4,7-1(c) referido a la superficie en $r=R_o$. Los valores de las funciones de Bessel y sus relaciones se dan en el Apéndice I-1 y las raíces de ξ_i en la tabla I-3(7).

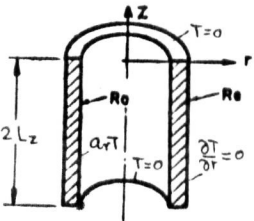
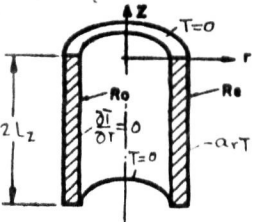
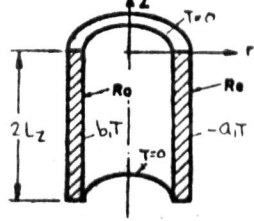
4,7-2. Tubo finito con generación de calor $Q = Q_o(1 + \beta T)$

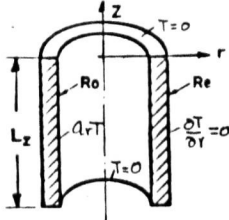
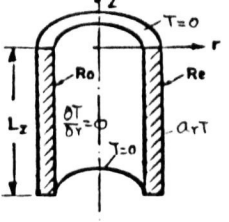
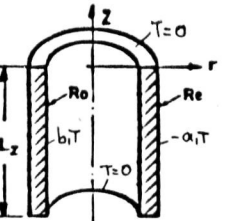
Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_o}{k}(1 + \beta T) \quad (1)$$

a) Para las condiciones indicadas en la Fig. 4,7-2(a), aplicando la transformada finita de Hankel

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|---|
|  <p>Fig. 4,6-2 (a)</p> | $\frac{dT}{dr} = 0 \quad r = Re$ $\frac{dT}{dr} = a_r T \quad r = Ro$ $Q = Q_o(1 + \beta T)$ $a_r = \frac{hr}{k}$ | $T(r) = \frac{Q_o \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i Ro) + a_r J_0(\xi_i Ro)]^2 C_o(\xi_i r) f_o}{\sigma^2 [\xi_i J_0'(\xi_i Ro) + a_r J_0(\xi_i Ro)]^2 - (a_r^2 + \xi_i^2) J_0'^2(\xi_i Ro)}$ $C_o(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i Re) - J_0'(\xi_i Re) Y_0(\xi_i r)$ $f_o = \left[J_1(\xi_i Ro) \left(\frac{Re}{\xi_i} Y_1(\xi_i Re) - \frac{Re}{\xi_i} Y_1(\xi_i Ro) + 2 \frac{Re^2}{\xi_i^2} - \frac{2 Ro^2}{\xi_i^2} \right) - Y_1(\xi_i Re) \left(\frac{Re}{\xi_i} J_1(\xi_i Re) - \frac{Ro}{\xi_i} J_1(\xi_i Ro) \right) \right]$ $\sigma^2 = \xi_i^2 + \frac{Q_o \beta}{k} \quad ; \quad \xi_i, \text{ raíces de:}$ $[\xi_i Y_0'(\xi_i Ro) + a_r Y_0(\xi_i Ro)] J_0'(\xi_i Re) = Y_0'(\xi_i Re) [\xi_i J_0'(\xi_i Ro) + a_r J_0(\xi_i Ro)]$ |
|  <p>Fig. 4,6-2 (b)</p> | $\frac{dT}{dr} = 0 \quad r = Ro$ $\frac{dT}{dr} = -a_r T \quad r = Re$ $a_r = \frac{hr}{k}$ $Q = Q_o(1 + \beta T)$ | $T(r) = \frac{Q_o \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i Re) + a_r J_0(\xi_i Re)]^2 C_o(\xi_i r) f_o}{\sigma^2 [\xi_i J_0'(\xi_i Ro) + a_r J_0(\xi_i Ro)]^2 - [a_r J_0(\xi_i Re) + \xi_i J_0'(\xi_i Re)]^2}$ $f_o, \gamma, \sigma^2, \text{ los de 4,6-2(a)}$ $C_o(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i Ro) - J_0'(\xi_i Ro) Y_0(\xi_i r) \quad ; \quad \xi_i, \text{ raíces de}$ $Y_0'(\xi_i Ro) [\xi_i J_0'(\xi_i Re) + a_r J_0(\xi_i Re)] = J_0'(\xi_i Re) [\xi_i Y_0'(\xi_i Re) + a_r Y_0(\xi_i Re)]$ |
|  <p>Fig. 4,6-2 (c)</p> | $\frac{dT}{dr} = b_r T \quad r = Ro$ $\frac{dT}{dr} = -a_r T \quad r = Re$ $b_r = \frac{h_o}{k} \quad a_r = \frac{h_e}{k}$ $Q = Q_o(1 + \beta T)$ | $T(r) = \frac{Q_o \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i Re) + b_r J_0(\xi_i Re)]^2 C_o(\xi_i r) f_o}{\sigma^2 (b_r^2 + \xi_i^2) [\xi_i J_0'(\xi_i Re) + a_r J_0(\xi_i Re)]^2 - [\xi_i J_0'(\xi_i Re) + b_r J_0(\xi_i Re)]^2}$ $f_o = \int_{Ro}^{Re} C_o(\xi_i r) r dr \quad ; \quad \sigma^2 = \xi_i^2 + \frac{Q_o \beta}{k} \quad ; \quad \xi_i, \text{ raíces de:}$ $[\xi_i Y_0'(\xi_i Ro) + a_r Y_0(\xi_i Ro)] [\xi_i J_0'(\xi_i Re) + b_r J_0(\xi_i Re)] = [\xi_i Y_0'(\xi_i Re) + b_r Y_0(\xi_i Re)] \cdot [\xi_i J_0'(\xi_i Ro) + a_r J_0(\xi_i Ro)]$ $C_o(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) [\xi_i Y_0'(\xi_i Ro) + a_r Y_0(\xi_i Ro)] - Y_0(\xi_i r) [\xi_i J_0'(\xi_i Ro) + a_r J_0(\xi_i Ro)]$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|--|
|  <p>Fig. 4.7-1(a)</p> | $T=0 \quad Z=0$ $T=0 \quad Z=2Lz$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_r T \quad R_o = r$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_e$ $a_r = \frac{hr}{k}; \quad Q = Q_o = ctz.$ | $T(r, z) = \frac{Q_o \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i J_0'(\xi_i R_o) + a_r J_0(\xi_i R_o)]^2 C_o(\xi_i r)}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_o) + a_r J_0(\xi_i R_o)]^2 - (a_r^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R_e)} \xi_i \left[R_e J_1(\xi_i R_e) Y_0'(\xi_i R_e) \right. \\ + J_1(\xi_i R_e) Y_1(\xi_i R_e) + \frac{2R_e}{\xi_i} - R_o J_1(\xi_i R_o) Y_0'(\xi_i R_e) - J_1(\xi_i R_e) Y_1(\xi_i R_e) + \frac{2R_o}{\xi_i} \left. \right] \left[1 - \frac{\cosh[\xi_i (Lz - Z)]}{\cosh(\xi_i Lz)} \right]$ $C_o(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i R_e) - J_0'(\xi_i R_e) Y_0(\xi_i r)$ $\xi_i, \text{ raíces de:}$ $[\xi_i Y_0'(\xi_i R_o) + a_r Y_0(\xi_i R_o)] J_0'(\xi_i R_e) = Y_0'(\xi_i R_e) [\xi_i J_0'(\xi_i R_o) + a_r J_0(\xi_i R_o)]$ |
|  <p>Fig. 4.7-1(b)</p> | $T=0 \quad Z=0$ $T=0 \quad Z=2Lz$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_o$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r = R_e$ $a_r = \frac{hr}{k} \quad Q = Q_o = ctz$ | $T(r, z) = \frac{Q_o \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_r J_0(\xi_i R_e)]^2 C_o(\xi_i r)}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_r J_0(\xi_i R_e)]^2 - [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_r J_0(\xi_i R_e)]^2}$ $+ \frac{1}{\xi_i} \left[J_1(\xi_i R_e) Y_1(\xi_i R_e) (1 - R_e) + \frac{2R_e}{\xi_i} - R_o J_1(\xi_i R_o) Y_0'(\xi_i R_e) - J_1(\xi_i R_e) Y_1(\xi_i R_e) + \frac{2R_o}{\xi_i} \right] \cdot$ $\cdot \left[1 - \frac{\cosh[\xi_i (Lz - Z)]}{\cosh(\xi_i Lz)} \right]; \quad \xi_i \text{ y } C_o(\xi_i r) \text{ son los de 4.7-1(a).}$ |
|  <p>Fig. 4.7-1(c)</p> | $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T; \quad r = R_e, \quad a_r = \frac{h_e}{k}$ $\frac{\partial T}{\partial r} = b_r T; \quad r = R_o; \quad b_r = \frac{h_o}{k}$ $T=0, \quad Z=0; \quad T=0, \quad Z=2Lz$ $Q = Q_o = ctz.$ | $T(r, z) = \frac{Q_o \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_r J_0(\xi_i R_e)]^2 C_o(\xi_i r)}{[(\xi_i J_0'(\xi_i R_e) - b_r J_0(\xi_i R_o))^2 - (\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_r J_0(\xi_i R_e))^2] (b_r^2 + \xi_i^2)} \cdot \frac{1}{\xi_i} \cdot$ $\left[1 - \frac{\cosh[\xi_i (Lz - Z)]}{\cosh(\xi_i Lz)} \right] \left[J_1(\xi_i R_e) Y_1(\xi_i R_e) (1 - R_e) + \frac{2R_e}{\xi_i} - R_o J_1(\xi_i R_o) Y_0'(\xi_i R_e) - J_1(\xi_i R_e) Y_1(\xi_i R_e) - \frac{2R_o}{\xi_i} \right]$ $C_o(\xi_i r) \text{ está dado en 4.7-1(a) y } \xi_i, \text{ raíces de}$ $[\xi_i Y_0'(\xi_i R_e) - b_r Y_0(\xi_i R_e)] [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_r J_0(\xi_i R_e)] = [\xi_i Y_0'(\xi_i R_e) + a_r Y_0(\xi_i R_e)] \cdot$ $\cdot [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) - b_r J_0(\xi_i R_e)]$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|--|--|
|  <p>Fig. 4.7-2(a)</p> | $T=0, z=0; T=0, z=2Lz$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r=Re$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_r T \quad r=Ro$ $a_r = \frac{h_r}{k}$ $Q = Q_0(1+\beta T)$ | $T(r,z) = \text{Ecuación 4.7-1(a)} \cdot \frac{\xi_i^2}{\sigma^2}$ $\sigma^2 = \xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}, \quad \sigma \text{ sustituye a } \xi_i \text{ en cosh}$ |
|  <p>Fig. 4.7-2(b)</p> | $T=0, z=0; T=0, z=2Lz$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r=Ro$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r=Re$ $a_r = \frac{h_r}{k}; Q = Q_0(1+\beta T)$ | $T(r,z) = \text{Ecuación 4.7-1(b)} \cdot \frac{\xi_i^2}{\sigma^2}$ $\sigma^2 = \xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}, \quad \sigma \text{ sustituye a } \xi_i \text{ en cosh}$ |
|  <p>Fig. 4.7-2(c)</p> | $T=0, z=0; T=0, z=2Lz$ $\frac{\partial T}{\partial r} = b_1 T; r=Ro; b_1 = \frac{h_o}{k}$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T; r=Re; a_1 = \frac{h_e}{k}$ $Q = Q_0(1+\beta T)$ | $T(r,z) = \text{Ecuación 4.7-1(c)} \cdot \frac{\xi_i^2}{\sigma^2}$ $\sigma^2 = \xi_i^2 - \frac{Q}{k}, \quad \sigma \text{ sustituye a } \xi_i \text{ en cosh}$ |

$$\frac{d^2 \bar{t}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} - \xi_i^2 \bar{t}_{H,0}(\xi_i, z) = -\frac{Q_0}{k} \int_{R_0}^{R_e} r C_0(\xi_i r) (1 + \beta r) J_0(r) dr = -\frac{Q_0 \beta}{k} \bar{t}_{H,0}(\xi_i, z) + f_0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \bar{t}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz^2} - (\xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}) \bar{t}_{H,0}(\xi_i, z) = f_0 \quad (3)$$

Resolviendo (2) con las condiciones de contorno

$$\bar{t}_{H,0}(\xi_i, z) = \frac{f_0}{\sigma^2} \left[\frac{\cosh(\sigma(L-z))}{\cosh(\sigma L)} - 1 \right] \quad (4)$$

y por la inversión dada en 3,3-5,3(8) se obtiene la ecuación de la Fig. 4,7-1(a) multiplicada por $\frac{\xi_i^2}{\sigma^2}$ donde $\sigma^2 = \xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}$

b) Para las condiciones de la Fig. 4,7-2(b) en forma análoga al caso anterior se obtiene la ecuación de la Fig. 4,7-1(b) multiplicada por ξ_i^2/σ^2 teniendo en cuenta que σ interviene en la ec. (4).

c) Para las condiciones de la Fig. 4,7-2(c) se obtiene la ecuación que se indica en la Fig. 4,7-1(c) multiplicada por ξ_i^2/σ^2

El tratamiento anterior puede hacerse para distintas condiciones del cilindro apoyándose en los resultados dados en el apartado 3.3-5.1.

4,8.1. Esfera con generación de calor uniforme

La ecuación general de distribución de temperaturas en coordenadas esféricas es, fig. 4,8-1

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -\frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

si $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$ la ecuación (1) se transforma en

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{Q_0}{k} \quad (2)$$

La solución general de (2) es

$$T = -\frac{r^2}{6} \frac{Q_0}{k} + C_1 r + C_2 \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dr} = 0 \quad r=0 \quad C_1=0$$

$$\text{en } r=R \quad T=T_s \quad C_2 = T_s + \frac{R^2 Q_0}{6k}$$

y finalmente

$$T - T_s = \frac{Q_0}{6k} (R^2 - r^2) \quad (4)$$

Para toda la esfera

$$Q = Q_0 \frac{4}{3} \pi R^3$$

y

$$T_0 - T_s = \frac{Q}{8\pi kR} \quad (5)$$

Si la esfera transmite calor a un fluido con coeficiente h

$$T_0 - t = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{2kR} + \frac{1}{R^2 h} \right) \quad (6)$$

Si la esfera se encuentra rodeada por una capa de material de conductividad térmica k_1 y radio exterior R_1

$$T_0 - t = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{2kR} + \frac{R_1 - R}{R^2 h} + \frac{R_1 - R}{k_1 R_1 R} \right) + \Delta T_c \quad (7)$$

donde ΔT_c es la caída de temperaturas en la superficie de contacto entre las dos esferas concéntricas.

Ejemplo 4, 8-1

Una esfera de 5 cm de radio genera $8.6 \cdot 10^5$ (Kcal/h m³)

Las propiedades térmicas y mecánicas del material son

E(módulo elástico) $2 \cdot 10^6$ (Kg/cm²) (coeficiente de dilatación lineal) $\lambda = 3 \cdot 10^{-6}$ (1/°C) ν (módulo de Poisson) = 0,34

Calcular:

- 1) Distribución de temperaturas si la superficie exterior se mantiene a 25°C .

2) Tensiones elásticas tangenciales en la superficie

3) Tensiones elásticas radiales

Solución

Aplicando la ec.4,8-1(4)

$$T-25 = \frac{8,6 \cdot 10^5}{60} (5 \cdot 10^{-4} - r^2)$$

En el centro $r=0$

$$T = 25 + 35,8 = 60,8$$

2),3) Las ecuaciones 2,3(1) y 2,3(5) del apartado 2,3 en coordenadas polares toman la forma

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0$$

$$e_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - 2\nu \sigma_{\varphi\varphi}) + \bar{\alpha} T$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] + \bar{\alpha} T$$

con la condición

$$\frac{de_{\varphi\varphi}}{dr} + \frac{1}{r} (e_{\varphi\varphi} - e_{rr}) = 0$$

y si $\sigma_{rr} = 0$ $r=R$ y $u=0$ $r=0$

$$\sigma_{rr} = \frac{2\bar{\alpha}E}{1-\nu} \left[\frac{1}{R^3} \int_0^R T r^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_0^r T r^2 dr - T \right]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\bar{\alpha}E}{1-\nu} \left[\frac{2}{R^3} \int_0^R T r^2 dr - \frac{1}{r^3} \int_0^r T r^2 dr - T \right]$$

y si la distribución de temperaturas está dado por la ec.4,8-1(4)

$$\sigma_{rr} = - \frac{\bar{\alpha}EQ_0}{15k(1-\nu)} (R^2 - r^2)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\bar{\alpha}EQ_0}{15k(1-\nu)} (2r^2 - R^2)$$

asi, ϵ_{rr} es máxima en $r=0$

Sustituyendo valores

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 10^4 \cdot 8,6 \cdot 10^5 \cdot (5 \cdot 10^{-4})}{15 \cdot 10 \cdot (1-0,34)} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ (kg/m}^2\text{)} \equiv 130 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

$$\sigma_{rr} = -0,52 \cdot 10^9 (5^2 \cdot 10^{-4} - r^2) \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

4,8-2. Esfera con generación de calor $Q = Q_0(1+\beta T)$

La ecuación general de distribución de temperaturas en coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = -\frac{Q_0}{k} (1+\beta T) \quad (1)$$

$$\text{si } \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{Q_0}{k} (1+\beta T) \quad (2)$$

La ec. (2) puede escribirse

$$\frac{d^2}{dr^2} (Tr) = -\frac{Q_0}{k} r - \frac{Q_0}{k} \beta (Tr) \quad (3)$$

Aplicando a (3) la transformada finita del seno de Fourier definida por

$$\bar{L}_F^s [T(r)] \equiv \bar{f}_F^s(s) = \int_0^R r T(r) \sin(sr) dr \quad s = \frac{m\pi}{R}$$

resulta para las condiciones de la Fig. 4,8-2

$$-r^2 \bar{f}_F^s(s) = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R r \sin(sr) dr - \frac{Q_0}{k} \beta \bar{f}_F^s(s) \quad (4)$$

con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(s_i r)}{r} \bar{f}_F^s(s_i) \quad (5)$$

Por (4)

$$\bar{f}_F^s(s) \left[s^2 - \frac{Q_0}{k} \beta \right] = \frac{Q_0}{k} \left[\frac{\sin(sr)}{s^2} - \frac{r \cos(sr)}{s} \right] = \frac{2 Q_0 R^2}{k \pi (m+1)}$$

$$T(r) = \frac{2Q_0 R}{\pi k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi_m r)}{(2m+1)r(\xi_m^2 - \frac{Q_0}{k} \beta)} \quad (6)$$

4,8-3. Esfera con generación de calor $Q=Q_0(1+\beta T)$ con convección

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} (1+\beta T)$$

o

$$\frac{d}{dr^2} (T(r) r) = -\frac{Q_0 r}{k} (1+\beta T) \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 4,8-3

Aplicando a la ecuación (1) la transformada finita del seno de Fourier se tiene, Apéndice I-1,2

$$\left[\frac{d}{dr} (rT) \sin(\xi_i r) \right]_0^R + \xi_i \left[rT \cos(\xi_i r) \right]_0^R - \xi_i \bar{T}_F^s(\xi_i) = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R r \sin(\xi_i r) dr - \frac{Q_0}{k} \beta \bar{T}_F^s(\xi_i) \quad (2)$$

Para que los dos primeros términos del primer miembro sean igual a cero debe cumplirse

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_R \sin(\xi_i R) + T_R \sin(\xi_i R) + \xi_i R T_R \cos(\xi_i R) = 0$$

y si

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_R = -\alpha_r T_R \quad ; \quad (-\alpha_r R + 1) T_R \sin(\xi_i R) + \xi_i R T_R \cos(\xi_i R) = 0$$

$$\text{y} \quad \xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) = \alpha_r R - 1 \quad \alpha_r R - 1 \quad \text{puede ser negativo} \quad (3)$$

Las raíces de $\xi_i R$ se indican en la tabla I-3(6). Si

$$\int_0^R r \sin(\xi_i r) dr = \frac{\alpha_r R}{\xi_i} \sin(\xi_i R) \quad (4)$$

poniendo la ec. (3)

La inversión de $\bar{T}_F^s(\xi_i)$ es

$$T(r) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R^2 \xi_i^2 + (a_r R - 1)^2 \sin(\xi_i R)}{r [R^2 \xi_i^2 + a_r R (a_r R - 1)]} \bar{T}_F^S(\xi_i) \quad (5)$$

que es análoga a la ec. 4,2-2(3) para rectángulos, sustituyendo la función coseno por seno y a_r por $a_r R - 1$.

Resolviendo la ec. (2)

$$\bar{T}_F^S(\xi_i) = \frac{Q_0}{k} \frac{R}{(\xi_i^2 - \frac{Q_0}{R} \beta)} \frac{R}{\xi_i^2} \sin(\xi_i R) \quad (6)$$

y sustituyendo la ec. (6) en (5)

$$T(r) = \frac{2 Q_0 a_r}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[R^2 \xi_i^2 + (a_r R - 1)^2] \sin(\xi_i R) \sin(\xi_i r)}{[R^2 \xi_i^2 + a_r R (a_r R - 1)] \xi_i^2 (\xi_i^2 - \frac{Q_0}{R} \beta) \cdot r} \quad (7)$$

4,8-4. Esfera con generación de calor $Q = Q_0 \exp(-br)$

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} \exp(-br) \quad (1)$$

6

$$\frac{d^2}{dr^2} (r T(r)) = -\frac{Q_0}{k} r \exp(-br)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 4,8-4.

Aplicando a (1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{T}_F^S(\xi) = -\int_0^R \frac{Q_0}{k} r \exp(-br) \sin(\xi r) dr \quad (2)$$

donde $\xi = \frac{\pi m}{R}$ con la inversión

$$r T(r) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \sin(\xi_i r) \bar{T}_{H,0}(\xi_i) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{Q_0}{k} r \exp(-br) \sin(\xi r) dr &= \\ &= -\frac{Q_0}{k} \frac{\xi^{-1} (1)^{m+1}}{(b^2 + \xi^2)} \left[\left(\frac{2b}{b^2 + \xi^2} + R \right) \exp(-bR) + \frac{2b}{b^2 + \xi^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \sin(\xi r)}{\xi (b^2 + \xi^2)} \left[\left(\frac{2b}{(b^2 + \xi^2)} + R \right) \exp(-bR) + \frac{2b}{b^2 + \xi^2} \right] \quad (5)$$

donde $\xi = \frac{\pi(m+1)}{R}$

4,8-5. Esfera con generación de calor $Q=Q_0 \exp(-br)$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} \exp(-br)$$

o

$$\frac{d^2}{dr^2} (r T(r)) = -\frac{Q_0 r}{k} \exp(-br) \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 4,8-5.

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$\xi_i^2 \bar{T}_F(\xi_i) = \int_0^R \frac{Q_0}{k} r \exp(-br) \cos(\xi_i r) dr \quad (2)$$

con la inversión según apartado 4,8-3

$$r T(r) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_r R - 1)^2 \cos(\xi_i r)}{[\xi_i^2 R^2 + R a_r (R a_r - 1)] \sin(\xi_i R)} \bar{T}_F(\xi_i) \quad (3)$$

siendo ξ_i las raíces de $R \xi_i \operatorname{ctg}(\xi_i R) + R a_r - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{Q_0}{k} r \exp(-br) \cos(\xi_i r) dr &= \frac{Q_0}{k} \left[\frac{\exp(-bR)}{b^2 + \xi_i^2} \cos(\xi_i R) \left(Rb - \frac{b^2 - \xi_i^2}{b^2 + \xi_i^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \xi_i \sin(\xi_i R) \left(1 + \frac{2b}{b^2 + \xi_i^2} \right) + \frac{b^2 - \xi_i^2}{b^2 + \xi_i^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

y finalmente

$$\begin{aligned} T(r) &= \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_r R - 1)^2 \cos(\xi_i r)}{[\xi_i^2 R^2 + a_r R (a_r R - 1)] r \xi_i^2} \left[\frac{\exp(-bR)}{b^2 + \xi_i^2} \left(\frac{(1 - a_r R)}{R \xi_i} \left(Rb - \frac{b^2 - \xi_i^2}{b^2 + \xi_i^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \xi_i^2 \left(1 + \frac{2b}{\xi_i^2 + b^2} \right) + \frac{(b^2 - \xi_i^2)}{(b^2 + \xi_i^2) \sin(\xi_i R)} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

4,8-6. Esfera con generación de calor $Q = \frac{Q_0}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{2R}\right)$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} \frac{\sin(\xi_1 r)}{r} \quad \xi_1 = \frac{\pi}{2R}$$

(1)

con las condiciones indicadas en la Fig. 4,8-6.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$\xi_1^2 \bar{T}_F(\xi_1) = \int_0^R \frac{Q_0}{k} \sin(\xi_1 r) \cos(\xi_1 r) dr \quad (2)$$

con la inversión y raíces dadas en el apartado 4,8-5 y

$$\bar{T}_F(\xi_1) = \frac{1}{\xi_1^2} \frac{Q_0}{k} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (2\xi_1)^2} (4\xi_1 \sin(\xi_1 R) + \pi) \quad (3)$$

y

$$T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(aR-1)^2 \cos(\xi_i r)}{[\xi_i^2 R^2 + aR(aR-1)] \xi_i^2 r \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (2\xi_i)^2 \right]} \left[4\xi_i + \frac{\pi}{\sin(\xi_i R)} \right] \quad (4)$$

4,8-7. Esfera con generación de calor $\frac{Q_0}{r} \sinh(br)$ y convección

Cumple la ecuación

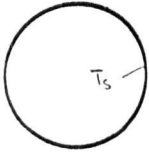
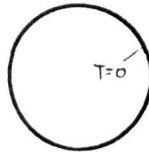

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{Q_0}{k} \frac{1}{r} \sinh(br)$$

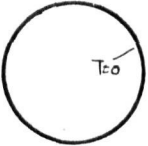


(1)

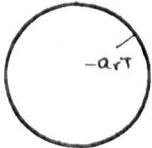
Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$\xi_i^2 + \bar{T}_F(\xi_i) = \frac{1}{b^2 + \xi_i^2} \left[b \cosh(bR) \cos(\xi_i R) + \xi_i \sinh(bR) \sin(\xi_i R) - b \right] \frac{Q_0}{k}$$

(2)

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|---|
|  <p>Fig. 4.8-1</p> | $\frac{dT}{dr} = 0 \quad r=0$ $T=T_s \quad r=R$ $Q_n = \text{cte}$ | $T-T_s = \frac{Q_0}{6k} (R^2-r^2)$ |
|  <p>Fig. 4.8-2</p> | $T=0 \quad r=R$ $Q = Q_0(1+\beta T)$ $\beta = \text{cte}$ | $T(r) = \frac{2Q_0 R}{\pi k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi r/R]}{(2m+1) \left[(2m+1)\frac{\pi}{R} \right]^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}} r$ |
|  <p>Fig. 4.8-3</p> | $\frac{dT}{dr} = -a_r T \quad r=R$ $a_r = \frac{hr}{k}$ $Q = Q_0(1+\beta T)$ $\beta = \text{cte}$ | $T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_r R - 1)^2 \cos(\xi_i r)}{(\xi_i^2 - \frac{Q_0 \beta}{k}) \xi_i r [\xi_i^2 R + 2a_r(a_r R - 1)]} \left[\frac{\cos(\xi_i R - 1)}{\xi_i} + R \sin(\xi_i R) \right]$ <p>ξ_i, raíces de $\xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) + a_r R - 1 = 0$</p> |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|--|
|  <p>Fig. 4.8-4</p> | $T=0 \quad r=R$ $Q=Q_0 \exp(-br)$ | $T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \sin(\xi r)}{(b^2 + \xi^2) \xi r} \left[\left(\frac{2b}{b^2 + \xi^2} + R \right) \exp(-br) + \frac{2b}{b^2 + \xi^2} \right]$ $\xi = \frac{\pi(m+1)}{R}$ |
|  <p>Fig. 4.8-5</p> | $\frac{dT}{dr} = -a_r T \quad r=R$ $a_r = \frac{hr}{k}$ $Q=Q_0 \exp(-br)$ | $T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_r R - 1)^2 \cos(\xi_i r)}{[\xi_i^2 R^2 + a_r R(a_r R - 1)] \xi_i^2 r} \left[\frac{\exp(-br)}{(b^2 + \xi_i^2)} \left(R b - \frac{b^2 - \xi_i^2}{b^2 + \xi_i^2} \right) \right. \\ \left. + \xi_i \left(1 + \frac{2b}{\xi_i^2 + b^2} \right) + \left(\frac{b^2 - \xi_i^2}{b^2 + \xi_i^2} \right) \sin(\xi_i R) \right]$ $\xi_i, \text{ raíces de } \xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) + a_r R - 1 = 0$ |
|  <p>Fig. 4.8-6</p> | $\frac{dT}{dr} = -a_r T \quad r=R$ $a_r = \frac{hr}{k}$ | $T = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_r R - 1)^2 \cos(\xi_i r)}{[\xi_i^2 R^2 + a_r R(a_r R - 1)] \xi_i^2 r} \left[\frac{\exp(-br)}{(b^2 + \xi_i^2)} \left(\frac{R^2}{2} - (2\xi_i^2)^2 \right) \right. \\ \left. + 4\xi_i \frac{\pi}{\sin(\xi_i R)} \right]$ $\xi_i, \text{ raíces de } \xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) + a_r R - 1 = 0$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|--|
|  <p data-bbox="172 429 313 451">Fig. 4.7-7</p> | $\frac{dT}{dr} = -a_r T \quad r = R$ $a_r = \frac{h_r}{k}$ $Q = \frac{Q_0}{r} \sinh(br)$ | $T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_r R - 1)^2 \cos(\xi_i r)}{[\xi_i^2 R^2 + a_r R(a_r R - 1)] r \xi_i^2 (b^2 + \xi_i^2)} \left[b \cosh(bR) \operatorname{ctg}(\xi_i R) + \xi_i \sinh(bR) - \frac{b}{\sin(\xi_i R)} \right]$ $\xi_i, \text{ raíces de } \xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) + a_r R - 1 = 0$ |

y con la inversion del apartado 4,8-5, Fig. 4,8-7,

$$T(r) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a_r R - 1)^2 \cos(\xi_i r)}{(\xi_i^2 R^2 + a_r R(a_r R - 1) + \xi_i^2 (b^2 + \xi_i^2))} \left[b \cosh(bR) \operatorname{ctg}(\xi_i R) + \right. \\ \left. + \xi_i \sinh(bR) - \frac{b}{\operatorname{sen}(\xi_i R)} \right] \quad (3)$$

Bibliografía

- AMES, W.F. Non Linear Partial Differential Equations. Academic Press, New-York (1967).
- ARTHUR R. VON HIPPEL, Dielectric Materials and Applications, MIT Press Cambridge, Mass. (1954).
- ARIS RUTHERFORD, The Mathematical Diffusion and Reaction in Permeable Catalists, Vol. I, Oxford at the Clarendon Press (1975).
- ANDERSON GA and ZIENKIEWICZ, O.C., Spontaneous Ignitions. Finite Element Solutions for Steady State and Transient Coditions Trans. ASME. J.of Heat Transfer 378, August (1974).
- BERGHMANS, J., Electrostatic Field and the Maximum Heat Flux Int. J. of Heat and Mass Transfer, 19, 791 (1976).
- BIRKS, J.B., Modern Dielectric Material Heywood & Co. Ltd. London (1960).
- BLANCO, J., Diseño de reactores químicos. Editorial Trillas, Méjico, (1978).
- BONILLA, C.F., Nuclear Engineering, McGraw-Hill (1957).
- BROYER, E. and MACOSKO, C.W., Heat Transfer and Curing in Polimer Reaction Molding.
- BRITISH ELECTRICAL DEVELOPMENT ASSOCIATION, Induction and Dielectric Heating, London (1962).
- BULLER, F.H., Artificial Cooling of Power Cable. Trans. on Power Apparatus and Systems, 634-41 (1976).

CHARLES G. HILL, Jr., An Introduction to Chemical Engineering Kinetics & Reactor Design, John Wiley and Sons, New York, (1977).

COELHO, R., Dielectriques et isolants. Ecole Supérieure d'Electricité Université de Paris, N° 2005 (1965).

CHAUDRON, G., TROMBE, F., Les Hautes Températures et leurs utilisations en Physique et en Chimie. Vol. I, Masson et Cie, Paris (1973).

CARBERRY, J.J., Chemical and Catalytic Engineering, McGraw-Hill, New York (1976).

FICARA, P.L. y otros, Thermal Conductance of the Pellet-Clad Gap of Fuel Rods Experimental Results and Analytical Calculations Energia Nucleare, 24, 11, (1977).

GLASSTONE, S. and SESONSKE, A., Nuclear Power Engineering, D. Van Nostrand Co., Princeton, New-Jersey (1967).

LEVENSIDFIELD, O., Chemical Reaction Engineering, Prentice Hall, Englewood cliffs, N.J. (1974).

LEBEAUV, P., Les hautes températures et leur utilisations en Chimie, Masson et Cie, Vol. I, Paris (1950).

LUIKOV, A.V., Heat and Mass Transfer in Capillary. Porous Bodies, Pergamon Press, London (1966).

NOTARIO, J., WEBSTER, D.J., Thermal Analysis of Forced Cooled Cables AIEE, 90, 1225 (1971).

MELESE, G.B., D'HOSPITAL, Steady State Heat Transfer Conduction in Slabs. Cylindrical and Spherical Shells with non Uniform Heat Generation. Nucl.Eng.of Design, 24, 74 (1973).

PEARSON, J.A., Internal Heat Transfer in Fuel Elements, Nucl.Eng. 156-64 (1963).

PASCHKISS, V., Industrial Electric Furnaces and Appliances and

Interscience Publ.Inc. New-York (1948).

PFANN, J., Determination of the Steady State Temperature Distributions in Solids with Internal Heat Sources and Temperature Dependent, Nucl.Eng.and Design, 4, 121-28 (1966).

PFENNIGWERTH, P.L., Heat Transfer and Fluid Flow with Applications to Pressurized Water Reactors, Vol. I WAPD-TM-1000, U.S. Department of Commerce, EE.UU (1971).

SESONSKE, A., Nuclear Power Plant Design Analysis.

RANGLES, J., Heat Diffusion in Cylindrical Fuel Elements of Water Cooled Reactors, AEEW-R 96, Atomic Energy Establishment, Winfrith, United Kingdom (1961).

PHYSICS OF THE WELDING ARC SYMPOSIUM, Institute of Welding, 54, Princess Gate, London SW7 (1962).

TONG, L.S. and WEISMAN, J., Thermal Analysis of Pressurized Water Reactors, American Nuclear Society, EE.UU (1970).

SMITH, J.M., Chemical Engineering Kinetics, McGraw-Hill, 2nd Ed. (1970).

VAIN, H. y otros Welding for Engineers, John Wiley & Sons, New York (1954).

WARBURTON GRWN, D., Induction Heating Practice Odhams Press Ltd. London (1956).

YEVICK, J.G., Fast Reactor Technology Plant and Design, MIT Press Cambridge, Mass. (1966).

CAPITULO 5

TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION EN REGIMEN TRANSITORIO

INTRODUCCION

Todos los procesos térmicos se realizan en un tiempo finito y por lo tanto aparecen los problemas de calentamiento o enfriamiento iniciales y finales. Por otra parte, el régimen estacionario puede mantenerse dentro de un margen de temperaturas que producen oscilaciones térmicas en el sistema, que se corrigen, por el control de las variables que intervienen en el fenómeno, tales como caudales o presiones. Finalmente, los materiales cambian sus propiedades por efecto de la temperatura dando origen a tensiones y deformaciones, que son mas acusadas, cuando se trate de fenómenos transitorios. En cualquier caso, los problemas que se plantean son los mismos que los correspondientes a régimen estacionario; distribución de los focos térmicos, campos de temperatura y comportamiento de los materiales.

Los casos simples de régimen transitorio corresponden a situaciones donde no se presentan focos térmicos con generación de calor sino que una masa de gas, líquido o sólido a una determinada temperatura caliente o enfría un cuerpo sólido. Este tipo de problemas se presentan en muchos procesos térmicos, tal como sucede en los intercambiadores de calor en general, conocidos con el nombre de recuperadores y regeneradores de calor. Para tener una mayor precisión en las denominaciones de equipos, es preferible utilizar el nombre genérico de intercambiadores, con especificación posterior de, directos o indirectos, y añadiendo los estados de agregación. Un recuperador queda mejor definido cuando se denomina como un intercambiador de contacto directo gas-sólido. Ambas denominaciones se aplican en éste libro.

Cuando en los aspectos térmicos aparecen focos térmicos generando calor dentro de los materiales los problemas son más complicados y se tratan en el capítulo 6. Los casos de régimen periódico se estudian en el capítulo 7 a los que se pueden superponer los tratamientos del capítulo 6, cuando además, intervienen focos térmicos con generación de calor.

La ecuación general de distribución de temperaturas en régimen transitorio es como se indica en el capítulo 2,

$$\nabla(k \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

donde ρ es la densidad y C_p el calor específico a presión constante. Si k es constante se escribe

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2)$$

donde α se conoce como difusividad térmica y se expresa en o en unidades equivalentes. En las tablas de materiales del Apéndice II se dan valores de α o valores de k , C_p y ρ para calcularlo.

Generalmente α es menos sensible a variaciones de T que k , simplificándose la solución de la ec.(2). En situaciones más complicadas, hay que tratar de linealizar la ec.(2), aún en el caso de materiales compuestos.

La solución de la ec.(2), complica el tratamiento por la aparición del tiempo como una nueva variable. Pueden aplicarse distintos métodos pero de entre todos ellos se considera que la combinación de las transformadas de Fourier con las transformadas de Laplace son herramientas muy poderosas que *mutatis mutandi* dan solución a muchos problemas así como soluciones razonables en situaciones complejas. El lector no encontrará dificultades porque estos métodos se vienen utilizando desde el capítulo 3.

5.1.1. Sólidos calentados o enfriados con resistencia térmica superficial controlante.

Cuando la resistencia térmica de un cuerpo sólido es pequeña frente a la resistencia térmica de la convección, ésta controla la transmisión de calor en régimen no estacionario. Sea un sólido con temperatura inicial T_0 , conductividad térmica k , elevada, volumen V y densidad ρ rodeado de un fluido que extrae calor con un coeficiente de transmisión de calor h y temperatura constante t . La cantidad de calor que pierde el sólido pasa al fluido, y un balance de energía térmica permite escribir

$$\dot{q} = c_p V \rho \frac{dT}{d\tau} = h S (T - t) \quad (1)$$

Resolviendo la ecuación anterior, y si para $\tau = 0$ $T = T_0$ resulta

$$\frac{T - t}{T_0 - t} = \exp\left(-\frac{h S}{c_p V \rho} \tau\right) \quad (2)$$

La cantidad perdida por el sólido al tiempo τ vale

$$Q_1 = \int_0^{\tau} \dot{q} d\tau$$

y

$$\frac{Q_1}{c_p V \rho (T_0 - t)} = 1 - \exp\left(-\frac{h S \tau}{c_p V \rho}\right) \quad (3)$$

La ecuación (2) puede escribirse en función de los números adimensionales

$$Nu = \frac{h L}{k} \quad \text{número de Nusselt}$$

y

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{L^2} \quad \text{número de Fourier}$$

$$\frac{T - t}{T_0 - t} = \exp\left(-\frac{S L}{V} Nu Fo\right) \quad (4)$$

donde L es una longitud característica del sólido, semiespesor para una placa plana, radio para cilindro y esfera. Para calentamiento de un sólido $t > T_0$.

Ejemplo 5.1-1

Una esfera de aluminio de 6 cm de diámetro se calienta en un horno a 200°C y con un dispositivo adecuado se introduce rápidamente en un conducto por donde circula aire a 50°C . La medida de temperaturas en la esfera alcanza, 182°C un minuto después de colocar la esfera en el conducto, $129,5^\circ\text{C}$ a los 5 minutos, y $92,5^\circ\text{C}$ a los 10 minutos se desea conocer:

- coeficiente de transmisión de calor esfera-aire.
- Flujo térmico en la superficie de la esfera a los tiempos de 1,5 y 10 minutos.
- Calor perdido a los tiempos anteriores
- Repetir el caso c) para una esfera de acero del mismo diámetro y estado de la superficie que la esfera de aluminio considerada anteriormente

Solución:

- a) Por la ecuación 5.1-1(2) y con las propiedades del aluminio a 200°C que pueden admitirse constantes en el intervalo $200-50^\circ\text{C}$

$$\rho = 2690 \text{ (Kg/m}^3\text{)} \quad C_p = 0,248 \text{ (Kcal/Kg}^\circ\text{C)}$$

$$\frac{T-50}{150} = \exp\left(-\frac{h 4\pi R^2 \tau}{\rho C_p \frac{4}{3}\pi R^3}\right) = \exp\left(-\frac{3h\tau}{\rho C_p R}\right) = \exp(-0,15 h \tau)$$

Para $\tau = \frac{1}{60}$ (hora)

$$h = \frac{60}{0,15} \ln\left(\frac{150}{132}\right) = 51,1 \text{ (Kcal/m}^2\text{C)}$$

Para $\tau = 5/60$ (hora)

$$h = \frac{12}{0,15} \ln(150/79,5) = 50,8 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}\tau\text{)}$$

Para $\tau = 1/6$ (h)

$$h = \frac{6}{0,15} \ln(150/42,5) = 50,4 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}\tau\text{)}$$

Se toma como valor medio $50,4 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}\tau\text{)}$

b) Diferenciando la ec. 5.1-1(2) respecto al tiempo

$$q = V \rho C_p \frac{dT}{d\tau} = hS \exp\left(-\frac{hS}{\rho C_p V} \tau\right) \cdot (T_0 - t)$$

y

$$\frac{q}{S} = (T_0 - t) h \exp\left(-\frac{hS}{\rho C_p V} \tau\right) = 150 \cdot 50,5 \exp(-7,56 \tau)$$

Para $\tau = 1/60$ (h)

$$\frac{q}{S} = 6678 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

Para $\tau = 5/60$ (h)

$$\frac{q}{S} = 4034 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

Para $\tau = 1/6$ (h)

$$q/S = 2148 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

c)

$$\frac{Q_1}{Q_0} = 1 - \exp\left(-\frac{hS}{\rho C_p V} \tau\right) = 1 - \exp(-7,56 \tau); Q_1, \tau=0 = \rho C_p V (T_0 - t) = 44,3 \text{ Kcal}$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = 0,118 \text{ } (\tau = 1/60 \text{ (h)}) \quad \frac{Q_1}{Q_0} = 0,46 \text{ } (\tau = 5/60 \text{ (h)}) \quad \frac{Q_1}{Q_0} = 0,716 \text{ } (\tau = 1/6 \text{ (h)})$$

d) Para acero

$$\rho = 7800 \text{ (Kg/m}^3\text{)}$$

$$C_p = 0,11 \text{ (Kcal/Kg.}\tau\text{)}$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = 1 - \exp\left(-\frac{50,5 \cdot 10^{-1}}{78 \cdot 0,11} \tau\right) = 1 - \exp(-5,88 \tau)$$

$$Q_0 = 11,3 \cdot \frac{7,8 \cdot 0,11}{2,69 \cdot 0,248} = 11,53 \text{ (kcal)}$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = 0,09 \quad (\tau = 1/60 \text{ (h)}) \quad \frac{Q_1}{Q_0} = 0,38 \quad (\tau = 5/60 \text{ (h)}) \quad \frac{Q_1}{Q_0} = 0,624 \quad (\tau = 1/6 \text{ (h)})$$

Como puede observarse, los resultados obtenidos son un caso límite, por admitirse que la resistencia térmica del cuerpo sólido es mucho menor que la resistencia térmica de la superficie al fluido, lo cual es tanto más exacto, cuanto menor es el coeficiente de transmisión de calor h y mayor la conductividad térmica del sólido. Para cuerpos metálicos con gases, la aproximación anterior es válida en muchas aplicaciones prácticas relacionadas con el almacenamiento de energía térmica.

5.1-2. Sólido seminfinito

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones, Fig. 5,1-2

$$\begin{array}{lll} T = T(x) & 0 < x < \infty & \tau < 0 \\ T = 0 & x = 0 & \tau > 0 \end{array} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada del seno de Fourier, Apéndice I-2

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] &= -\xi^2 f_F^S(\xi, \tau) \\ L\left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}\right] &= \frac{1}{\alpha} \frac{df_F^S(\xi, \tau)}{d\tau} - \xi^2 f_F^S(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{df_F^S(\xi, \tau)}{d\tau} \end{aligned} \quad (3)$$

Resolviendo la ec. (3)

$$f_F^S(\xi, \tau) = A \exp(-\alpha \xi^2 \tau)$$

$$\text{en } \tau = 0 \quad T = T(x) \quad f_F^S(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T(x) \sin(\xi x) dx \quad (4)$$

y por la inversión de $f_F^S(\xi)$

$$T(x, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T(\xi) \sin(\xi x) d\xi \int_0^{\infty} \sin(x\xi) \exp(-\alpha \xi^2 z) d\xi \quad (5)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha \xi^2 z) \cos(x\xi) d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha z}} \exp(-x^2/4\alpha z)$$

$$\sin(\xi x) \sin(x\xi) = \sin(\xi x) \sin(\eta \xi) = \frac{1}{2} [\cos \xi(x-\eta) - \cos \xi(x+\eta)]$$

con cambio de nomenclatura

$$T(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha z}} \int_0^{\infty} T(\eta) [\exp(-(x-\eta)^2/4\alpha z) - \exp(-(x+\eta)^2/4\alpha z)] d\eta \quad (6)$$

Haciendo el cambio $\frac{x-\eta}{2\sqrt{\alpha z}} = u$ y $d\eta 2\sqrt{\alpha z} = du$, si $T(x) = T_0$

$$T(x, z) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}}^{\infty} \exp(-u^2) du - \int_{\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}}^{\infty} \exp(-u^2) du \right] = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}} \exp(-u^2) du \quad (7)$$

La integral de la ec. (7) se conoce como función de error y se designa como $\text{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}\right)$ Apéndice I-6; y

$$T(x, z) = T_0 \text{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}\right) = T_0 \left[1 - \text{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}\right)\right] \quad (8)$$

donde $\text{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}\right)$ se denomina función de error complementaria es decir

$$\text{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}\right) = \int_{\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}}^{\infty} \exp(-u^2) du = 1 - \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}} \exp(-u^2) du = 1 - \text{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}\right) \quad (9)$$

Derivando la ec. (8) con respecto a x se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial (x/2\sqrt{\alpha z})} \frac{\partial (x/2\sqrt{\alpha z})}{\partial x} = T_0 \frac{\exp(-x^2/4\alpha z)}{\sqrt{\pi\alpha z}} \quad (10)$$

que puede escribirse en forma adimensional

$$-\frac{x}{T_0} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \exp(-x^2/4\alpha\tau) \quad (11)$$

Para hallar el gradiente máximo $(\partial T/\partial x)_{\max}$ se deriva la ec. (10) e igualando a cero se tiene la distancia

$$(x)_{\max} = 2\sqrt{\alpha\tau} \quad (12)$$

Análogamente derivando la ec. (8) respecto al tiempo se obtiene la velocidad de calentamiento

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_0 \left(-\frac{x}{4\sqrt{\alpha\tau}} \right) \exp(-x^2/4\alpha\tau) \quad (13)$$

La ec. (13) puede escribirse en forma adimensional

$$-\frac{\pi\tau}{T_0} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \exp(-x^2/4\alpha\tau) \quad (14)$$

y el valor $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_{\max}$ tiene lugar cuando $\tau_{\max} = \frac{x^2}{2\alpha}$ (15)

Las ecuaciones anteriores indican:

- a) El gradiente térmico es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo.
- b) El tiempo para alcanzar una determinada temperatura es proporcional al cuadrado de la distancia a la superficie e inversamente proporcional a la difusividad térmica.

Las consideraciones anteriores no se aplican cuando el parámetro que interviene es distinto a $x/\sqrt{2\alpha\tau}$

Ejemplo 5,1-2

Un gran bloque de acero con superficie plana se encuentra a 20°C. Por efecto de un incendio la temperatura en la superficie del bloque alcanza 500°C prácticamente en forma instantánea y se mantiene durante 30 minutos. Se desea conocer:

- a) Temperaturas en puntos situados a 5 y 50 cm de la superficie para tiempos de 1 y 30 minutos.
- b) Flujos térmicos para los tiempos y planos paralelos a la superficie correspondientes a los puntos de a).
- c) Gradientes térmicos para tiempos y puntos de a).
- d) Flujos y gradientes térmicos máximos.
- e) Velocidad de calentamiento máxima.

Solución:

- a) La ec. 5.1-2(8) para temperatura inicial distinta de cero y calentando el cuerpo vale

$$\frac{500 - T(x, \tau)}{500 - 20} = \text{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right), \text{ valores de fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$$

se dan en el Apéndice I, Tabla I-6.

Para acero $k = 28 \text{ (Kcal/hm}^\circ\text{C)}$, $\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ $c_p = 0,11 \text{ (Kcal/kg}^\circ\text{C)}$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = 0,032 \left(\frac{\text{m}^2}{\text{h}}\right)$$

y dando valores se tiene

$$T(0,05, 1/60) = 500 - 480 \text{ fer}\left(\frac{0,05}{2\sqrt{0,032/60}}\right) = 82^\circ\text{C}$$

$$T(0,5, 1/60) = 500 - 480 \text{ fer}\left(\frac{0,5}{2\sqrt{0,032/60}}\right) \approx 20^\circ\text{C}$$

$$T(0,05, 1/2) = 500 - 480 \text{ fer}\left(\frac{0,05}{2\sqrt{0,016}}\right) = 413,6^\circ\text{C}$$

$$T(0,5, 1/2) = 500 - 480 \text{ fer}\left(\frac{0,5}{2\sqrt{0,016}}\right) = 25^\circ\text{C}$$

- b) El flujo térmico viene dado por $\left(\frac{q}{S}\right)_{x,\tau} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x,\tau}$
y por la ec. 5.1-2(11)

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{x,\tau} = \frac{k(500-20)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} \exp(-x^2/4\alpha\tau)$$

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(0,05, 1/60)} = \frac{28.480}{\sqrt{\pi \cdot 0,032/60}} \cdot \exp\left(-\frac{0,05^2 \cdot 60}{4 \cdot 0,032}\right) = 1,01 \cdot 10^5 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(0,5, 1/60)} = \quad " \quad \cdot \exp\left(-\frac{0,5^2 \cdot 60}{4 \cdot 0,032}\right) \approx 0$$

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(0,05, 1/2)} = \quad " \quad \cdot \exp\left(-\frac{0,05^2}{2 \cdot 0,032}\right) = 5,76 \cdot 10^4 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(0,5, 1/2)} = \quad " \quad \cdot \exp\left(-\frac{0,5^2}{2 \cdot 0,032}\right) = 1,15 \cdot 10^3 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

c) Los gradientes térmicos son los valores de b) divididos por k

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(0,05, 1/60)} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ (}^\circ\text{C/m)} \quad -\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(0,5, 1/60)} \approx 0$$

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(0,05, 1/2)} = 2,05 \cdot 10^3 \text{ (}^\circ\text{C/m)} \quad -\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(0,5, 1/2)} = 41 \text{ (}^\circ\text{C/m)}$$

d) Por la ec. (12) para $\tau = 1/60$ el flujo térmico máximo tiene lugar en $3,26 \text{ (cm)}$

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(0,032, 1/60)} = \frac{k \cdot 480}{2 \sqrt{\pi \alpha \tau}} \cdot \frac{1}{e} = 1,20 \cdot 10^5 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

análogamente para $\tau = 1/2 \text{ (h)}$ $x = 0,178 \text{ (m)}$

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(0,178, 1/2)} = \frac{k \cdot 480}{\sqrt{\pi \alpha \tau}} \cdot \frac{1}{e} = 2,2 \cdot 10^4 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

y para los gradientes térmicos máximos

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(0,032, 1/60)} = 4,28 \cdot 10^3 \text{ (}^\circ\text{C/m)} \quad -\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(0,178, 1/2)} = 785 \text{ (}^\circ\text{C/m)}$$

e) Por la ec. (15) para 5 (cm) $\tau_{\max} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 28} = 4,46 \cdot 10^{-5} \text{ (h)} \equiv 0,16 \text{ (s)}$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{480}{\pi \cdot \tau \cdot \sqrt{2e}} = 1,47 \cdot 10^6 \text{ (}^\circ\text{C/h)} \equiv 408 \text{ (}^\circ\text{C/s)}$$

Para 50 cm $\tau_{\max} = 4,46 \cdot 10^{-3} \text{ (h)} \equiv 16 \text{ (s)}$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{480 \cdot 10^3}{\pi \cdot 4,46 \sqrt{2e}} = 1,47 \cdot 10^4 \text{ (}^\circ\text{C/h)} = 4,08 \text{ (}^\circ\text{C/s)}$$

Obsérvese que si se tratase de otro material en las mismas condicio

nes los valores para distancias y tiempos están dados por las ec. (12) y (15).

5,1-3. Sólido semiinfinito con convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones, Fig. 5,1-3

$$\begin{aligned} T &= T(x) & 0 < x < \infty & & \tau < 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \alpha x T & x = 0 & & \tau > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada del coseno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{T}_F(\xi, \tau) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \omega(\xi, x) \Big|_{x=0} = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F(\xi, \tau)}{d \tau} \quad (3)$$

y para que $-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \omega(\xi, x) \Big|_{x=0} = 0$ debe cumplirse la ecuación

$$\frac{dT}{dx} - \alpha x T = \sin(\xi x) \quad \text{cuya solución es } T(x) = \frac{\alpha x \sin(\xi x) + \xi \cos(\xi x)}{\alpha^2 x^2 + \xi^2}$$

y la ecuación (3) puede escribirse

$$-\xi^2 \bar{T}_F(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F(\xi, \tau)}{d \tau} \quad (4)$$

donde

$$\bar{T}_F(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\alpha x \sin(\xi x) + \xi \cos(\xi x)) T(x) dx$$

con la inversión

$$T(x, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{[\alpha x \sin(\xi x) + \xi \cos(\xi x)] \bar{T}_F(\xi, \tau) d\xi}{\alpha^2 x^2 + \xi^2} \quad (5)$$

Resolviendo la ec. (4) con $T = T(x)$ en $\tau = 0$

$$\bar{T}_F(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{T(x) [\alpha x \sin(\xi x) + \xi \cos(\xi x)] \exp(-\alpha \xi^2 \tau) d\xi}{\alpha^2 x^2 + \xi^2}$$

y por la inversión (5)

$$T(x, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T(\eta) \frac{[a_x \sin(\xi \eta) + \xi \cos(\xi \eta)]}{a_x^2 + \xi^2} \exp(-\alpha \xi^2 z) d\eta d\xi \quad (6)$$

La integración de la ec. (6) con $T(\eta) = T_0$

$$T(x, z) = T_0 \left[\operatorname{ferc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} \right) + \exp(a_x x + a_x^2 \alpha z) \operatorname{ferc} \left(\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} \right) + a_x \sqrt{\alpha z} \right) \right] \quad (7)$$

a) Si la temperatura del medio es t_0 y la temperatura inicial del sólido T_0

$$T_0 - T(x, z) = (T_0 - t_0), \text{ ecuación (7)} \quad (8)$$

b) Si el medio calienta al sólido $\frac{\partial T}{\partial x} = -a_x T$ y

$$T(x, z) - t_0 = (t_0 - T_0) \left[\operatorname{ferc} \frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} - \exp(a_x x + a_x^2 \alpha z) \operatorname{ferc} \left(\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} \right) + a_x \sqrt{\alpha z} \right) \right] \quad (9)$$

Ejemplo 5,1-3

Una conducción de agua se encuentra enterrada en la tierra a una profundidad de 1,5 m. Cuando la temperatura del terreno es de 7°C las condiciones climáticas cambian y la temperatura del aire alcanza -25°C . Con un coeficiente de transmisión de calor aire-tierra de $10 \text{ (kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$. Se desea conocer el tiempo que tardará la conducción en alcanzar 0°C . Suponiendo despreciables los efectos de congelación del suelo y para propiedades de éste último de

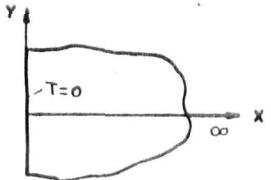
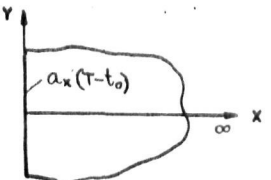
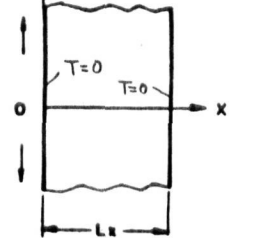
$$c_p = 0,4 \text{ (kcal/kg.}^\circ\text{C)} \quad k = 1 \text{ (kcal/h.m.}^\circ\text{C)} \quad \rho = 1500 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

Solución

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{1}{1500 \cdot 0,4} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^2\text{/h)}$$

Por aplicación de la ecuación 5,1-3 con

$$a_x = \frac{h}{k} = 10 \text{ (} \frac{1}{\text{m}} \text{)} \quad x = 1,5 \text{ (m)} \quad T_0 - T(x, z) = 7 \text{ (}^\circ\text{C)} \quad T_0 - t_0 = 7 + 25 = 32$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|---|
|  <p>Fig. 5,1-2</p> | $T=0 ; 0 < x < \infty ; \tau \leq 0$ $T=0 ; x=0 ; \tau > 0$ | $T(x, \tau) = T_0 \operatorname{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) = T_0 \frac{2}{\pi} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} \exp(-u^2) du$ <p>Valores de $\operatorname{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$, Apéndice I-6</p> |
|  <p>Fig. 5,1-3</p> | $T=T_0 ; 0 < x < \infty ; \tau \leq 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = a_x(T-T_0) ; x=0 ; \tau > 0$ $a_x = \frac{hx}{k} ; t_0 < T_0$ | $T_0 - T(x, \tau) = (T_0 - t_0) \left[\operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) - \exp(a_x x + a_x^2 \tau) \cdot \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} + a_x \sqrt{\alpha\tau}\right) \right]$ $\operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) = 1 - \operatorname{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$ |
|  <p>Fig. 5,1-4</p> | $T=T(x) ; 0 < x < L_x ; \tau \leq 0$ $T=0, x=0, x=L_x, \tau > 0$ | $T(x, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \exp\left[-\alpha\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \tau\right] \int_0^{L_x} T(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx$ |

se pueden obtener gráficas de valores de $T(x, \tau)$ para distintos tiempos o bien obtener directamente $T_0 - T(x, \tau) = 0^\circ \text{C}$ después de tanteos previos. Para valores de τ grandes el segundo término tiende a cero

$$T_0 - T(x, \tau) = (T_0 - t_0) \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) = (T_0 - t_0) \left(1 - \operatorname{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)\right)$$

y para los valores anteriores

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0,88 \quad \operatorname{ferc} = 0,218$$

$$\tau = 400(\text{h}) \equiv 16 \text{ días}$$

5,1-4. Pared plana infinita

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 5,1-4.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier en forma análoga al apartado 5,1-2, con $\xi = \frac{\pi m}{Lx}$

$$-\xi^2 \bar{T}_F(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_F(\xi, \tau)}{d\tau} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x, \tau) = \frac{2}{Lx} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{T}_F(\xi, \tau) \quad (3)$$

Resolviendo la ec. (2) con las condiciones anteriores

$$\bar{T}_F(\xi, \tau) = T(x) \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \quad (4)$$

y finalmente sustituyendo (4) en (3)

$$T(x, \tau) = \frac{2}{Lx} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \int_0^{Lx} T(x) \sin(\xi x) dx \quad (5)$$

a) Para $T(x) = T_1$ en $z=0$

$$\int_0^{L_x} T_1 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx = 2T_1 \frac{L_x}{m\pi} \quad \text{para } m \text{ impar}$$

$$T(x, z) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi x/L_x]}{(2m+1)} \exp[-((2m+1)\pi/L_x)^2 z] \quad (6)$$

b) Para $T(x) = T_1 x$ en $z=0$

$$\int_0^{L_x} T_1 x \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx = T_1 \left(\frac{L_x}{m\pi}\right) L_x (-1)^m$$

$$T(x, z) = \frac{T_1 L_x}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/L_x)}{m} \exp[-(m\pi/L_x)^2 z] \quad (7)$$

c) Para $T(x) = T_1 x^2$ en $z=0$

$$\int_0^{L_x} T_1 x^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) dx = \frac{T_1 L_x^3}{\pi} \left[1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(2m+1)^3} \right]$$

$$T(x, z) = \frac{T_1 L_x^2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(2m+1)^3} \right] \sin\left[\frac{(2m+1)\pi x}{L_x}\right] \exp[-((2m+1)\pi/L_x)^2 z] \quad (8)$$

d) Para $T(x) = T_1 \exp(-ax)$ en $z=0$

$$\int_0^{L_x} T_1 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \exp(-ax) dx = \frac{T_1}{a^2 \frac{L_x}{\pi}} \left[(-1)^m \exp(-aL_x) + 1 \right]$$

$$T(x, z) = \frac{2T_1}{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right)}{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + a^2} \left[(-1)^m \exp(-aL_x) + 1 \right] \quad (9)$$

5,1-5. Pared plana infinita

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1)$$

Con las condiciones que se indican en la Fig. 5,1-5. Aplicando a (1) la transformada finita del seno de Fourier

$$\xi [T_1 - (-1)^m T_2] - \xi^2 \bar{T}_F(\xi, z) = \frac{1}{a} \frac{1}{L_x} \frac{\partial \bar{T}_F(\xi, z)}{\partial z} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x, z) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{T}_F^s(\xi, z) \quad (3)$$

Resolviendo (2) por transformadas de Laplace

$$\alpha \frac{\xi}{s} [T_1 - (1)^m T_2] = s f(s) - A + \xi^2 f(s)$$

$$f(s) = \frac{1}{\xi} (T_1 - (1)^m T_2) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + \alpha \xi^2} \right) + \frac{A}{s + \alpha \xi^2}$$

y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{T}_F^s(\xi, z) = \frac{1}{\xi} [T_1 - (1)^m T_2] [1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)] + A \exp(-\alpha \xi^2 z)$$

y si en $z=0$ la temperatura en la pared es $T(x)$

$$A = \int_0^{L_x} T(x, 0) \sin(\xi x) dx$$

$$\bar{T}_F^s(\xi, z) = \frac{[T_1 - (1)^m T_2]}{\xi} + \exp(-\alpha \xi^2 z) \left[\int_0^{L_x} T(x, 0) \sin(\xi x) dx - \frac{[T_1 - (1)^m T_2]}{\xi} \right] \quad (4)$$

y finalmente

$$T(x, z) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} [T_1 - (1)^m T_2] \sin(\xi x) \left[(1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) + \exp(-\alpha \xi^2 z) \int_0^{L_x} T(x, 0) \sin(\xi x) dx \right] \quad (5)$$

Si $T(x, 0) = T_0$ $\int_0^{L_x} T_0 \sin(\xi x) dx = \frac{2 T_0 L_x}{(2m+1)\pi} = \frac{2 T_0}{\xi}$

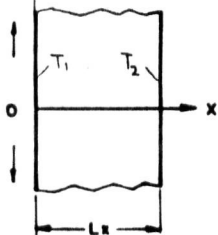
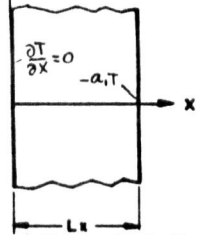
$$T(x, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[T_1 - (1)^{2m+1} T_2]}{(2m+1)} \left[(1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) + \exp(-\alpha \xi^2 z) \cdot \frac{2 T_0}{\xi} \cdot \sin(\xi x) \right]$$

5,1-6. Pared plana infinita con convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 5,1-6.

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|--|
|  <p>Fig. 5,1-5</p> | $T = T_0; \quad 0 < x < L_x; \quad z \leq 0$ $T = T_1; \quad x = 0; \quad z > 0$ $T = T_2; \quad x = L_x; \quad z > 0$ | $T(x, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[T_1 - (-1)^{2m+1} T_2]}{(2m+1)^2} \left[(1 - \exp[-d \xi^2 z]) + \exp[-d \xi^2 z] \frac{2T_0}{\xi} \right] \sin(\xi x)$ $\xi = \frac{(2m+1)\pi}{L_x}$ |
|  <p>Fig. 5,1-6</p> | $T = T_1; \quad 0 < x < L_x; \quad z \leq 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad x = 0; \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -a_1 T; \quad x = L_x; \quad z > 0$ | $T(x, z) = 2a_1 T_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \exp(-d \xi_i^2 z)}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] \cos(\xi_i L_x)}$ |

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-\xi_i^2 \bar{T}_F(\xi_i, z) = \frac{1}{a} \frac{d\bar{T}_F^c(\xi_i, z)}{dz} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x, z) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a^2) \cos(\xi_i x)}{L_x (\xi_i^2 + a^2) + a_i} \bar{T}_F^c(\xi_i, z) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_i$

Resolviendo la ec. (2) por transformadas de Laplace

$$-a \xi_i^2 f(s) = s f(s) - A$$

$$f(s) = \frac{A}{s - a \xi_i^2} \quad \bar{T}_F^c(\xi_i, z) = A \exp(-a \xi_i^2 z) \quad (4)$$

$$\text{v si } T = T_1 \quad \text{en } z=0 \quad A = \int_0^{L_x} T_1 \cos(\xi_i x) dx = \frac{T_1}{\xi_i} \sin(\xi_i L_x)$$

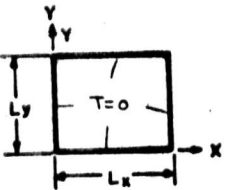
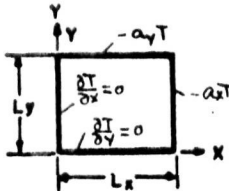
$$\text{v finalmente si } \xi_i^2 + a^2 = \xi_i^2 [1 + \operatorname{tg}^2(\xi_i L_x)]$$

$$T(x, z) = 2 T_1 a_i \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \exp(-a \xi_i^2 z)}{[L_x (\xi_i^2 + a^2) + a_i] \cos(\xi_i L_x)} \quad (5)$$

Ejemplo 5,1-6(a)

Las paredes de un recuperador de calor están formadas por ladrillos de sílice de 40(mm)de espesor. Una de las caras se encuentra aislada mientras que la otra se calienta por gases que están a 900°C con un coeficiente de transmisión de calor de 100 (Kcal/h.m².°C). Si la temperatura inicial de la pared es de 700°C se desea conocer

- Temperaturas en un plano situado a 20 cm de la superficie caliente para 1 hora y 10 horas.
- Flujos térmicos en el plano de a)
- Calor almacenado en la pared

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|---|
|  <p>Fig. 5,2-1</p> | $T = T_1 \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ \tau \leq 0 \end{array}$ $T = 0 \quad \begin{array}{l} x = 0, x = L_x \\ y = 0, y = L_y \\ \tau > 0 \end{array}$ | $T(x, y, \tau) = \frac{8T_1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\eta y)}{(2m+1)(2n+1)} \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)$ $\sigma^2 = \xi^2 + \eta^2; \quad \xi = (2m+1)\frac{\pi}{L_x} \quad \eta = (2n+1)\frac{\pi}{L_y}$ |
|  <p>Fig. 5,2-2</p> | $T = T_1; \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ \tau \leq 0 \end{array}$ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad x = 0; \quad \tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -a_x T; \quad x = L_x; \quad \tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad y = 0; \quad \tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial y} = -a_y T; \quad y = L_y; \quad \tau > 0$ | $T(x, y, \tau) = 4T_1 a_x a_y \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \exp[-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \alpha \tau]}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y] \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_y)}$ <p>ξ_i, raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$ η_j, raíces de $\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = a_y$ $a_x = \frac{h_x}{k} \quad a_y = \frac{h_y}{k}$</p> |

- d) Plantear la solución para el caso de que la pared se caliente por las dos caras con los coeficientes de transmisión de calor de 100 y 50 ($\text{kcal}/\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$)

Solución:

Datos de los ladrillos de sílice

$$\rho = 0,24 \text{ (kcal}/\text{kg } ^\circ\text{C}), k = 1 \text{ (kcal}/\text{h m } ^\circ\text{C}), g = 2000 \text{ (kg}/\text{m}^3), \alpha = \frac{k}{g \rho} = 0,0020 \text{ (m}^2/\text{h})$$

- a) Aplicando la ec. 5.1-6(5) se tiene las raíces ξ_i (Tabla I-3(5), Apéndice I

$$\xi_i L_x \tan(\xi_i L_x) = a_1 L_x \quad a_1 = \frac{h}{k} = 100 \quad L_x = 0,4$$

$$\xi_1 L_x = 1,532, \quad \xi_2 L_x = 4,597, \quad \xi_3 L_x = 7,66, \quad \xi_4 L_x = 10,77, \quad \xi_5 L_x = 13,80$$

$$\text{y para } x = \frac{L_x}{2} = 0,20$$

y tiempos de 1 (h) y 10 (h)

$$T(0,2,1) = 900 - (900 - 700) \cdot 2 \cdot 100 \sum_{i=1}^5 \frac{\cos(0,2 \xi_i) \exp(-2 \cdot 10^{-3} \xi_i^2)}{[0,4(\xi_i^2 + 100^2) + 100] \cos(0,4 \xi_i)} = 708,2$$

$$T(0,2,10) = 769,6^\circ\text{C}$$

$$b) \left(\frac{q}{S} \right)_{(x,z)} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x,z} = 200 \cdot 2 \cdot 100 \cdot k \sum_{i=1}^5 \frac{\xi_i \sin(0,2 \xi_i) \exp(-2 \cdot 10^{-3} \xi_i^2)}{[0,4(\xi_i^2 + 100^2) + 100] \cos(0,4 \xi_i)}$$

Sustituyendo valores para $\tau = 1 \text{ (h)}$ $\tau = 10 \text{ (h)}$

$$\left(\frac{q}{S} \right)_{(0,2,1)} = 350 \text{ (kcal}/\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}) \quad \left(\frac{q}{S} \right)_{(0,2,10)} = 422 \text{ (kcal}/\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$$

$$c) \bar{Q}(\tau) = g \rho V (\bar{T}_\tau - 700)$$

$$\bar{T}_\tau = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} T(x) dx = 900 - \frac{4 \cdot 10^4}{L_x} \sum_{i=1}^5 \frac{\sin(\xi_i L_x) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{\xi_i [L_x (\xi_i^2 + a_1^2) + a_1] \cos(\xi_i L_x)}$$

$$\left(\frac{\bar{Q}}{V} \right)_\tau = g \rho 200 \left(1 - \frac{400}{L_x} \sum_{i=1}^5 \frac{\sin(\xi_i L_x) \exp(-0,002 \xi_i^2 \tau)}{\xi_i [0,4(\xi_i^2 + 100^2) + 100] \cos(\xi_i L_x)} \right)$$

Para tiempos de 1 y 10 horas

$$\left(\frac{\bar{Q}}{V} \right)_1 = 0,23 \cdot 200 \cdot 2000 \cdot 0,24 = 31680 \text{ (kcal}/\text{m}^3), \quad \left(\frac{\bar{Q}}{V} \right)_{10} = 68320 \text{ (kcal}/\text{m}^3)$$

- d) Se aplica el principio de superposición y la temperatura en un punto x al tiempo τ vale $T(x, \tau) = T_1(x, \tau) + T_2(L_x - x, \tau)$ donde $T_1(x, \tau)$ es la distribución de temperaturas calculada en el apartado a) y $T_2(L_x - x, \tau)$ es la distribución de temperaturas considerando a la pared aislada en $x = L_x$ y con coeficiente de transmisión de calor $50 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$ en la cara $x=0$

Ejemplo 5,1-5(b)

Una placa de material metálico de difusividad térmica $0.03 \text{ (m}^2\text{/h)}$ inicialmente a 500°C se introduce alternativamente en un baño de aceite a 80°C y de aire a 20°C . Los coeficientes de transmisión de calor en el aceite y en el aire son de $1000 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$ y $25 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$ y los tiempos de permanencia de la placa en el aire son de 5 minutos y en el baño de aceite de 1 minuto.

Se desea conocer

- Distribución de temperaturas en función del tiempo para un espesor de la placa de 2 cm y conductividad térmica $10 \text{ (Kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$
- Flujos térmicos en el aire y en el aceite
- Gradientes térmicos.
- Calor perdido por la placa si $\rho C_p = 750 \text{ (Kcal/m}^3\text{.}^\circ\text{C)}$

Solución:

- a) Para el baño de aceite la condición en la interfase es $\frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha_x T$ considerando la diferencia $500-80^\circ\text{C}$ y la ec.7,2-4, toma la forma

$$-\alpha \int_0^{L_x} \bar{T}_F^c(\xi, \tau) d\xi = \frac{d\bar{T}_F^c(\xi, \tau)}{d\tau} \quad \text{con la condición } T = 420(^\circ\text{C}) \text{ para } \tau = 0$$

La solución es $\bar{T}_F^c(\xi, \tau) = A_1 \exp(-\alpha \xi^2 \tau)$ donde $A_1 = \int_0^{L_x} 420 \cos(\xi x) dx = \frac{420}{\xi_c} \sin(\xi_c L_x)$

y sustituyendo en la inversión 7,2-4(5)

$$T(x, \tau) = 2.420 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \sin(\xi_i L_x) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] \xi_i} \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (a)$$

6

$$T(x, \tau) = 2.420 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_x \cos(\xi_i x) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] \cos(\xi_i L_x)} \quad (b)$$

al final del tiempo de la placa en el aceite τ_1 la temperatura en un punto x la escribimos simbólicamente

$$\frac{T(x, \tau_1)}{420} = 2 \sum_{(x, \tau_1)}$$

El tiempo de paso de la placa al aire se admite rápido y la distribución de temperaturas en el punto x es una ecuación análoga a (b) con términos η_j y a_{x_2} que puede escribirse

$$\frac{T(x, \tau)}{420} = 2 \sum_{(x, \tau_1)} \cdot 2 \sum_{(x, \tau_2)}$$

y al final del tiempo en el aire τ_2 se tiene

$$T(x, \tau_1 + \tau_2) = 2 \sum_{(x, \tau_1)} \cdot 2 \sum_{(x, \tau_2)}$$

y para $n\tau_1$ tiempo en el aceite y $(n+1)\tau_2$ tiempo en el aire

$$\frac{T(x, n(\tau_1 + \tau_2) + \tau_1)}{480} = (2)^{n+1} \left(\sum_{(x, \tau_1)} \right)^n \left(\sum_{(x, \tau_2)} \right)^{n+1} \quad (c)$$

análogamente para $(n+1)\tau_1$ en el aceite y $n\tau_2$ en el aire

$$T(x, n(\tau_1 + \tau_2) + \tau_1) = (2)^{n+1} \left(\sum_{(x, \tau_1)} \right)^{n+1} \left(\sum_{(x, \tau_2)} \right)^n \quad (d)$$

Sustituyendo valores se tiene para $L_x = 0.01$ y $\alpha_x = \frac{1000}{10} = 100$
las raíces $\xi_i L_x$ (Apéndice I tabla I-3(5))

$$\xi_1 L_x = 0,86 \quad \xi_2 L_x = 3,42 \quad \xi_3 L_x = 6,43 \quad \xi_4 L_x = 9,52 \quad \xi_5 L_x = 12,64$$

En particular para el centro de la placa y $\tau = 1$ minuto

$$2 \sum_{i=1}^5 \frac{100 \exp(-0,03 \xi_i^2/60)}{[0,01(100^2 + \xi_i^2) + 0,01]} \cos(\xi_i L_x) = 2,0,022$$

v para el aire $L_x = 0,01 \quad \alpha_{x2} = \frac{25}{10} = 2,5$

y las raíces η_i

$$\eta_1 L_x = 0,15 \quad \eta_2 L_x = 3,14 \quad \eta_3 L_x = 6,28 \quad \eta_4 L_x = 9,42 \quad \eta_5 L_x = 12,56$$

Para el centro de la placa y $\tau = 5$ minutos

$$2 \sum_{i=1}^5 \frac{2,5 \exp(-0,03 \eta_i^2/12)}{[0,01(2,5^2 + \eta_i^2) + 0,01]} \cos(\eta_i L_x) = 2,0,61$$

A los 6 minutos, 1 minuto en el aceite y 5 minutos en el aire

$$T(0, 7/60) = 480 \cdot 4 \cdot 0,61 \cdot 0,022 = 25,7(^{\circ}\text{C})$$

Añadiendo 20°C de la temperatura base $T = 45,7(^{\circ}\text{C})$

Obsérvese que la placa en el aceite ha bajado de 500°C a 98°C mientras que en el aire ha perdido 53°C en 5 minutos. De acuerdo con los resultados, una aproximación razonable es admitir, que el enfriamiento en el aire es de tipo newtoniano controlado por la resistencia térmica del gas tal como se indica en el apartado 5.1-1 y los valores del ciclo aire.

b)
$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(x,\tau)} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(x,\tau)}$$

Si el tiempo τ corresponde a la placa en el aceite

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(x,\tau)} = 2 \cdot 420 \cdot 10 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_x \xi_i \sin(\xi_i x) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{[L_x (\xi_i^2 + \alpha_x^2) + \alpha_x]} \cos(\xi_i L_x)$$

y para la placa en el aire

$$\left(\frac{q}{s}\right)_{(x,\tau)} = 2.480 \cdot 10 \sum \frac{a_{xj} \eta_j \sin(\eta_j x) \exp(-\alpha \eta_j^2 \tau)}{[L_x (\eta_j^2 + \alpha_{xj}^2) + \alpha_{xj} \cos(\eta_j L_x)]}$$

y con la nomenclatura anterior. para un tiempo τ que incluye $n\tau_1 + n\tau_2 + \tau$

$$\left(\frac{q}{s}\right)_{(x,\tau)} = 420 \cdot 10 \cdot (2)^{n+1} \left(\sum (x\tau_1)\right)^n \left(\sum (x\tau_2)\right)^n \left(\sum (x\tau)\right)$$

asi para $\tau = 5$ segundos en $x = L_x$

$$\frac{q}{s} = 2.420 \cdot 10 \sum_{i=1}^5 \frac{100^2 \exp(-0.03 \xi_i^2 5/3600)}{[0.01(\xi_i^2 + 100^2) + 0.01]} = 3.5 \cdot 10^5 \text{ (Kcal/h m}^2\text{)}$$

y para $\tau = 2$ minutos en

$$\frac{q}{s} = 2.80 \cdot 10 \sum_{i=1}^5 \frac{2.5^2 \exp(-0.03 \eta_j^2 2/60)}{[0.01(\eta_j^2 + 2.5^2) + 0.01]} = 3.3 \cdot 10^3 \text{ (Kcal/h m}^2\text{)}$$

c) Los gradientes térmicos para los casos anteriores son

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(L_x, 5/3600)} = 3.5 \cdot 10^4 \text{ (}^\circ\text{C/h)}$$

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(L_x, 2/60)} = 3.3 \cdot 10^2 \text{ (}^\circ\text{C/h)}$$

d) La temperatura media de la placa en el tiempo τ vale

$$\bar{T}(\tau) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} T(x, \tau) dx$$

Integrando la ec. (b)

$$\bar{T}(\tau) = 2T \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_x^2 \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{[L_x (\xi_i^2 + \alpha_x^2) + \alpha_x] \xi_i L_x}$$

y una ecuación análoga para η_j

$$Q_0 - Q(\tau) = q C_p \bar{T}(\tau) s L_x$$

$$\frac{Q_0 - Q(\tau)}{V} = q C_p (500 - \bar{T}(\tau))$$

El valor de T es de nuevo el correspondiente a las ec. (c) y (d)

$$\frac{Q_0}{V} = 750 \cdot 500 = 3,75 \text{ (Kcal/m}^3\text{)}$$

Así para $\tau = 5 \text{ (s)}$

$$\frac{Q_0 - Q(5/3600)}{V} = 750(500 - 46,8) = 3,02 \cdot 10^5 \text{ (Kcal/m}^3\text{)}$$

Para $\tau = 2 \text{ (minutos)}$

$$\frac{Q_0 - Q(2/60)}{V} = 750(500 - 27,5) = 3,54 \cdot 10^5 \text{ (Kcal/m}^3\text{)}$$

5.2-1. Rectángulo

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 5.2-1.

Aplicando a los términos de la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, \tau)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F^s(\xi, y, \tau)}{\partial \tau} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x, y, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{T}_F^s(\xi, y, \tau) \quad (3)$$

donde $\xi = \frac{\pi m}{L_x}$

Aplicando nuevamente la transformada finita del seno de Fourier a la ec. (2)

$$-(\xi^2 + \eta^2) \bar{T}_F^{ss}(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F^{ss}(\xi, \eta, \tau)}{d\tau} \quad (4)$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^c(\xi, \eta, z) = \frac{2}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\eta y) \bar{f}_F^y(\xi, \eta, z) \quad (5)$$

donde $\eta = \frac{n\pi}{y}$

Resolviendo la ec. (4)

$$\bar{f}_F^{s1}(\xi, \eta, z) = A \exp(-\alpha \sigma^2 z) \quad (6)$$

donde $\sigma^2 = \xi^2 + \eta^2$ y si en $z=0$ $T=T_1$,

$$A = \int_0^{L_y} \frac{1}{T_1} \sin(\eta y) dy = \frac{2 T_1 L_y}{(2n+1)\pi}$$

Por la inversión (5)

$$\bar{f}_F^s(\xi, \eta, z) = \frac{4 T_1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi y/L_y]}{(2n+1)} \exp(-\alpha \sigma^2 z) \quad (7)$$

y por la inversión (3) y teniendo en cuenta $\int_0^{L_x} \frac{1}{T_1} \sin(\xi x) dx =$

$$= \frac{2 T_1 L_x}{(2m+1)\pi} = \frac{2 T_1}{\xi}$$

$$T(x, y, z) = \frac{8 T_1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\eta y)}{(2m+1)(2n+1)} \exp(-\alpha \sigma^2 z) \quad (8)$$

5.2-2. Rectángulo con convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 5,2-2.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{f}_F^c(\xi, \eta, z) + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^c(\xi, \eta, z)}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^c(\xi, \eta, z)}{\partial z} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x, y, z) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{T}_F^c(\xi_i, y, z) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i \tan(\xi_i L_x) = a_x$

Aplicando a la ec. (2) nuevamente la transformada finita del coseno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z)}{dz} \quad (4)$$

con la inversión

$$\bar{T}_F^c(\xi_i, y, z) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + a_y^2) \cos(\eta_j y)}{[L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y]} \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z) \quad (5)$$

donde η_j son las raíces de $\eta_j \tan(\eta_j L_y) = a_y$

Resolviendo (4) resulta

$$\bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z) = A \exp(-\alpha \delta^2 z) \quad (6)$$

donde

$$A = \int_0^{L_y} T_i \cos(\eta_j y) dy = \frac{T_i}{\eta_j} \sin(\eta_j L_y)$$

Por las inversiones (5) y (3) y las relaciones de ξ_i con a_x y η_j con a_y

$$T(x, y, z) = 4 T_i a_x a_y \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \exp[-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \alpha z]}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y] \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_y)} \quad (7)$$

Ejemplo 5,2-2

Una barra de acero especial de sección cuadrada de $0,2 \times 0,2 \text{ (m}^2\text{)}$ y 4 (m) de longitud se calienta a 800°C durante suficiente tiempo para que toda la barra se encuentre a temperatura uniforme. Posteriormente se introduce en un baño de un aceite a 80°C . Si las

propiedades del acero son: $\rho = 7700 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, $C_p = 0,11 \text{ (kcal/kg}^\circ\text{C)}$, $k = 16 \text{ (kcal/h.m}^\circ\text{C)}$
se desea conocer la temperatura en el centro de la barra para un
coeficiente de transmisión de calor de $2000 \text{ (kcal/h.m}^2\text{C)}$ en fun-
ción del tiempo.

Solución:

La barra puede considerarse de longitud infinita y aplicar-
se la ec.5,2-2(7) que puede escribirse $T(x,y,z) = T_\infty F(x,z) \cdot F(y,z)$

Para $L_x = L_y$ y $a_x = a_y$ las raíces $\xi_i = \eta_i$ y la
ecuación toma la forma

$$\frac{T(x,z) - 80}{800 - 80} = 2a_x^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\xi_i x) \exp(-2\xi_i^2 z)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]^2 \cos^2(\xi_i L_x)}$$

Para el centro de la barra $x = 0$ y $L_x = 0,1 \text{ (m)}$

Las raíces de $\xi_i \tanh(\xi_i L_x) = a_x$, $a_x = \frac{h}{k} = \frac{2000}{16} = 125$

$$\begin{array}{llll} \xi_1 L_x = 1,45 & \xi_2 L_x = 4,36 & \xi_3 L_x = 7,30 & \xi_4 L_x = 10,24 \\ \xi_5 L_x = 13,30 & & & \end{array} \quad \text{Tabla I-3(5)}$$

Apéndice I

Para 10 segundos

$$T(0, 1/360) = 80 + 720 \cdot 0,27 = 280^\circ\text{C}$$

Para 20 segundos

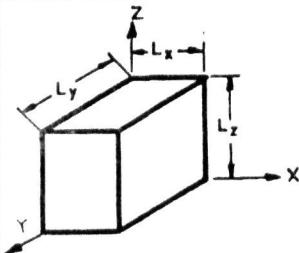
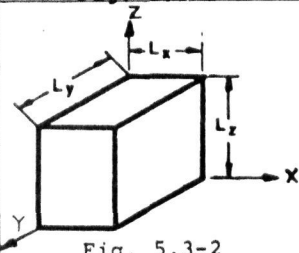
$$T(0, 2/360) = 149^\circ\text{C}$$

Para 60 segundos

$$T(0, 1/60) = 80,5^\circ\text{C}$$

5.3-1. Paralelepípedo

Cumple la ecuación

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|---|
|  <p>Fig. 5,3-1</p> | $T = T_1$ $0 < x < L_x$ $0 < y < L_y$ $0 < z < L_z$ $\tau < 0$ $T = 0$ $x = 0 \quad x = L_x$ $y = 0 \quad y = L_y$ $z = 0 \quad z = L_z$ $\tau > 0$ | $T(x, y, z, \tau) = 64 T_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\xi x) \cdot \text{sen}(\eta y) \cdot \text{sen}(\gamma z)}{\xi \eta \gamma} \exp(-\alpha \mu^2 \tau)$ $\xi = (2m+1) \frac{\pi}{L_x} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y} \quad \gamma = (2p+1) \frac{\pi}{L_z}$ $\mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + \gamma^2$ |
|  <p>Fig. 5,3-2</p> | $T = T_1$; $0 < x < L_x$; $0 < y < L_y$ $0 < z < L_z$, $\tau < 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$; $x = y = z = 0$; $\tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha_x T$; $x = L_x$, $\tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha_y T$; $y = L_y$, $\tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha_z T$; $z = L_z$, $\tau > 0$ | $T(x, y, z, \tau) = 8 T_1 \alpha_x \alpha_y \alpha_z \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \cos(\gamma_m z) \exp(-\alpha \mu^2 \tau)}{[L_x(\xi_i^2 + \alpha_x^2) + \alpha_x] [L_y(\eta_j^2 + \alpha_y^2) + \alpha_y] [L_z(\gamma_m^2 + \alpha_z^2) + \alpha_z]}$ $\xi_i, \eta_j, \gamma_m, \text{ raíces de: } \xi_i \text{tg}(\xi_i L_x) = \alpha_x ; \eta_j \text{tg}(\eta_j L_y) = \alpha_y$ $\alpha_x = \frac{h_x}{k} ; \alpha_y = \frac{h_y}{k} ; \alpha_z = \frac{h_z}{k} ; \gamma_m \text{tg}(\gamma_m L_z) = \alpha_z$ $\mu^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 + \gamma_m^2$ |

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 5,3-1.

Aplicando sucesivamente tres veces la transformada finita del seno de Fourier a la ec. (1) en forma análoga a los apartados anteriores se tienen las ecuaciones

$$-\xi^2 + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^S(\xi, \eta, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^S(\xi, \eta, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^S(\xi, \eta, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (2)$$

$$-(\xi^2 + \eta^2) + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^{S'}(\xi, \eta, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^{S'}(\xi, \eta, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (3)$$

$$-(\xi^2 + \eta^2 + r^2) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^{S''}(\xi, \eta, r, \tau)}{d \tau} \quad (4)$$

donde $\xi = \frac{\pi m}{L_x}$ $\eta = \frac{\pi n}{L_y}$ $r = \frac{\pi p}{L_z}$

con las inversiones correspondientes a las ec. (2), (3), (4)

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{f}_F^S(\xi, \eta, z, \tau) \quad (5)$$

$$\bar{f}_F^S(\xi, \eta, z, \tau) = \frac{2}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\eta y) \bar{f}_F^{S'}(\xi, \eta, z, \tau) \quad (6)$$

$$\bar{f}_F^{S'}(\xi, \eta, z, \tau) = \frac{2}{L_z} \sum_{p=1}^{\infty} \sin(rz) \bar{f}_F^{S''}(\xi, \eta, r, \tau) \quad (7)$$

Resolviendo la ec. (4)

$$\bar{f}_F^{S''}(\xi, \eta, r, \tau) = A \exp(-\alpha \mu^2 \tau) \quad (8)$$

donde $\mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + r^2$

$$A = \int_0^{L_x} T_1 \sin(\xi x) dx = \frac{2 T_1}{\xi}$$

Para m impar

y aplicando nuevamente las transformadas a $\frac{2 T_1}{\xi}$ se tiene

$\frac{8 T_1}{\xi \eta r}$ donde $\xi = \frac{(2m+1)\pi}{L_x}$, $\eta = \frac{(2n+1)\pi}{L_y}$, $r = \frac{(2p+1)\pi}{L_z}$

Sustituyendo valores en las ec. (7), (6) y (5)

$$T(x, y, z, \tau) = 64 T_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi x)}{\xi} \frac{\sin(\eta y)}{\eta} \frac{\sin(rz)}{r} \exp(-\alpha \mu^2 \tau) \quad (9)$$

5.3-2. Paralelepípedo con convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 5,3-2.

Aplicando 3 veces sucesivas la transformada finita del coseno de Fourier a los miembros de la ec. (1)

$$- \xi_i^2 + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (2)$$

$$= (\xi_i^2 + \eta_j^2) + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (3)$$

$$- (\xi_i^2 + \eta_j^2 + r_m^2) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F^{c''}(\xi_i, \eta_j, r_m, \tau)}{d \tau} \quad (4)$$

con las inversiones correspondientes a las ec. (2), (3) y (4)

$$T(x, y, z, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \omega(\xi_i, x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau) \quad (5)$$

$$\bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + a_y^2) \omega(\eta_j, y)}{[L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y]} \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau) \quad (6)$$

$$\bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(r_m^2 + a_z^2) \omega(r_m, z)}{[L_z(r_m^2 + a_z^2) + a_z]} \bar{T}_F^{c''}(\xi_i, \eta_j, r_m, \tau) \quad (7)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i \tan(\xi_i L_x) = a_x$ $a_x = \frac{h_x}{k}$

η_j son las raíces de $\eta_j \tan(\eta_j L_y) = a_y$ $a_y = \frac{h_y}{k}$

r_m son las raíces de $r_m \tan(r_m L_z) = a_z$ $a_z = \frac{h_z}{k}$

Resolviendo (4)

$$\bar{T}_F^{c''}(\xi_i, \eta_j, r_m, \tau) = A \exp(-\alpha \mu^2 \tau), \quad \mu^2 = (\xi_i^2 + \eta_j^2 + r_m^2) \quad (8)$$

$$A = \int_0^{L_x} T_1 \cos(\xi_i x) dx = \frac{T_1}{\xi_i} \sin(\xi_i L_x)$$

Aplicando a T_1 las transformadas respecto a η_j y γ_m y sustituyendo en las ec. (5), (6) y (7)

$$T(x, y, z, \tau) = 8 T_1 a_x a_y a_z \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \cos(\gamma_m z) \exp(-\alpha \mu^2 \tau)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] [L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y] [L_z(\gamma_m^2 + a_z^2) + a_z]} \cdot \frac{1}{\cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_y) \cos(\gamma_m L_z)} \quad (9)$$

Ejemplo 5.3-2

Se desea estudiar la recuperación de calor procedente de gases a $t = 500^\circ\text{C}$ por medio de bloques de ladrillos paralelepípedicos, en operación de ciclo rápido o ciclo lento. Se han elegidos dos materiales 1 y 2 con propiedades $\rho_1 = 2000 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, $C_p = 0,24 \text{ (Kcal/(kg}^\circ\text{C))}$ y $k_1 = 1 \text{ (Kcal/h.m}^\circ\text{C)}$ y para el material 2, $\rho_2 = 1,90 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ $C_p = 0,30 \text{ (Kcal/kg}^\circ\text{C)}$ y $k_2 = 30 \text{ (Kcal/h.m}^\circ\text{C)}$. La temperatura mínima de los ladrillos en toda su masa se fija en 200°C . sus dimensiones son $0,25, 0,12, 0,05 \text{ (m}^3\text{)}$ y el coeficiente de transmisión de calor se estima en $50 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{}^\circ\text{C)}$

Se desea conocer para los dos materiales

- Tiempo necesario para que el centro del ladrillo alcance 490°C
- Calor almacenado por ladrillo al tiempo de a)

Solución:

- Se puede aplicar la ec. 5.3-2(9) directamente teniendo en cuenta que se trata de calentamiento por el medio exterior y el primer término debe tener la expresión

$$\frac{500 - T(x, y, z, \tau)}{500 - 200}$$

El segundo término puede escribirse como producto de 3 series que para ξ_i sería

$$2 a_x \sum \frac{\cos(\xi_i x) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] \cos(\xi_i L_x)} = F_x(x, \tau)$$

y expresiones análogas para η_j y r_m con lo que la ec. general puede escribirse

$$\frac{500 - T(x, y, z)}{300} = F_x(x, z) F_y(y, z) F_z(z, z) \quad (a)$$

La ecuación anterior de acuerdo con las condiciones de la Fig. 5.3-2 se aplica a un cuadrante del ladrillo y en el centro se cumple $x=y=z=0$ y $\cos(\xi_i x) = \cos(\eta_j y) = \cos(r_m z) = 1$

Por los datos del problema y la tabla I-3(5) del Apéndice I se obtienen los valores de las raíces de ξ_i, η_j, r_m .

$$d_1 = 0,002 \text{ (m}^2/\text{h)} \quad d_2 = 0,052 \text{ (m}^2/\text{h)}$$

Material 1)

Material 2)

| | | | | | |
|--------------------|---------------------|------------------|---------------------|----------------------|-------------------|
| $\xi_1 L_x = 1,35$ | $\eta_1 L_y = 1,19$ | $r_1 L_z = 0,92$ | $\xi_1 L_x = 0,43$ | $\eta_1 L_y = 0,31$ | $r_1 L_z = 0,19$ |
| $\xi_2 L_x = 4,13$ | $\eta_2 L_y = 3,80$ | $r_2 L_z = 3,41$ | $\xi_2 L_x = 3,20$ | $\eta_2 L_y = 3,17$ | $r_2 L_z = 3,14$ |
| $\xi_3 L_x = 7$ | $\eta_3 L_y = 6,70$ | $r_3 L_z = 6,42$ | $\xi_3 L_x = 6,31$ | $\eta_3 L_y = 6,29$ | $r_3 L_z = 6,28$ |
| $\xi_4 L_x = 10$ | $\eta_4 L_y = 9,72$ | $r_4 L_z = 9,51$ | $\xi_4 L_x = 9,44$ | $\eta_4 L_y = 9,43$ | $r_4 L_z = 9,42$ |
| $\xi_5 L_x = 13$ | $\eta_5 L_y = 12,8$ | $r_5 L_z = 12,6$ | $\xi_5 L_x = 12,58$ | $\eta_5 L_y = 12,57$ | $r_5 L_z = 12,56$ |

Aplicando la ec. (a) se tiene para el material 1)

Para $\tau = \frac{1}{2} \text{ (h)}$

$$\frac{500 - T(0, \frac{1}{2})}{300} = 0,31 \cdot 0,84 \cdot 1 = 0,26 \quad T(0, \frac{1}{2}) = 422^\circ\text{C}$$

Para $\tau = 1 \text{ (h)}$

$$\frac{500 - T(0, 1)}{300} = 0,92 \cdot 0,56 \cdot 0,07 = 0,036 \quad T(0, 1) = 489,2^\circ\text{C}$$

y para el material 2) y $\tau = 1 \text{ (minutos)}$

$$\frac{500 - T(0, \frac{1}{60})}{300} = 0,17 \cdot 0,48 \cdot 0,85 = 0,069 \quad T(0, \frac{1}{60}) = 480^\circ\text{C}$$

b) En forma aproximada $\left(\frac{Q}{V}\right)_T = \rho C_p \left(\frac{500+T}{2} - 300\right)$

Para el material 1)

$$Q(1 \text{ hora}) = 0,25 \cdot 0,12 \cdot 0,05 \cdot 2000 \cdot 0,24 \cdot 194,6 = 140 \text{ (Kcal/ladrillo)}$$

Para el material 2)

$$Q(1 \text{ minuto}) = 0,25 \cdot 0,12 \cdot 0,05 \cdot 1900 \cdot 0,30 \cdot 190 = 162,4 \text{ (Kcal/ladrillo)}$$

La forma de cálculo exacto es hallar la temperatura media por integración de la ecuación a), es decir

$$\frac{500 - \bar{T}(z)}{300} = \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} F_x(x,z) F_y(y,z) F_z(z,z) dx dy dz$$

y como las variables que intervienen son aquellas de los cosenos la expresión final es sustituir $\cos(\xi_i x)$ por $\frac{1}{L_i} \sin(\xi_i L_i)$ y análogamente para las variables y y z tal como se indica en el ejemplo 5.1-6.

Otros aspectos a considerar en el problema de los recuperadores son los relacionados con el choque térmico que se determina con el conocimiento de las velocidades de calentamiento tal como se ha indicado en el ejemplo 5.1-2.

5.4-1. Cilindro infinito

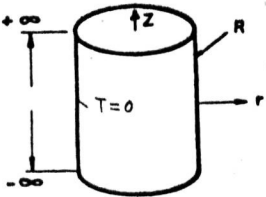
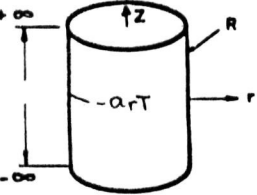
Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 5.4-1.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau)}{d \tau} \quad (2)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|--|--|
|  <p>Fig. 5,4-1</p> | $T = T_1, \quad 0 < r < R, \quad z < 0$ $T = 0 \quad r = R \quad z > 0$ | $T(r, z) = \frac{2T_1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^2 J_1(\xi_i R)} \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |
|  <p>Fig. 5,4-2</p> | $T = T_1, \quad 0 < r < R, \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r = R, \quad z > 0$ $a_r = \frac{hr}{k}$ | $T(r, z) = \frac{2T_1}{R} a_r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R)} \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ <p>ξ_i, raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$</p> |

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i J_1(\xi_i R)} \bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) \quad (3)$$

Resolviendo la ec. (2)

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) = A \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (4)$$

En $\tau=0$

$$A = \int_0^R T_i r J_0(\xi_i r) dr = \frac{R}{\xi_i} T_i J_1(\xi_i R)$$

y sustituyendo en (3)

$$T(r, \tau) = \frac{2 T_i}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i J_1(\xi_i R)} \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (5)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

Ejemplo 5,4-1

Una barra de acero de 3 m de longitud y 0,10(m) de diámetro que se encuentra inicialmente a 20°C se introduce en un baño de sales fundidas que se encuentra a 400°C. Las propiedades del acero son $C_p = 0,11 \text{ (Kcal/kg}^\circ\text{C)}$ $\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ $k = 20 \text{ (Kcal/h.m}^\circ\text{C)}$. Se desea conocer la temperatura en el centro en función del tiempo.

Solución:

Una aproximación razonable es despreciar el efecto de los extremos y considerar la barra con longitud infinita. Los baños de sales fundidas tienen en general un elevado coeficiente de transmisión de calor y puede admitirse que la superficie de la barra tiene en todo momento la temperatura del baño. Con las condiciones anteriores se aplica la ec. 5,4-1(5) modificada en la forma

$$\frac{400 - T(r, \tau)}{400 - 20} = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i J_1(\xi_i R)} \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)$$

en $r = 0$ $J(\xi_i r) = 1$

Las raíces de $J_0(0,05 \xi_i)$ tabla I-3(3) Apéndice I son

$$\xi_1 R = 2,404 \quad \xi_2 R = 5,52 \quad \xi_3 R = 8,65 \quad \xi_4 R = 11,79$$

y

$$T(0, \tau) = 400 - \frac{2,380}{R} \sum_{i=1}^4 \frac{\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{R \xi_i J_1(\xi_i R)}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{20}{0,11 \cdot 7800} = 0,023 \text{ (m}^2/\text{s)}$$

sustituyendo valores se tiene

$$T(0, \tau) = 400 - 1,52 \cdot 10^4 \left[\frac{\exp(-0,023 \cdot 48^2 \tau)}{2,404 \cdot 0,521} - \frac{\exp(-0,023 \cdot 110^2 \tau)}{5,52 \cdot 0,338} + \dots \right]$$

$$\approx 400 - 1,21 \cdot 10^4 \exp(-53 \tau)$$

Así para valores de τ de 4, 5 y 6 minutos, $T(4/60) = 46^\circ\text{C}$,
 $T(5/60) = 253^\circ\text{C}$ $T(6/60) = 339^\circ\text{C}$.

5,4-2. Cilindro infinito con convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 5,4-2.

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{F}_{n,0}(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{F}_{n,0}(\xi_i, \tau)}{d \tau} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + \alpha^2) J_0^2(\xi_i R)} \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\alpha r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Resolviendo la ec. (2)

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) = A \exp(-d \xi_i^2 \tau) \quad (4)$$

$$A = \int_0^R T_{i,r} J_0(\xi_i r) dr = T_{i,R} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

Sustituyendo valores en (3)

$$T(r, \tau) = \frac{2 T_{i,R} a_r}{R} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \exp(-d \xi_i^2 \tau)}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R)} \quad (5)$$

Ejemplo 5,4-2(a)

La barra de acero del ejemplo 5,4-1 inicialmente a 20°C se coloca en un medio cuya temperatura es de 400°C y con un coeficiente de transmisión de calor barra-medio de 100 (Kcal/h.m².°C). Se desea conocer:

- Temperatura en el centro de la barra en función del tiempo
- Velocidad de calentamiento
- Gradientes térmicos
- Calor almacenado en la barra

Solución:

- a) Por un razonamiento análogo al caso del ejemplo 5,4-1 se aplica la ec. 5,4-2(5), con $a_r = \frac{h}{k} = \frac{100}{20} = 5$ y las raíces ξ_i por la tabla I-3(4), Apéndice I con

$$\xi_1 R = 0,64 \quad \xi_2 R = 3,88 \quad \xi_3 R = 7,04 \quad \xi_4 R = 10,19 \quad \xi_5 R = 13,33$$

y

$$T(0, \tau) = 400 - \frac{380 \cdot 10 \cdot 2}{0,05} \sum \frac{\exp(-d \xi_i^2 \tau)}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R)}$$

y dando valores a τ de 4, 5 y 6 minutos para comparar resultados con el ejemplo 5,4-1

$$T(0, 4/60) \approx 20(^{\circ}\text{C}) \quad T(0, 5/60) = 20(^{\circ}\text{C}) \quad T(0, 1/10) = 20(^{\circ}\text{C})$$

Para 20 , 40 y 60 minutos

$$T(0, 1/3) = 143(^{\circ}\text{C}) \quad T(0, 2/3) = 326^{\circ}\text{C} \quad T(0, 1) = 379(^{\circ}\text{C})$$

b) La velocidad de calentamiento vale

$$\left(\frac{\partial T(r)}{\partial \tau}\right) = \alpha \xi_i^2 \frac{2 \cdot 380 \cdot 10}{0,05} \sum_{i=1}^5 \frac{J_0(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{(\xi_i^2 + \alpha r^2) J_0(\xi_i R)}$$

El valor máximo de $J_0(\xi_i r)$ corresponde a $r = 0$ y si el término exponencial aumenta más que la función $J_0(\xi_i r)$

$$\left(\frac{\partial T(0)}{\partial \tau}\right)_{\max} \approx \alpha \xi_i^2 \cdot 528 = 1928 (^{\circ}\text{C}/\text{h})$$

c) Los gradientes térmicos se obtienen por la ecuación

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{2 \cdot 380 \cdot 10}{0,05} \sum_{i=1}^5 \frac{\xi_i J_1(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{(\xi_i^2 + \alpha r^2) J_0(\xi_i R)}$$

Considerando la primera raíz de la serie como la de mayor contribución al resultado, el valor máximo positivo de $J_1(\xi_i r)$ se tiene en $r=R$ y por el término exponencial en $\tau \rightarrow 0$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(R,0)} = 3434 (^{\circ}\text{C}/\text{h})$$

d) La temperatura media en la barra en el tiempo τ vale

$$\bar{T}(\tau) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r T(r, \tau) dr$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R r J_0(\xi_i r) dr = \frac{2}{\xi_i R} J_1(\xi_i R)$$

$$Q(\tau) = V \rho C_p \left[400 - \frac{4 \cdot 380 \cdot 10}{0,05^2} \sum_{i=1}^5 \frac{J_1(\xi_i R) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{\xi_i (\xi_i^2 + \alpha R^2) J_0(\xi_i R)} \right]$$

Para los tiempos anteriores de 20 , 40 y 60 minutos

$$\left(\frac{Q}{V}\right)_{(\tau=1/6)} = 1,78 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{m}^3}\right); \left(\frac{Q}{V}\right)_{(\tau=2/3)} = 3,17 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{m}^3}\right); \left(\frac{Q}{V}\right)_{(\tau=1)} = 3,2 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{m}^3}\right)$$

El valor máximo de calor acumulado vale $380 \text{ g } C_p = 3,26 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{m}^3}\right)$

Ejemplo 5.4-2(b)

Una barra cilíndrica de 10 cm de diámetro y propiedades $C_p = 0,08 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{kg } ^\circ\text{C}}\right); \rho = 6,5 \left(\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right); k = 5 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m } ^\circ\text{C}}\right)$ inicialmente a 300°C se introduce alternativamente en un baño de agua a 50°C y al aire a 20°C , con tiempos de 1 minuto en el agua y 5 minutos en el aire. Si los coeficientes de transmisión de calor para el agua y el aire son de $1000 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 ^\circ\text{C}}\right)$ y $35 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2 ^\circ\text{C}}\right)$ se de sea conocer:

- Temperatura en el centro de la barra en función del tiempo.
- Flujos y gradientes térmicos.
- Calor perdido por la barra.

Solución:

- Procediendo como en el ejemplo 5,1-6(b) se tiene

$$T(r, n(\tau_1 + \tau_2) + \tau_2) = 250 \cdot \left(\frac{2}{R}\right)^{n+1} \cdot \left(\sum_{(r, \tau_1)}\right)^n \left(\sum_{(r, \tau_2)}\right)^{n+1}$$

para el final de un tiempo τ_2 en el agua con tiempos anteriores $n(\tau_1 + \tau_2)$

$$T(r, n(\tau_1 + \tau_2) + \tau_1) = 280 \left(\frac{2}{R}\right)^{n+1} \left(\sum_{(r, \tau_1)}\right)^{n+1} \left(\sum_{(r, \tau_2)}\right)^n$$

para el final de un tiempo τ_1 en el aire con tiempos anteriores $n(\tau_1 + \tau_2)$

Así, por ejemplo a los 14 minutos la barra ha permanecido

en el aire desde el minuto 12 y la distribución de temperaturas es

$$T(r, 2(1+5)+2) = 20 + 280 \left(\frac{2}{R}\right)^5 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \dots\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \dots\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dots\right)$$

Para el agua $\alpha_{r_2} = \frac{h}{k} = \frac{1000}{5} = 200$

Para el aire $\alpha_{r_1} = \frac{35}{5} = 7$

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} = \frac{5}{0.08 \cdot 6500} = 0,0096$$

Las raíces ξ_i y η_j para $\alpha_{r_2} R = 10$ y $\alpha_{r_1} R = 0,35$
 Apéndice I, tabla I-3(4)

| | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| $\xi_1 R = 2,17$ | $\xi_2 R = 5,03$ | $\xi_3 R = 7,95$ | $\xi_4 R = 10,93$ |
| $\eta_1 R = 0,79$ | $\eta_2 R = 3,91$ | $\eta_3 R = 7,06$ | $\eta_4 R = 10,19$ |

Sustituyendo valores para $r=0$ $J_0(\xi_i r) = 1$

$$T(0, 14/60) = 20 + 280 \cdot 0,64 \cdot 0,044 \cdot 0,97 = 27,6^\circ \text{C}$$

b) Los flujos térmicos para un tiempo total τ y posición

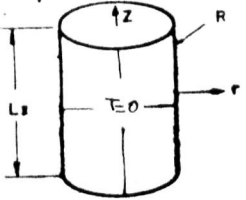
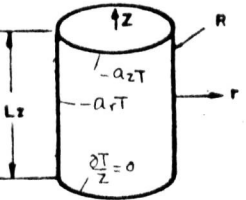
$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(r, \tau)} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r, \tau)}$$

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores para $\tau = 14$ minutos

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(r, 14/60)} = k \cdot 280 \cdot 0,64 \cdot 0,044 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{R} \frac{\eta_j \alpha_{r_1} J_1(\eta_j r)}{(\eta_j^2 + \alpha_{r_1}^2) J_0(\eta_j R)} \exp(-\alpha \eta_j^2 \tau / 60)$$

y en $r=R$

$$\left(\frac{q}{S}\right) = 1,39 \cdot 10^3 \text{ (kcal/h.m}^2\text{)}$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 5,5-1</p> | $T = T_1 ; \quad 0 < z < L_z ; \quad z < 0$ $T = 0 \quad r = R \quad z > 0$ $T = 0 \quad z = 0 \quad z > 0$ $T = 0 \quad z = L_z \quad z > 0$ | $T(r, z, \tau) = \frac{8 T_1}{\pi R} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \sin[(2p+1)\pi z/L_z]}{\xi_i (2p+1) J_1(\xi_i R)} \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> $\sigma^2 = \xi_i^2 + [(2p+1)\frac{\pi}{L_z}]^2$ |
|  <p>Fig. 5,5-2</p> | $T = T_1 ; \quad 0 < z < L_z \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T ; \quad r = R, \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = -a_z T ; \quad z = L_z \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad z > 0$ $a_r = \frac{h_r}{k} \quad a_z = \frac{h_z}{k}$ | $T(r, z, \tau) = \frac{4 T_1 a_r a_z}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \cos(\eta_j z) \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R) [L_z (\eta_j^2 + a_z^2) + a_z] \cos(\eta_j L_z)}$ <p>ξ_i y η_j, raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R) ; \eta_j \tan(\eta_j L_z) = a_z$</p> $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$ |

Los gradientes térmicos son $-\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r,z}$ y para 14 minutos
y $r=R$

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(0,14/60)} = 278 \text{ (}^\circ\text{C/m)}$$

c) La temperatura media en el tiempo τ

$$\bar{T}(\tau) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r T(r) dr = 20 + 280 \cdot 0,64 \cdot 0,044 \left(\frac{2}{R}\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j J_1(\eta_j r) \exp(-\alpha \eta_j^2 \tau)}{\eta_j (\eta_j^2 + a_{j1}^2) J_0(\eta_j R)}$$

y

$$\frac{Q_0(\tau) - Q(\tau)}{L} = \pi R^2 g_p [300 - T(\tau)]$$

Para $\tau = 14$ minutos

$$\bar{T}(\tau) \simeq 20^\circ\text{C}$$

$$\frac{Q_0(\tau) - Q(\tau)}{L} = \pi (0,05)^2 \cdot 6500 \cdot 0,028 \cdot 280 = 400 \text{ (Kcal/m)}$$

5.5-1. Cilindro finito

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 5,5-1 aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, z, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R)} \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

Aplicando a la Ec.(2) la transformada finita del seno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta^2) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^s}{\partial \tau}(\xi_i, \eta, \tau) \quad (4)$$

con la inversión

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) = \frac{2}{L_z} \sum_{p=1}^{\infty} \sin(\eta z) \bar{f}_F^s(\xi_i, \eta, \tau) \quad (5)$$

donde $\eta = \frac{p\pi}{L_z}$

Resolviendo (4)

$$\bar{f}_F^s(\xi_i, \eta, \tau) = A \exp(-\alpha \sigma^2 \tau) \quad (6)$$

$$A = \int_0^{L_z} T_i \sin\left(p \frac{\pi z}{L_z}\right) dz = \frac{2 T_i L_z}{\pi(2p+1)}$$

y la transformada de Hankel de T_i

$$\int_0^R T_i r J_0(\xi_i r) dr = \frac{R}{\xi_i} T_i J_1(\xi_i R)$$

Sustituyendo en las inversiones (5) y (3)

$$T(\eta, z, \tau) = \frac{8 T_i}{R \pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \sin[(2p+1)\pi z/L_z]}{\xi_i (2p+1) J_1(\xi_i R)} \exp(-\alpha \sigma^2 \tau) \quad (7)$$

donde $\sigma^2 = \xi_i^2 + \left((2p+1) \frac{\pi}{L_z}\right)^2$

5.5-2. Cilindro finito con convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Con las condiciones que se indican en la Fig. 5,5-2.

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, z, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i R) \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau)}{(\xi_i^2 + a_z^2) J_0^2(\xi_i R)} \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Aplicando a (2) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) = \frac{1}{a} \frac{d \bar{f}_{H,0}}{dz}(\xi_i, \eta_j, \tau) \quad (4)$$

con la inversión

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + a_z^2) \cos(\eta_j z)}{L_z(\eta_j^2 + a_z^2) + a_z} \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) \quad (5)$$

donde η_j son las raíces de $\eta_j \tanh(\eta_j L_z) = a_z$

Resolviendo la ec. (4)

$$\bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) = A \exp(-\alpha \sigma^2 \tau) \quad (6)$$

con

$$A = \int_0^{L_z} T_1 \cos(\eta_j z) dz = \frac{T_1}{\eta_j} \sin(\eta_j L_z)$$

y por la transformada de Hankel de T_1

$$A_1 = \int_0^R A r J_0(\xi_i r) dr = \frac{T_1 R a_r}{\xi_i \eta_j} J_0(\xi_i R) \sin(\eta_j L_z)$$

Sustituyendo en las inversiones (5) y (6)

$$T(r, z, \tau) = \frac{4 T_1 a_r a_z}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \cos(\eta_j z) \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R) [L_z(\eta_j^2 + a_z^2) + a_z] \cos(\eta_j L_z)} \quad (7)$$

donde $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$

Ejemplo 5, 5-2

En una instalación de productos alimentarios se desea enfriar

lo más rápidamente posible recipientes cilíndricos de 8 cm de diámetro por 12 cm de altura y 0,1 mm de espesor de chapa metálica tratada convenientemente llenos de un producto gelatinoso que prácticamente tiene las mismas propiedades térmicas que el agua. La temperatura del recipiente y su contenido es de 90°C, y se desea enfriar a 15°C en una corriente de gas en atmósfera controlada que tiene una temperatura de -10°C y con un coeficiente de transmisión de calor de 25 (kcal/h.m².°C). Se desea conocer el tiempo que tardará el centro del recipiente en alcanzar 15°C.

Solución:

La resistencia térmica del recipiente se supone despreciable y las propiedades térmicas del producto se admiten de valor constante

$$C_p = 1 \text{ (kcal/kg.°C)} \quad k = 0,57 \text{ (kcal/h.m.°C)} \quad \rho = 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)} \quad \alpha = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ (m}^2\text{/h)}$$

aplicando la ecuación 5,5-7(7) expresada en forma de productos de series se tiene

$$\frac{T(r,z,t) - 10}{90 - 10} = F_r(r,z) \cdot F_z(z,t)$$

donde

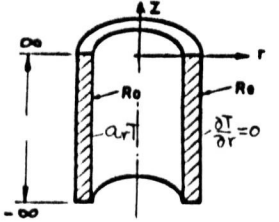
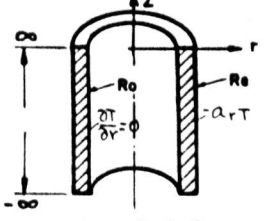
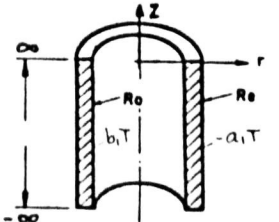
$$F_r(r,z) = \frac{4Q_r}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 z)}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R)} \quad F_z(z,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_z \cos(\eta_j z) \exp(-\alpha \eta_j^2 t)}{[L_z(\eta_j^2 + a_z^2) + a_z^2] \cos(\eta_j L_z)}$$

En el centro de recipiente

$$J_0(\xi_i r) = 1 \quad \cos(\eta_j z) = 1$$

Las raíces ξ_i y η_j para $a_r = a_z = 25/0,57 = 43,8$ $a_r R = 0,04 \cdot 43,8 = 1,75$
y $L_z a = 0,06 \cdot 43,8 = 2,62$ y por las tablas I-3(4) y I-3(5)

| | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| $\xi_1 R = 0,46$ | $\xi_2 R = 4,20$ | $\xi_3 R = 7,22$ | $\xi_4 R = 10,27$ | $\xi_5 R = 13,4$ |
| $\eta_1 L_z = 1,08$ | $\eta_2 L_z = 3,70$ | $\eta_3 L_z = 6,60$ | $\eta_4 L_z = 9,65$ | $\eta_5 L_z = 12,75$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|---|
|  <p>Fig. 5,6-1</p> | $T = T_1 \quad R_0 < r < R_e, \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_e \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_r T \quad r = R_0 \quad z > 0$ $a_r = \frac{h_o}{k}$ | $T(r, z) = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_r J_0(\xi_i R_0)]^2 C_0(\xi_i r) A}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_r J_0(\xi_i R_0)]^2 - (a_r^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R_0)} \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ $A = \int_{R_0}^{R_e} T_1 r [J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i R_e) - J_0'(\xi_i R_e) Y_0(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_e} T_1 r C_0(\xi_i r) dr$ $\xi_i, \text{ raíces de}$ $[\xi_i Y_0(\xi_i R_0) + a_r Y_0(\xi_i R_0)] J_0'(\xi_i R_e) = Y_0'(\xi_i R_e) [\xi_i J_0(\xi_i R_0) + a_r J_0(\xi_i R_0)]$ |
|  <p>Fig. 5,6-2</p> | $T = T_1 \quad R_0 < r < R_e, \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_0 \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r = R_e \quad z > 0$ $a_r = \frac{h_e}{k}$ | $T(r, z) = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_r J_0(\xi_i R_0)]^2 C_0(\xi_i r) A}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_r J_0(\xi_i R_0)]^2 + (a_r^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R_0)} \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ $\xi_i, A, \gamma C_0(\xi_i r) \text{ de 5,6-1}$ |
|  <p>Fig. 5,6-3</p> | $T = T_1 \quad R_0 < r < R_e$ $\frac{\partial T}{\partial r} = b_1 T \quad r = R_0, \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad r = R_e, \quad z > 0$ $b_1 = \frac{h_o}{k} \quad a_1 = \frac{h_e}{k}$ | $T(r, z) = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + b_1 J_0(\xi_i R_e)]^2 C_0(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 z)}{[b_1^2 + \xi_i^2] [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + b_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 - (a_1^2 + \xi_i^2) [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_1 J_0(\xi_i R_e)]^2}$ $A = \int_{R_0}^{R_e} T_1 r C_0(\xi_i r) dr = \int_{R_0}^{R_e} T_1 r [J_0(\xi_i r) \{ \xi_i Y_0'(\xi_i R_0) - b_1 Y_0(\xi_i R_0) - Y_0(\xi_i r) [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) - b_1 J_0(\xi_i R_e)] \}] dr ; \xi_i, \text{ raíces de}$ $[\xi_i Y_0'(\xi_i R_0) - b_1 Y_0(\xi_i R_0)] [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_1 J_0(\xi_i R_e)] = [\xi_i Y_0'(\xi_i R_e) + a_1 Y_0(\xi_i R_e)] \cdot [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) - b_1 J_0(\xi_i R_0)]$ |

Aplicando la ecuación anterior se tiene para 1,5 (h)

$$T(0,0,1,5) = 100.0,8.0,28-10 = 12,4 \text{ (}^{\circ}\text{C)}$$

5,6-1. Tubo infinito con convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 5,6-1.

Aplicando a la ec.(1) la transformada de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i; \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{f}_{H,0}(\xi_i; \tau)}{d\tau} \quad (2)$$

con la inversión del Apéndice I-3,3, ecuación 44, donde ξ_i son las raíces positivas de

$$[\xi_i Y_0'(\xi_i R_0) + \alpha_r Y_0(\xi_i R_0)] J_0'(\xi_i R_e) = [\xi_i J_0(\xi_i R_0) + \alpha_r J_0(\xi_i R_0)] Y_0'(\xi_i R_e)$$

Resolviendo la ec.(2)

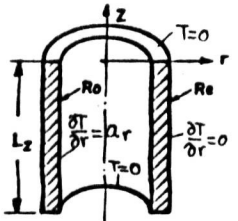
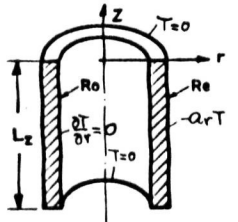
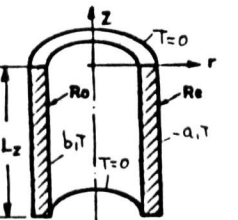
$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i; \tau) = A \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (3)$$

en $\tau=0$

$$A = \int_{R_0}^{R_e} T_1 r [J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i R_e) - J_0'(\xi_i R_e) Y_0(\xi_i r)] dr \\ = T_1 \left[J_1(\xi_i R_e) \left(\frac{r}{\xi_i} Y_1(\xi_i r) + \frac{2r^2}{\xi_i^2} \right) - Y_1(\xi_i R_e) \left(\frac{r}{\xi_i} J_1(\xi_i r) \right) \right]_{R_0}^{R_e}$$

Sustituyendo los valores de A y $\bar{f}_{H,0}(\xi_i; \tau)$ en la inversión se obtiene la ecuación que se indica en la Fig. 5,6-1.

Procediendo en forma análoga se obtienen las soluciones que se indican en las figuras 5,6-2 y 5,6-3.

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 5.7-1</p> | $T = T_1; \quad R_0 < r < R_e; \quad 0 < z < L_z; \quad z < 0$ $T = 0; \quad z = 0; \quad z = L_z; \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_e \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_0 \quad z > 0$ $a_r = \frac{h_o}{k}$ | $T(r, z, \tau) = [\text{Ecuación 5,6-1, sin exponencial}] \cdot \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta z)}{(2m+1)} \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)$ $\eta = (2m+1) \frac{\pi}{L_z}$ $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta^2$ |
|  <p>Fig. 5.7-2</p> | $T = T_1; \quad R_0 < r < R_e; \quad 0 < z < L_z; \quad z < 0$ $T = 0; \quad z = 0; \quad z = L_z; \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_0 \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r = R_e \quad z > 0$ $a_r = \frac{h_e}{k}$ | $T(r, z, \tau) = [\text{Ecuación 5,6-2 sin exponencial}] \cdot \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta z)}{(2m+1)} \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)$ $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta^2 \quad \eta = (2m+1) \frac{\pi}{L_z}$ |
|  <p>Fig. 5.7-3</p> | $T = T_1; \quad R_0 < r < R_e; \quad 0 < z < L_z; \quad z < 0$ $T = 0; \quad z = 0; \quad z = L_z; \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad r = R_e \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = b_1 T \quad r = R_0 \quad z > 0$ $a_1 = \frac{h_e}{k} \quad b_1 = \frac{h_o}{k}$ | $T(r, z, \tau) = [\text{Ecuación 5,6-3 sin exponencial}] \cdot \frac{4T_1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta z)}{(2m+1)} \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)$ $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta^2$ $\eta = (2m+1) \frac{\pi}{L_z}$ |

5.7-1. Tubo finito con convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau)}{\partial \tau} \quad (2)$$

Con las condiciones indicadas en la Fig. 5,7-1.

Con la inversión y valores de $C_0(\xi_i r)$, ξ_i dados en el apartado 5,6-1. Aplicando a la ec. (2) la transformada finita del seno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta^2) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^s(\xi_i, \eta, \tau)}{d \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \eta, \tau) = \frac{2}{L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\eta z) \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \eta, \tau) \quad (4)$$

Resolviendo la ec. (3)

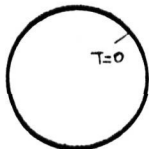
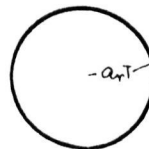
$$\bar{f}_F^s(\xi_i, \eta, \tau) = A_1 \exp(-\alpha \sigma^2 \tau) \quad (5)$$

$$A_1 = T_1 \int_{R_0}^{R_L} \int_0^{L_z} r C_0(\xi_i r) \sin(\xi x) dr dx = \frac{2 T_1 L_z A}{(2m+1)\pi}$$

donde el valor A es el obtenido en el párrafo 5,6-1.

Sustituyendo los valores de A_1 y \bar{f}_F^s en la inversión (4) y en la inversión del Apartado 5,6-1

$$T(r, z, \tau) = \text{ec. 5,6-1, sin término exponencial. } \frac{4 T_1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\frac{\pi z}{L_z}]}{(2m+1)} \cdot \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|---|
|  <p>Fig. 5,8-1</p> | $T=T_1 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T=0 \quad r=R \quad z > 0$ | $T(r,z) = \frac{2RT_1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m r} \cdot \sin\left(\frac{m\pi r}{R}\right) \cdot \exp\left(-\alpha\left(\frac{m\pi}{R}\right)^2 z\right)$ |
|  <p>Fig. 5,8-2</p> | $T=T_1 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r=R \quad z > 0$ $a_r = \frac{h}{k}$ | $T(r,z) = 2a_r T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[(a_r R - 1)^2 + \xi_i^2 R^2]}{\xi_i^2 [\xi_i^2 R^2 + (a_r R - 1)]} \sin(\xi_i r) \sin(\xi_i R) \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ <p>ξ_i, raíces de $\xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) + a_r R - 1 = 0$</p> |

En forma análoga se resuelven los casos 5,7-1(a) y 5,7-1(b).

5.8-1. Esfera

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 5.8-1.

La ecuación (1) puede escribirse

$$\frac{\partial}{\partial r^2} (r T(r)) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (2) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{T}_F^s(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F^s(\xi, \tau)}{d \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r) = \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi r)}{r} \bar{T}_F^s(\xi, \tau) \quad (4)$$

Resolviendo la ec. (3)

$$\bar{T}_F^s(\xi, \tau) = A \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \quad (5)$$

donde

$$A = \int_0^R T_1 r \sin(\xi r) dr = \frac{T_1 R (-1)^m}{\xi}$$

y si

$$\xi = \frac{\pi m}{R} \quad A = (-1)^m \frac{T_1 R^2}{\pi m}$$

y finalmente

$$T(r, \tau) = \frac{2 R T_1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m r} \cdot \sin\left(\frac{m \pi r}{R}\right) \exp\left[-\alpha \left(\frac{m \pi}{R}\right)^2 \tau\right] \quad (6)$$

Ejemplo 5,8-1

Una esfera de acero de 2 cm de diámetro que se encuentra a 800°C se deja caer en un recipiente con gran cantidad de agua a 20°C. Si las propiedades del acero son $k = 25 \text{ (Kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$, $\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, $c_p = 0,41 \text{ (Kcal/kg.}^\circ\text{C)}$ se desea conocer la temperatura en el centro de la esfera en función del tiempo.

Solución:

El coeficiente de transmisión de calor superficie de la esfera-agua es elevado y puede admitirse que la temperatura de la superficie es la temperatura del agua aplicándose la ecuación 5,8-1 (6).

Hallando el límite de la serie cuando $r \rightarrow 0$ aplicando la regla de L'Hospital, se tiene la temperatura en el centro

$$T(0, \tau) = 2T_1 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \exp\left[-\alpha \left(\frac{\pi m}{R}\right)^2 \tau\right]$$

$$\alpha = 0,029$$

y

$$\frac{T(0, \tau) - 20}{800 - 20} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \exp(-2862 \tau \cdot m^2)$$

Dando valores se tiene para 1(s), 2(s), 5(s), 10(s)

$$T(0, 1/3600) = 638^\circ\text{C}$$

$$T(0, 2/3600) = 319^\circ\text{C}$$

$$T(0, 5/3600) = 49^\circ\text{C}$$

$$T(0, 1/360) = 20^\circ\text{C}$$

5.8-2. Esfera con convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r T(r)) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 5,8-2.

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita del seno de Fourier y teniendo en cuenta las transformaciones desarrolladas en el apartado 4,8-3 resulta la ecuación

$$-\xi_i^2 \bar{T}_F^s(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_F^s(\xi_i, \tau)}{d\tau} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[R^2 \xi_i^2 + (a_r R - 1)^2] \sin(\xi_i r)}{r [R^2 \xi_i^2 + a_r R (a_r R - 1)]} \bar{T}_F^s(\xi_i, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) + a_r R - 1 = 0$

Resolviendo la ec.(2) se tiene

$$\bar{T}_F^s(\xi_i, \tau) = A \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)$$

con

$$A = T_1 \int_0^R r \sin(\xi_i r) dr = \frac{T_1 a_r R}{\xi_i^2} \sin(\xi_i R)$$

y sustituyendo en la inversión (3)

$$T(r, \tau) = 2 a_r T_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[R^2 \xi_i^2 + (a_r R - 1)^2] \sin(\xi_i r) \sin(\xi_i R) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{r \xi_i^2 [R^2 \xi_i^2 + a_r R (a_r R - 1)]} \quad (4)$$

Ejemplo 5,8-2

Una esfera de material cerámico de 4 cm de diámetro y propiedades $k = 5$ (Kcal/h.m.°C), $C_p = 0,24$ (Kcal/kg.°C), $\rho = 3800$ (kg/m³) se utiliza como material de un recuperador de calor que funciona entre 700-500°C de temperaturas máxima y mínima. El coeficiente de transmisión de calor es de 75 (Kcal/h.m².°C) se desea conocer:

- Tiempo necesario para que la temperatura en el centro de la esfera alcance en el periodo de calentamiento 525°C .
- Velocidad de calentamiento.
- Gradientes térmicos
- Calor almacenado.

Solución:

Se aplica la ec. 5,8-2(4) ; $\alpha = 0,0054$ $a_r = 15$ $a_r R = -0,7$

Las raíces ξ_i tabla I-3(8) Apéndice I

$$\xi_1 R = 0,92 \quad \xi_2 R = 4,56 \quad \xi_3 R = 7,76 \quad \xi_4 R = 10,93 \quad \xi_5 R = 14,07$$

para aplicar la ecuación anterior a $r = 0$ hay que hallar su límite

$$\frac{T(0, \tau) - T_{\infty}}{T_{\infty} - T_i} = 2 a_r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i^2 R^2 + (a_r R - 1)^2] \sin(\xi_i R)}{\xi_i [\xi_i^2 R^2 + a_r R (a_r R - 1)]} \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (a)$$

dando valores hasta alcanzar $T(0, \tau) = 525^{\circ}\text{C}$ se tiene $\tau \approx 1$ minuto.

b) la velocidad de calentamiento vale $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)$ y la ecuación es

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 400,15 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha [\xi_i^2 R^2 + (a_r R - 1)^2] \sin(\xi_i r) \sin(\xi_i R) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{[\xi_i^2 R^2 + a_r R (a_r R - 1)] r}$$

análogamente al caso a) para $r = 0$ se halla el límite y así para 1 minuto

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_{(0, 1/60)} = 2023 (^{\circ}\text{C}/\text{h})$$

c) Los gradientes térmicos valen $-\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r, \tau)}$

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(r, \tau)} = 400,15 \left(\sum \text{ec. (a)} \right) \left[\frac{\xi_i \cos(\xi_i r)}{r} - \frac{\sin(\xi_i r)}{r^2} \right]$$

asi en $r=R$ y $\tau \approx 0$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{(R,0)} = 2.793 \text{ (}^\circ\text{C/m)}$$

d) La temperatura media en la esfera para un tiempo τ

$$\bar{T}(\tau) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R 4\pi r^2 T(r,\tau) dr$$

y si $\int_0^R r \sin(\xi_i r) dr = \frac{a_r R}{\xi_i^2} \sin(\xi_i R)$

$$Q(\tau) = \rho C_p V \frac{400 a_r^2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i^2 R^2 + (a_r R - 1)^2] \sin^2(\xi_i R) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{\xi_i^4 [\xi_i^2 R^2 + a_r R(a_r R - 1)]}$$

y para $\tau = 1$ minuto

$$Q(\tau) = 6.0 \text{ (kcal/esfera)}$$

Bibliografía

- ARPACI, V.S., Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, Publ.Co. London (1966).
- CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C., Conduction of Heat in Solids 2nd Ed., Oxford at the Clarendon Press, London (1959).
- CROSBY, A.L. and VISKANTA, R., A simplified Method for solving Transient Heat Conduction Problems with non linear Boundary Conditions. J.Heat Transfer Trans. ASME, 90 C, 358 (1960).
- CORDIER, Transfer de la Chaleur par conductibilité Problemes transitoires Centre de Documentation Universitaire, Paris (1961).
- COBBLE, M.H. Non linear Heat Transfer of Solids in orthogonal Coordinate Systems, Int.J.Non Linear Mech. 2, 417-26 (1967).
- GROBER, E., GRIGULL, V., Grundgesetze der Wärme Übertragung,

- Springer Verlag, Berlin, Gottingen (1955).
- HAYS, D.F. and CURD, N.D., Heat Conduction in Solids Temperature Dependent Thermal Conductivity, Int.J.Heat and Mass Transfer, 11, 285-95 (1968).
- INGERSOL, L.R.-ZOBEL, O.J. and INGERSOL, A.C., Heat Conduction with Engineering and Geological Applications, Mac.Graw-Hill (1948).
- JAKOB, M., Heat Transfer, Jhon Wiley and Sons Inc., New York (1956).
- KUDRYAVTSEV, Y.V. et al. Unsteady State Heat Transfer, Iliffe Books Ltd., London (1966).
- LITTLER, D.J., Thermal Stresses and Thermal Fatigue Butterworths London (1969).
- MOFFAT, R.J., Designing Thermocouples for response rate Trans. ASME Paper N° 57, GTP-8, January 22 (1957).
- MUTSUMI SUZUKI, SHIGERN MATSUMOTO and SIRO MAEDA, New Analytical Method for a non linear Diffusion Problem. Int.J.Mass. Transfer 20, 883-89 (1977).
- NEISS, J. and WINTER, E.R.F., Analysis of the Transient Heat Conduction Between Heat Exchanger Pipes and the Earth for Heat Pump Applications, Warme und Stoffubertragung, 9, 39 (1976).
- OZISIK, M.N., Boundary Value Problems of Heat Conduction, Int. Text Book, Scranton, Pa. (1968).
- RIBAUD, G., Conduction de la chaleur in regime variable, Gauthier-Villards, Paris (1960).
- SCHNEIDER, P.J., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley Publ.Co. In. Cambridge, Mass. (1955).
- SCHNEIDER, G.E. et al. Transient Response of Two Bodies, Int.J.of Heat and Mass Transfer, 20, 301-8 (1977).

- SCHIMEL Jr. W.P. et al. Effective Thermal Diffusivity for a Multi-material Composite Laminate. Trans.ASME 99, 466-70, August (1977).
- SPARROW, E.M. and A. HAJI SHEIKH, Transient and Steady Heat Conduction in Arbitrary Bodies with Arbitrary Boundary and Initial Conditions, J.Heat Transfer, Trans.ASME, 90-C, 103-108 (1968).
- SURYANARAYANA, N.V., Transient Response of Straigh Fins, J.Heat Transfer Trans.ASME, 98, 324 (1976).
- TORSEN, R., LANDIS, F., Integral Methods in Transient Heat Conduction Problems with non Uniform Initial Conditions, Int.J.Heat Mass Transfer, 8-1, 189 (1965).
- VERNOTTE, M., L'integration de l'equation de la chaleur quand les proprietes physiques dependent de la temperature intensement Application a la diffusion, Compte rendu de l'Academie des Sciences, 249, 2168 (1959).
- VERON, M., Etude analogique et graphes analitique des regimes variables Bulletin Technique Babcock & Wilcox, n° 24, november, (1951)
- ZIEN, T.F., Approximate Calculation of Transient Heat Conduction AIAAJ/14, 404 (1976).

CAPITULO 6

TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION CON GENERACION DE CALOR EN REGIMEN TRANSITORIO

INTRODUCCION

En el capítulo 5 se han considerado los problemas térmicos en forma geométricas simples en régimen transitorio con temperaturas uniformes o variables con la posición. Como una etapa más avanzada hay que plantearse las situaciones reales en equipos térmicos con generación de calor. La presencia de focos térmicos que pueden aumentar la temperatura en función del tiempo, exige el conocimiento del comportamiento de los materiales antes de alcanzarse el régimen estacionario. Las velocidades de calentamiento no pueden ser arbitrarias y hay que disponer los medios de refrigeración para disminuir las posibles tensiones térmicas o deformaciones anormales irreversibles, que afectan al funcionamiento posterior.

El tiempo de puesta en carga de una instalación no puede ser excesivo porque afecta a la economía de la producción. Las posibles paradas y puestas en marcha pueden acumular efectos sobre los materiales sometidos a ciclos cortos pero intensos. En régimen estacionario se producen variaciones de los focos térmicos, por la inercia de los aparatos de control, que se traducen en ciclos de fatiga térmica con alteración de las propiedades de fluencia de los materiales y, en definitiva, se acorta la vida de los componentes afectados.

La presencia de focos térmicos de alta potencia acentúa los fenómenos anteriores, especialmente cuando la inercia térmica de estos focos es baja.

El tratamiento de los problemas térmicos que nos ocupan es

la superposición de los campos de temperaturas por los tratamientos dados en los capítulos 4 y 5. Cuando las variaciones de calor son función del tiempo, como sucede en muchos reactores químicos o en efectos mecánicos de rozamientos, el tratamiento adecuado se desarrolla con mayor facilidad por los métodos que se desarrollan en los capítulos 7 y 8. Los casos que se estudian en este capítulo encajan en sistemas donde la variación de generación es prácticamente instantánea, como sucede en el calentamiento por fenómenos eléctricos, resistencias eléctricas, hornos de inducción de tiempos de funcionamiento relativamente grande, reactores nucleares, cámaras de combustión y otras múltiples aplicaciones. Si se admiten propiedades térmicas constantes, las ecuaciones de transmisión de calor toman la forma

$$\nabla(k \nabla T) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - Q \quad (1)$$

donde Q (kcal/h m³) es el valor para tiempo cero, en el caso de puesta en marcha. En las paradas bruscas, $Q = 0$ y la ec.(1), se transforma en la ecuación estudiada en el capítulo 5. En situaciones de aumento o disminución de Q , el cambio se admite instantáneo y el tiempo comienza a contar a partir del cambio.

Cuando Q es función de la posición, el tratamiento es análogo a los casos de Q constante, tal como se ha visto en el capítulo 4.

Las situaciones de propiedades térmicas variables pueden resolverse por la transformación de Kirchooff o valores convenientemente ponderados.

6.1-1. Sólido seminfinito con generación de calor $Q_0 = \text{cte.}$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 6.1-1, aplicando las transformadas de Laplace

$$L\left[\frac{\partial T}{\partial x^2}\right] = \int_0^\infty \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \exp(-s\tau) d\tau = \frac{d^2 f(x, s)}{dx^2}$$

$$L\left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}\right] = \frac{1}{\alpha} \left[\exp(-s\tau) T(x, \tau) \right]_0^\infty + \frac{s}{\alpha} f(x, s)$$

Por las condiciones del problema $T(x, 0) = 0$ y resulta la ecuación

$$\frac{d^2 f(x, s)}{dx^2} = \frac{s}{\alpha} f(x, s) - \frac{Q_0}{k} \frac{1}{s} \quad (2)$$

Aplicando a (2) nuevamente la transformación de Laplace haciendo

$$L[f(x, s)] = f(p, s) = \int_0^\infty f(x, s) \exp(-px) dx$$

$$p^2 f(p, s) - pA - B = \frac{s}{\alpha} f(p, s) - \frac{Q_0}{k} \frac{1}{s} p$$

$$f(p, s) = \frac{A p}{(p^2 - \frac{s}{\alpha})} + \frac{B}{(p^2 - \frac{s}{\alpha})} - \frac{Q_0 \alpha}{k s} \left(\frac{p}{p^2 - \frac{s}{\alpha}} - \frac{1}{p} \right) \quad (3)$$

y por la inversión de (3)

$$f(x, s) = A \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) + \frac{B}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) + \frac{Q_0 \alpha}{s k} \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) - \frac{Q_0 \alpha}{k s} \quad (4)$$

$$\text{En } x=0 \quad f(x, s) = 0 \quad \text{y } A=0$$

En $x=\infty$ la temperatura no es infinita y las exponenciales positivas del cos h y sen h son cero y $B = \sqrt{\frac{s}{\alpha}} \frac{Q_0 \alpha}{k s}$ y finalmente

$$f(x, s) = \frac{Q_0}{k} \left[\frac{\alpha}{s} - 2 \frac{\alpha}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) \right] \quad (5)$$

y la inversión de $f(x, s)$

Apéndice I, tabla I-7(108)

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{k} \left[\alpha - 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \right] \quad (6)$$

6.1-2. Sólido semiinfinito con generación de calor $Q_0 = \text{cte. y con vección.}$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,1-2.

Aplicando a la ec. (1) la transformación de Laplace como en el apartado 6,1-1, resulta

$$\frac{d^2 f(x,s)}{dx^2} = \frac{s}{\alpha} f(x,s) - \frac{T(0,s)}{\alpha} - \frac{Q_0}{k} \cdot \frac{1}{s} \quad (2)$$

donde $T(0,s)$ es la temperatura en $x=0$ para $\tau > 0$ aplicando a (2) nuevamente las transformadas de Laplace

$$p^2 f(p,s) - pA - B = \frac{s}{\alpha} f(p,s) - \frac{T(0,s)}{\alpha p} - \frac{Q_0}{k} \frac{1}{sp} \quad (3)$$

$$f(p,s) = \frac{Ap}{p^2 - \frac{s}{\alpha}} + \frac{B}{p^2 - \frac{s}{\alpha}} - \left(\frac{T(0,s)}{\alpha} + \frac{Q_0}{ks} \right) \frac{\alpha}{s} \left(\frac{p}{p^2 - \frac{s}{\alpha}} - \frac{1}{p} \right) \quad (4)$$

y por la inversión de (4)

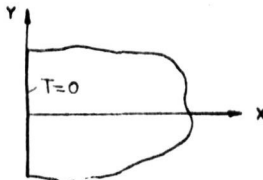
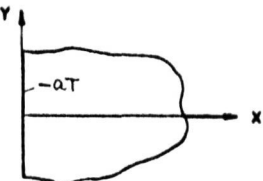
$$f(x,s) = A \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) + B \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) - \left(\frac{T(0,s)}{\alpha} + \frac{Q_0}{ks} \right) \frac{\alpha}{s} \left(\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) - 1 \right) \quad (5)$$

$$\text{En } x = \infty \quad A - \sqrt{\frac{\alpha}{s}} B - \left(\frac{T(0,s)}{\alpha} + \frac{Q_0}{ks} \right) \frac{\alpha}{s} = 0$$

$$\text{y en } x=0 \quad \frac{df(x,s)}{dx} + \alpha f(x,s) = 0$$

y sustituyendo en (5) y teniendo en cuenta que solo interviene la parte negativa de \cosh y \sinh

$$\begin{aligned} f(x,s) &= \exp\left[-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right] \left(A \left(1 - \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \right) - \left(\frac{T(0,s)}{\alpha} + \frac{Q_0}{ks} \right) \frac{\alpha}{s} \right) + \left(\frac{T(0,s)}{\alpha} + \frac{Q_0}{ks} \right) \frac{\alpha}{s} \\ &= \frac{T(0,s)}{s} \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + \alpha} - \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} (\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + \alpha)} - 1 \right) \right] + \frac{Q_0}{k} \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) \left(\frac{1}{s(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + \alpha)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{s\sqrt{\frac{s}{\alpha}} (\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + \alpha)} + \frac{1}{s} \right) \right] + \frac{T(0,s)}{s} + \frac{Q_0 \alpha}{k s^2} \end{aligned} \quad (6)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|--|---|
|  <p>Fig. 6,1-1</p> | $T=0 \quad 0 < x < \infty; \tau=0$ $Q_0 = \text{cte} \quad \tau > 0$ | $T(x, \tau) = \frac{Q_0}{k} \left[\alpha - 2 \operatorname{ferc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) \right]$ |
|  <p>Fig. 6,1-2</p> | $T=T_0 \quad 0 < x < \infty \quad \tau=0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -aT \quad x=0 \quad \tau > 0$ $Q_0 = \text{cte} \quad \tau > 0$ | $T(x, \tau) = T_0 + Q_0 \alpha \tau + \left[\frac{T_0}{\alpha} \left(\left(\frac{\alpha}{\pi \tau} \right)^{1/2} - \frac{x}{2\sqrt{\alpha \pi \tau}} \right) - \frac{Q_0}{k} \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha \tau}{\pi}} \right] \exp \left(-\frac{x^2}{4\alpha \tau} \right)$ $+ \left[\frac{Q_0}{k} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) - T_0 (1 + \alpha) \right] \exp(\alpha x + \alpha^2 x^2) \cdot \operatorname{ferc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha \tau}} + \alpha \sqrt{\alpha \tau} \right)$ $+ \frac{Q_0}{k} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \operatorname{ferc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha \tau}} \right)$ |

y por la inversión de $\xi(x, s)$

tabla I-7, Apéndice I

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{Q_0 d \tau}{k} + \left[\frac{T_0}{\alpha} \left(\left(\frac{\alpha}{\pi \tau} \right)^{1/2} - \frac{x}{2\sqrt{\alpha \pi \tau}} \right) - \frac{Q_0}{k} \frac{x}{2\alpha} \sqrt{\frac{\alpha \tau}{\pi}} \right] \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha \tau}\right) + \left[\frac{Q_0}{k} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) - T_0(1+\alpha) \right] \exp(\alpha x + d\alpha^2 x) \operatorname{fenc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha \tau}} + \alpha\sqrt{\alpha \tau}\right) + \frac{Q_0}{k} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \operatorname{fenc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha \tau}}\right) \quad (7)$$

6.2-1. Pared plana con generación de calor $Q_0 = \text{cte}$.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 6,2-1.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-s_1 \bar{f}_F^s(s_1, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^s(s_1, \tau)}{d \tau} + \bar{f}_0 \quad (2)$$

donde

$$\bar{f}_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \sin(s_1 x) dx = -\frac{2Q_0}{k} \frac{L_x}{(2m+1)\pi} \quad s_1 = \frac{(2m+1)\pi}{L_x}$$

con la inversión

$$T = \frac{2}{L_x} \sum_{m=0}^{\infty} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{L_x} x\right) \bar{f}_F^s(s_1, \tau) \quad (3)$$

Resolviendo la ecuación (2) por transformadas de Laplace

$$f(s) (s + d s_1) = A - \frac{f_0 d}{s}$$

$$\bar{f}_F^s(s_1, \tau) = \left(A + \frac{f_0}{s_1} \right) \exp(-d s_1^2 \tau) - \frac{f_0}{s_1^2} \quad (4)$$

Por las condiciones del problema

$$\text{En } \tau=0 \quad \bar{f}_F^s(s_1, \tau) = 0 \quad A=0$$

y sustituyendo valores en (3)

$$T(x, z) = \frac{4Q_0 L_x^2}{k\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x)}{(2m+1)^3} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \quad (5)$$

Ejemplo 6.2-1

Una placa de 1 cm de espesor se calienta con un foco térmico que genera 10^7 (kcal/h.m³) en toda la masa del material. La temperatura inicial es de 0°C y durante el calentamiento las superficies permanecen a 0°C. Se desea conocer:

- Distribución de la temperatura en función del tiempo en el centro de la placa.
- Calor almacenado en la placa en función del tiempo.
- Gradientes máximos de temperatura en función de la posición y tiempo.
- Cambio de dimensiones de la placa en función de la posición y tiempo.
- Tensiones térmicas elásticas.

Datos: Conductividad térmica $k = 2$ (kcal/h.m.°C) densidad $\rho = 3200$ (kg/m³)
 calor específico $c_p = 0.2$ (kcal/kg.°C) coeficiente de dilatación lineal $\lambda = 10^{-5}$ (1/°C) módulo elástico $E = 10^6$ (kg/cm²)
 Relación de Poisson $\nu = 0.20$

Solución:

- a) Por la ec. (6.2-1(5))

$$T(0, z) = \frac{4 \cdot 10^7 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot \pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2m+1)\pi}{2}\right]}{(2m+1)^3} \left(1 - \exp\left[-0.0031 \left(\frac{(2m+1)\pi}{10^{-2}}\right)^2 z\right]\right)$$

- b)

$$Q(z) = \rho c_p L_x L_y z (\bar{T} - 0) = \rho c_p \frac{V}{L_x} \int_0^{L_x} T(x, z) dx$$

$$\frac{Q_0(\tau)}{V} \left(\frac{\text{kcal}}{\text{m}^3} \right) = \frac{0.248}{\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} \left[1 - \exp(-0.31((2m+1)\pi)^2 \tau) \right]$$

c)

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \frac{4Q_0 L_x^2}{k \pi^3} \frac{\pi}{L_x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos[(2m+1)\pi x/L_x] \left[1 - \exp(-0.31((2m+1)\pi)^2 \tau) \right]$$

El valor máximo de $\partial T/\partial x$ se tiene en $x = 0$ y $\tau \rightarrow \infty$ es decir en régimen estacionario

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\max} = \frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot \pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = 2630 \text{ (}^\circ\text{/m)}$$

d) Admitiendo comportamiento isótropo, en la dirección x el aumento vale

$$\lambda \bar{T} = \lambda \int_0^x T(x, \tau) dx \text{ y por la ec. (b) para } (\lambda \bar{T})_{\max}$$

$$(\lambda \bar{T})_{\max} = \frac{4Q_0 L_x^3 \lambda}{k \pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ (m/m)}$$

e) A partir de la ecuación $\sigma = -\frac{\lambda \Delta T}{1-\nu}$ y teniendo en cuenta que la temperatura disminuye cuando aumenta x para la placa sin ligaduras

$$\sigma_{\max} = \frac{(\lambda \bar{T})_{\max} E}{1-\nu} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{0.8} = 2.5 \text{ (kg/cm}^2\text{) a tracción}$$

6,2-2. Pared plana con generación de calor $Q_0 = \text{cte.}$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 6,2-2.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Fourier

$$-s_i \bar{T}_F(s_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F(s_i, \tau)}{d \tau} + f_0 \quad (2)$$

donde

$$t_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \cos(\xi_i x) dx = -\frac{Q_0}{k} \frac{1}{\xi_i} \sin(\xi_i L_x)$$

con la inversión

$$T(x, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_1^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x (\xi_i^2 + a_1^2) + a_1]} \bar{T}_F^c(\xi_i, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_1$

Resolviendo (2)

$$\bar{T}_F^c(\xi_i, \tau) = \left(A + \frac{f_0}{\xi_i^2} \right) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \frac{f_0}{\xi_i^2} \quad (4)$$

Con $A = 0$ en $\tau = 0$ y sustituyendo en (3)

$$T(x, \tau) = \frac{2Q_0 a_1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x)}{\xi_i^2 [L_x (\xi_i^2 + a_1^2) + a_1]} \frac{(1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau))}{\cos(\xi_i L_x)} \quad (5)$$

Ejemplo 6,2-2.

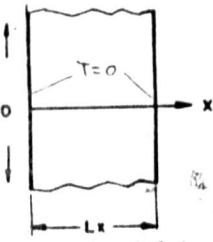
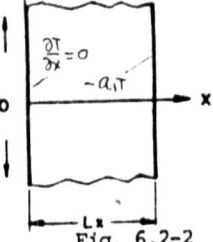
La placa del ejemplo 6,2-1 funciona en régimen estacionario y por un accidente la refrigeración en las superficies se mantienen con un coeficiente de transmisión de calor de $50 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$ durante 5 minutos. Admitiendo que las propiedades térmicas son constantes y que el punto de fusión de la placa es de 730°C se desea conocer:

- Temperatura en el centro de la placa a los 5 minutos después del accidente.
- Tiempo necesario para que el centro de la placa alcance el punto de fusión.

Solución:

- Por la ec. 6,2-2(5), teniendo en cuenta que L_x es $0,5\text{cm}$

$$a_1 L_x = \frac{h}{k} L_x = \frac{50 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,125$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|--|--|--|
|  <p>Fig. 6,2-1</p> | $T=0 \quad x=0 \quad z>0$ $T=0 \quad Lx=0 \quad z>0$ $T=T_0 \quad 0<x<Lx, \quad z<0$ $Q_0 = \text{cte}$ | $T(x, z) = \frac{4Q_0 Lx^2}{k \pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(\xi x)}{(2m+1)^3} [1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)]$ $\xi = (2m+1) \frac{\pi}{Lx}$ |
|  <p>Fig. 6,2-2</p> | $T_0=0 \quad 0<x<Lx, \quad z<0$ $\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad x=0 \quad z>0$ $\frac{\partial T}{\partial x}=-a_1 Lx, \quad x=Lx \quad z>0$ $Q_0 = \text{cte}$ $a_1 = \frac{h}{k}$ | $T(x, z) = \frac{2Q_0 a_1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x)}{\xi_i^2 [Lx (\xi_i^2 + a_1^2) + a_1]} \cos(\xi_i Lx) [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)]$ $\xi_i, \text{ raices de } \xi_i \text{tg}(\xi_i Lx) = a_1$ |

Por la tabla I-3(5) Apéndice I

$$\xi_1 L_x = 0,34 \quad \xi_2 L_x = 3,18 \quad \xi_3 L_x = 6,29 \quad \xi_4 L_x = 9,43 \quad \xi_5 L_x = 12,57$$

$$T(0, 5/60) = \frac{2 \cdot 10^7 \cdot 25}{2} \sum_{i=1}^5 \frac{1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{\xi_i^2 [L_x (\xi_i^2 + a^2) + a]} \cos(\xi_i L_x) + T(0) \text{ estacionario}$$

$$T(0) u_0^+ = \frac{Q_0 (2L_x)^2}{8k} = \frac{10^7 \cdot 10^{-4}}{16} = 62,5 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

Sustituyendo valores en la ec. anterior se tiene

$$T(0, 5/60) \approx 1124(1 - 0,30) + 62,5 = 849 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

El material ha fundido en un tiempo inferior a 5 min.

b) Por la ec. anterior para $\tau = 4 \text{ (min)}$ se tiene

$$T(0, 4/60) \approx 743,5 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

6.3-1. Rectángulo con generación de calor $Q_0 = \text{cte.}$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,3-1.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi_x^2 \bar{T}_F(\xi, y, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{T}_F(\xi, y, \tau)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F(\xi, y, \tau)}{\partial \tau} + f_0 \quad (2)$$

donde

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \sin(\xi x) dx = -\frac{2Q_0 L_x}{k \pi (2m+1)}$$

con la inversión

$$T(x, y, z) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{f}_F^s(\xi, y, z) \quad (3)$$

Aplicando nuevamente la transformada finita del seno a la ec. (2)

$$-(\xi^2 + \eta^2) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z)}{dz} + f_0' \quad (4)$$

con

$$f_0' = B \int_0^{L_y} \sin(\eta y) dy = -\frac{4 Q_0 L_x L_y}{k \pi^2 (2m+1)(2n+1)}$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^s(\xi, y, z) = \frac{2}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\eta y) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z) \quad (5)$$

Resolviendo la ec. (4)

$$\bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z) = \left(A + \frac{f_0'}{\xi^2} \right) \exp(-\alpha \sigma^2 z) - \frac{f_0'}{\xi^2} \quad (6)$$

para $z=0$ $A=0$ y substituyendo valores en las inversiones (5) y (3)

$$T(x, y, z) = \frac{4 Q_0}{k \pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\eta y)}{(2m+1)(2n+1) \sigma^2} (1 - \exp(-\alpha \sigma^2 z)) \quad (7)$$

$$\text{donde } \sigma^2 = \xi^2 + \eta^2 = \left[(2m+1) \frac{\pi}{L_x} \right]^2 + \left[(2n+1) \frac{\pi}{L_y} \right]^2$$

Ejemplo 6,3-1.

Una placa de sección rectangular $L_x L_y$ (m^2) genera calor uniformemente con $Q = Q_0$ ($kcal/h.m^3$). En la superficie de las caras la temperatura se mantiene a T_s . Se desea conocer la distribución de temperaturas en función del tiempo para la placa anterior si la generación de calor es de la forma $Q = Q_0(1 + \beta t)$ siendo $\beta = C/t_0$

Solución:

- a) Por la ec. 6,3-1(7) se calcula la distribución para $Q-Q$.
Teniendo en cuenta la ec. 4,2-4(6) la solución para el caso $Q = Q_0(1+\beta\tau)$ toma la forma de la ec.6,3-1(7) sustituyendo el valor de σ^2 por $\sigma^2 = \left(\xi^2 \frac{Q_0\beta}{k}\right) + \eta^2$

6,3-2. Rectángulo con generación de calor $Q = cte.$ y convección

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,3-2.

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-\xi_i^2 \bar{T}_F(\xi_i, y, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{T}_F(\xi_i, y, \tau)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F(\xi_i, y, \tau)}{\partial \tau} + f_0 \quad (2)$$

donde

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \cos(\xi_i x) dx = -\frac{Q_0}{k} \cdot \frac{1}{\xi_i} \sin(\xi_i L_x)$$

con la inversión

$$T(x, y, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x) \bar{T}_F(\xi_i, y, \tau)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \quad (3)$$

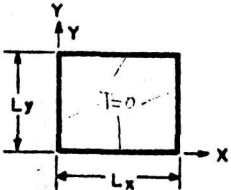
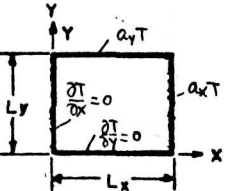
donde ξ_i son las raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$

Aplicando a la ec. (2) nuevamente la transformada del coseno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{T}_F'(\xi_i, \eta_j, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F'(\xi_i, \eta_j, \tau)}{d \tau} + f_0' \quad (4)$$

con

$$f_0' = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \cos(\eta_j y) \frac{\sin(\xi_i x)}{\xi_i} dy = -\frac{Q_0}{k} \frac{\sin(\xi_i L_x) \sin(\eta_j L_y)}{\xi_i \eta_j}$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 6,3-1</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $T=0 \quad x=0 \quad z > 0$ $T=0 \quad y=0 \quad z > 0$ $T=0 \quad L_x=0 \quad z > 0$ $T=0 \quad L_y=0 \quad z > 0$ $Q = Q_0 = Ch$ | $T(x,y,z) = \frac{4Q_0}{k\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\eta y)}{(2m+1)(2n+1)\sigma^2} [1 - \exp(-\alpha\sigma^2 z)]$ $\xi = (2m+1)\frac{\pi}{L_x}; \quad \eta = (2n+1)\frac{\pi}{L_y}$ $\sigma^2 = \xi^2 + \eta^2$ |
|  <p>Fig. 6,3-2</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $0 < y < L_y \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad x=0, y=0, z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -a_x T, \quad x=L_x, z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial y} = -a_y T, \quad y=L_y, z > 0$ $Q = Q_0 = Cth$ | $T(x,y,z) = \frac{4Q_0}{k} a_x a_y \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y] \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_y)} \cdot [1 - \exp(-\alpha\sigma^2 z)]$ $\xi_i, \text{ raíces de } \xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x \quad a_x = \frac{h_x}{k}$ $\eta_j, \text{ raíces de } \eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = a_y \quad a_y = \frac{h_y}{k}$ $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$ |

y la inversión

$$\bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) = 2 \sum \frac{(\eta_j^2 + a_y^2) \cos(\eta_j y)}{[L_x(\eta_j^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{f}_F^{c'}(\xi_i, \eta_j, \tau) \quad (5)$$

donde η_j son las raíces de $\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_x) = a_y$

Resolviendo (4)

$$\bar{f}_F^{c'}(\xi_i, \eta_j, \tau) = \left(A + \frac{f_0'}{\sigma^2}\right) \exp(-\alpha \sigma^2 \tau) - \frac{f_0'}{\sigma^2} \quad (6)$$

$$\text{Si en } \tau=0 \quad T=T(x, y) \quad A = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} T(x, y) \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) dx dy$$

$$\text{Si en } \tau=0 \quad T=0 \quad A=0$$

$$\bar{f}_F^{c'}(\xi_i, \eta_j, \tau) = -\frac{f_0'}{\sigma^2} (1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau))$$

Sustituyendo en (5) y (3)

$$T(x, y, \tau) = \frac{4 Q_0 a_x a_y}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) (1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau))}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y] \sigma^2 \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_y)}$$

$$\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$$

(7)

Ejemplo 6,3-2.

En una fabricación en serie se necesita calentar placas de sección $2.3 \text{ (cm}^2\text{)}$ para que la temperatura en el centro alcance 95°C . Se desea conocer el tiempo mínimo utilizando:

a) Calentamiento dieléctrico con una generación de $10^6 \text{ (kcal/h.m}^3\text{)}$ y coeficiente de transmisión de calor aire-superficie de $10 \text{ (kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$

b) Calentamiento en una corriente de aire a 120°C con un coeficiente de transmisión de calor aire-superficie de $40 \text{ (kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$

Datos: Temperatura inicial de las placas 20°C . Conductividad t_{er}

mica $k = 0,2 \text{ (kcal/}^{\circ}\text{C cm)}$, densidad, $\rho = 500 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ calor específico, $C_p = 0,16 \text{ (kcal/kg}^{\circ}\text{C)}$

Solución:

a) Las dimensiones en la dirección del eje z de la placa se admiten suficientemente grandes frente a la sección para tratar el problema como bidimensional.

Por la ec. 6,3-2 (7) con $a_x = a_y = \frac{10}{0,2} = 50$ y en el centro de la sección $\cos(\xi_i x) = \cos(\eta_j y) = 1$

$$T(0,0,z) = \frac{4Q_0}{k} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{50^2 (1 - \exp(-a(\xi_i^2 + \eta_j^2)z))}{[10^{-2}(\xi_i^2 + 50^2) + 50][1,5 \cdot 10^{-2}(\eta_j^2 + 50^2) + 50][\xi_i^2 + \eta_j^2] \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_y)}$$

Por la tabla I-3 (5) Apéndice I para $a_x L_x = 0,5$

$$\xi_1 L_x = 0,63 \quad \xi_2 L_x = 3,29 \quad \xi_3 L_x = 6,36 \quad \xi_4 L_x = 9,47$$

y para $a_y L_y = 0,75$

$$\eta_1 L_y = 0,77 \quad \eta_2 L_y = 3,35 \quad \eta_3 L_y = 6,39 \quad \eta_4 L_y = 9,49$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior para $\tau = 20(s)$ resulta

$$T(0,0, 2/360) \simeq 76 + 20 = 96(^{\circ}\text{C})$$

b) Por la ecuación 5,2-2 con $a_x = a_y = 200$

$$T(0,0,z) = 4 \cdot 100 \cdot 200^2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\exp(-a(\xi_i^2 + \eta_j^2)z)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y] \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_y)}$$

con $a_x L_x = 2 \quad a_y L_y = 3$

$$\begin{array}{llll} \xi_1 L_x = 1,07 & \xi_2 L_x = 3,64 & \xi_3 L_x = 6,57 & \xi_4 L_x = 9,62 \\ \eta_1 L_y = 1,19 & \eta_2 L_y = 3,80 & \eta_3 L_y = 6,70 & \eta_4 L_y = 9,72 \end{array}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior para $\tau = 1,6$ minutos.

$$T(0,0, 16/60) \simeq 96(^{\circ}\text{C})$$

6,4-1. Paralelepípedo con generación de calor $Q_c = \text{cte.}$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,4-1.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, z, \tau)}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^s(\xi, y, z, \tau)}{\partial^2 z} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F^s(\xi, y, z, \tau)}{\partial \tau} + f_0 \quad (2)$$

con

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \sin(\xi x) dx = -\frac{2Q_0 L_x}{k \pi (2m+1)}$$

con la inversión, $\xi = \pi(2m+1)/L_x$

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{T}_F^s(\xi, y, z, \tau) \quad (3)$$

Aplicando sucesivamente a la ec. (2) las transformadas finitas del seno de Fourier

$$-(\xi^2 + \eta^2) \bar{T}_F^{s'}(\xi, \eta, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^{s'}(\xi, \eta, z, \tau)}{\partial^2 z} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F^{s'}(\xi, \eta, z, \tau)}{\partial \tau} + f_0' \quad (4)$$

con

$$f_0' = -\frac{2Q_0}{k\xi} \int_0^{L_y} \sin(\eta y) dy = -\frac{2Q_0}{k\xi\eta} \quad \eta = (2n+1)\pi/L_y$$

con la inversión

$$\bar{T}_F^s(\xi, y, z, \tau) = \frac{2}{L_y} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\eta y) \bar{T}_F^{s'}(\xi, \eta, y, \tau) \quad (5)$$

$$-(\xi^2 + \eta^2 + r^2) \bar{T}_F^{s''}(\xi, \eta, r, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F^{s''}(\xi, \eta, r, \tau)}{d\tau} + f_0'' \quad (6)$$

con

$$f_0'' = -\frac{4Q_0}{k\xi\eta} \int_0^{L_z} \sin(rz) dz = -\frac{8Q_0}{k\xi\eta r}$$

con la inversión $r = (2p+1)\pi/L_z$

$$\bar{T}_F^{(s)}(\xi, \eta, z, \tau) = \frac{2}{L_z} \sum_{p=0}^{\infty} \sin(rz) \bar{T}_F^{(s)}(\xi, \eta, r, \tau) \quad (7)$$

Resolviendo la ec. (6)

$$\bar{T}_F^{(s)}(\xi, \eta, r, z) = \left(A + \frac{f_0''}{\mu^2}\right) \exp(-\alpha \mu^2 z) - \frac{f_0''}{\mu^2} \quad (8)$$

Si en $\tau=0$ $T = T(x, y, z)$

$$A = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} T(x, y, z) \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz) dz$$

Si en $\tau=0$ $T=0$ $A=0$

$$\bar{T}_F^{(s)}(\xi, \eta, r, z) = -\frac{f_0''}{\mu^2} [1 - \exp(-\alpha \mu^2 z)] \quad (9)$$

con $\mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + r^2$ y por las inversiones (7), (5) y (3)

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{8G_0}{k\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz)}{(2m+1)(2n+1)(2p+1)\mu^2} (1 - \exp(-\alpha \mu^2 \tau)) \quad (10)$$

6,4-2. Paralelepípedo con generación de calor $Q_0 = \text{cte.}$ y convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. (6,4-2).

Aplicando ala ec. (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{T}_F^c(\xi, \eta, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F^c}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x, y, z, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta, z, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$

Aplicando sucesivamente a la ec. (2) la transformada finita del coseno de Fourier se tiene

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{f}_F^{(1)}(\xi_i, \eta_j, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^{(1)}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^{(1)}}{\partial \tau} + f_0' \quad (4)$$

con

$$f_0' = -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \omega(\xi; x) dx = -\frac{Q_0}{k} \frac{1}{\xi_i} \operatorname{sen}(\xi_i L_x)$$

$$f_0' = -\frac{Q_0}{k \xi_i \eta_j} \operatorname{sen}(\xi_i L_x) \operatorname{sen}(\eta_j L_y)$$

y la inversión

$$\bar{f}_F^{(1)}(\xi_i, \eta_j, z, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + a_y^2) \omega(\eta_j, y)}{[L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y]} \bar{f}_F^{(1)}(\xi_i, \eta_j, z, \tau) \quad (5)$$

donde η_j son las raíces de $\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = a_y$

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2 + \gamma_m^2) \bar{f}_F^{(2)}(\xi_i, \eta_j, \gamma_m, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^{(2)}}{d \tau} + f_0'' \quad (6)$$

con $f_0'' = -\frac{Q_0}{k \xi_i \eta_j \gamma_m} \operatorname{sen}(\xi_i L_x) \operatorname{sen}(\eta_j L_y) \operatorname{sen}(\gamma_m L_z)$

$$\bar{f}_F^{(2)}(\xi_i, \eta_j, \gamma_m, \tau) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\gamma_m^2 + a_z^2) \cos(\gamma_m z)}{[L_z(\gamma_m^2 + a_z^2) + a_z]} \bar{f}_F^{(2)}(\xi_i, \eta_j, \gamma_m, \tau) \quad (7)$$

con las raíces $\gamma_m \operatorname{tg}(\gamma_m L_z) = a_z$

Resolviendo la ec. (6)

$$\bar{f}_F^{(2)} = \left(A + \frac{f_0''}{\mu^2} \right) \exp(-d \mu^2 \tau) - \frac{f_0''}{\mu^2} \quad (8)$$

con $\mu^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 + \gamma_m^2$

si en $\tau=0$ $T=0$

$$\bar{f}_F^{(2)}(\xi_i, \eta_j, \gamma_m, \tau) = -\frac{f_0''}{\mu^2} [1 - \exp(-d \mu^2 \tau)] \quad (9)$$

y por las inversiones (7), (5) y (3)

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{8Q_0}{k} a_x a_y a_z \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \cos(\tau_m z)}{[L_x(a_x^2 + \xi_i^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y][L_z(a_z^2 + \tau_m^2) + a_z]} \mu^2 \cdot \frac{[1 - \exp(-\mu^2 \tau)]}{\cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_y) \cos(\tau_m L_z)} \quad (10)$$

Ejemplo 6,4-2.

Cubos metálicos de 4.4.4. (cm³) se tratan térmicamente para alcanzar en el espesor de 1 mm a partir de las superficies la temperatura de 700°C. El calentamiento se realiza por inducción con una generación de calor dada por la relación $Q_0 = 10^3 \exp[-2(L_x - x)]$ (kcal/h m²) y $(L_x - x)$, (mm). El coeficiente de transmisión de calor al ambiente es de 10 (kcal/h m² °C). Se desea conocer:

- Distribución de temperaturas en función del tiempo y de la posición con la generación de calor análoga para los ejes z e y
- Tiempo necesario para que la temperatura alcance 700°C en la superficie.

Datos: $Q = 7800$ (Kg/m³) $k = 20$ (kcal/h m °C) $C_p = 0,20$ (kcal/Kg °C)

Solución:

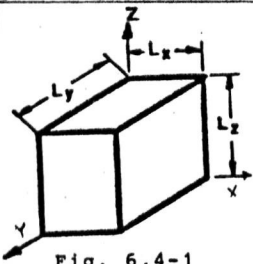
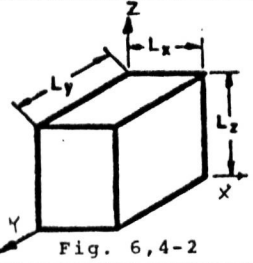
- El valor de f_0 en la ecuación 6,4-2(4) vale

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= -\frac{Q_0}{k} \int_0^{L_x} \exp[-2(L_x - x)] \cdot \cos(\xi_i x) dx \\ &= -\frac{Q_0}{k} [2 \cos(\xi_i L_x) + \xi_i \sin(\xi_i L_x) - 2 \exp(-2L_x)] \cdot \frac{1}{(4 + \xi_i^2)} \end{aligned}$$

y la distribución de temperatura por la ec. 6,4-2(10 con $a_x = a_y = a_z$

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{8Q_0 a_x^3}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\xi_i y) \cos(\xi_i z)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]^3} \cdot \left(\frac{\xi_i}{(4 + \xi_i^2) \sin(\xi_i L_x)} \right)^3 (1 - \exp[-3\xi_i^2 \alpha \tau])$$

Por la tabla I-3(5) Apéndice I con $a_x = 0,5$ $a_x L_x = 0,01$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|--|
|  <p>Fig. 6,4-1</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad 0 < y < L_y \quad 0 < z < L_z$ $T=0 \quad x=0, x=L_x, z>0$ $T=0 \quad y=0, y=L_y, z>0$ $T=0 \quad z=0, z=L_z, z>0$ $Q=Q_0=cte.$ | $T(x,y,z) = \frac{8Q_0}{k\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(\tau z)}{(2m+1)(2n+1)(2p+1) \mu^2} [1 - \exp(-\alpha \mu^2 z)]$ $\xi = (2m+1)\frac{\pi}{L_x} \quad \eta = (2n+1)\frac{\pi}{L_y} \quad \tau = (2p+1)\frac{\pi}{L_z}$ $\mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + \tau^2$ |
|  <p>Fig. 6,4-2</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad 0 < y < L_y \quad 0 < z < L_z$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, x=y=z=0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha_x T \quad x=L_x \quad z>0$ $\frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha_y T \quad y=L_y \quad z>0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha_z T \quad z=L_z \quad z>0$ $Q=Q_0=cte$ | $T(x,y,z) = \frac{8Q_0}{k} \alpha_x \alpha_y \alpha_z \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \cos(\tau_m z)}{[\mu^2 (\xi_i^2 + \alpha_x^2) + \alpha_x] [L_y (\eta_j^2 + \alpha_y^2) + \alpha_y]}$ $\cdot \frac{1}{\mu^2 [L_z (\tau_m^2 + \alpha_z^2) + \alpha_z]} \cos(\xi_i L_x) \cos(\eta_j L_y) \cos(\tau_m L_z) [1 - \exp(-\alpha \mu^2 z)]$ <p>ξ_i, η_j, τ_m, raíces de, $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = \alpha_x, \eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = \alpha_y, \tau_m \operatorname{tg}(\tau_m L_z) = \alpha_z$</p> $\alpha_x = \frac{h_x}{k}, \alpha_y = \frac{h_y}{k}, \alpha_z = \frac{h_z}{k} \quad \mu^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 + \tau_m^2$ |

$$\xi_1 L_x = 0,099 \quad \xi_2 L_x = 3,14 \quad \xi_3 L_x = 6,28 \quad \xi_4 L_x = 9,42$$

b) La posición más desfavorable es $x=L_x$, $y=L_y$, $z=L_z$
y dando valores para $\tau=1$ (min) en primera aproximación $T=100^\circ\text{C}$

6,5-1. Cilindro infinito con generación de calor $Q_0 = \text{cte.}$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,5-1.

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau)}{\partial \tau} + f_0 \quad (2)$$

donde

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R r J_0(\xi_i r) dr = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

Resolviendo la ec.(2)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \left(A + \frac{f_0}{\xi_i^2} \right) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \frac{f_0}{\xi_i^2} \quad (4)$$

y si $\tau=0$ $\tau=0$ $A=0$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = -\frac{f_0}{\xi_i^2} [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)]$$

y substituyendo en (3)

$$T(r, \tau) = \frac{2Q_0}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^3 J_1(\xi_i R)} [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)] \quad (5)$$

Ejemplo 6,5-1.

Una resistencia eléctrica envainada de 0,5 cm de diámetro exterior genera 2 (kW/m) . Calentando un líquido de conductividad térmica elevada de tal forma que la temperatura en la superficie de la vaina es de 150°C . Si la resistencia empieza a funcionar se desea conocer:

- a) Distribución de temperaturas en el centro de la resistencia en función del tiempo y admitiendo que la temperatura de la vaina es de 150°C .

Datos: La resistencia material aislante y vaina se suponen con valores medios de $C_p = 0,15 \text{ (Kcal/kg}^\circ\text{C)}$, $\rho = 4200 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, $k = 6 \text{ (Kcal/hm}^\circ\text{C)}$

La generación de calor en primera aproximación se supone constante.

Por la ec. 6,5-1(5)

$$T(r, \tau) = \frac{2 \cdot 1,09 \cdot 10^5}{6,025 \cdot 10^{-2}} \sum_{i=1}^3 \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^3 J_1(\xi_i R)} [1 - \exp(-9,5 \cdot 10^{-3} \xi_i^2 \tau)]$$

Por la tabla I-3(3) del Apéndice I las raíces de $J_0(\xi_i R)$ son

$$\xi_1 R = 2,40 \quad \xi_2 R = 5,52 \quad \xi_3 R = 8,65$$

Para 150°C y $r = 0$ $J_0(0) = 1$

$$T(0, \tau) = 1,475 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\xi_i^3 J_0(\xi_i R)} [1 + \exp(-9,5 \cdot 10^{-3} \xi_i^2 \tau)] + 150$$

6,5-2. Cilindro infinito con generación de calor constante y convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_g}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,5-2.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau)}{\partial \tau} + f_0 \quad (2)$$

donde

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R r J_0(\xi_i r) dr = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\alpha^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\alpha r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Resolviendo la ec. (2)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \left(A + \frac{f_0}{\xi_i^2}\right) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \frac{f_0}{\xi_i^2} \quad (4)$$

y si en $\tau=0$ $T=0$ $A=0$

Sustituyendo en la ec. (3)

$$T(r, \tau) = \frac{2Q_0 \alpha r}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + \alpha^2) J_0^2(\xi_i R)} [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)] \cdot \frac{1}{\xi_i^2} \quad (5)$$

Ejemplo 6,5-2.

Una barra de 2 cm de diámetro se calienta por inducción en toda la masa con una potencia de $2,73 \cdot 10^6$ (Kcal/hm³) El coeficiente de transmisión de calor se supone constante $h=10$ (Kcal/hm²°C)

Si la temperatura inicial es de 20°C y el ambiente se mantiene a esta temperatura se desea conocer:

a) Distribución de temperaturas en el centro de la barra en función del tiempo hasta alcanzar el régimen estacionario.

b) Calor almacenado en función del tiempo.

c) Gradientes de temperatura en la superficie de la barra en función del tiempo.

Datos:

Solución:

a) Por la ec. 6,5-2(5) en el centro $T_0(\xi_1, \tau) = 1$

$$Q_r = 1,33 \quad Q_r R = 0,0133 \quad \text{Por la tabla I-3(4) Apéndice I}$$

las raíces ξ_i para $Q_r R = 0,0133$

$$\alpha = 6,31 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^2/\text{s)} \quad \xi_1 R = 0,16 \quad \xi_2 R = 3,83 \quad \xi_3 R = 7,01 \quad \xi_4 R = 10,17$$

$$T(0, \tau) = \frac{2 \cdot 2,73 \cdot 10^6 \cdot 1,33}{7,5 \cdot 10^{-2}} \sum_{i=1}^4 \frac{1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{\xi_i^2 (\xi_i^2 + Q_r^2)} J_0(\xi_i R)$$

$$\text{Para } \tau = 30 \text{ (min)} \quad T \approx 800(^{\circ}\text{C})$$

En régimen estacionario, por la ecuación anterior

$$T(0, \infty) = 1477(^{\circ}\text{C})$$

y por la ec. 4,4-1(a)

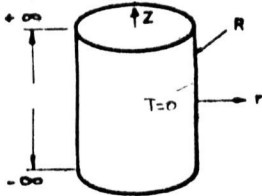
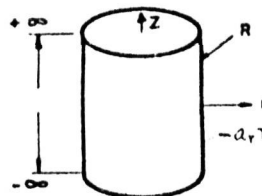
$$T_{-20} = \frac{Q_0 R L}{2} \left(\frac{R}{2k} + \frac{1}{10} \right) = \frac{Q_0 R}{2} (6,6 \cdot 10^{-4} + 0,1) \approx 1365(^{\circ}\text{C})$$

b)

$$q(\tau) \text{ (Kcal/m.barra)} = Q_0(\tau) - k \int_0^{\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_R d\tau = Q_0 \pi R^2 \tau - \frac{2 Q_0 a^2}{R} \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{\xi_i (\xi_i^2 + Q_r^2)}$$

como puede observarse en régimen estacionario la expresión exponencial tiende a cero

$$c) \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_R = \frac{2 Q_0 a^2}{R} \sum_{i=1}^4 \frac{1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{\xi_i (\xi_i^2 + Q_r^2)}$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|--|--|--|
|  <p>Fig. 6,5-1</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T=0 \quad r=R \quad z > 0$ $Q = Q_0 = cte$ | $T(r, z) = \frac{2Q_0}{Rk} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^3 J_1(\xi_i R)} [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)]$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |
|  <p>Fig. 6,5-2</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r=R \quad z > 0$ $a_r = \frac{h_r}{R}$ $Q = Q_0 = cte$ | $T(r, z) = \frac{2Q_0 a_r}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R) \xi_i} [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)]$ <p>ξ_i, raíces de $a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$</p> |

y los gradientes son máximos cuando $\tau \rightarrow \infty$, es decir en régimen estacionario.

Por la ecuación

$$T - T_s = \frac{Q_0}{4k} (R^2 - r^2)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{Q_0 r}{2k} \quad \text{máximo en } r = R \text{ y nulo en el centro}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_R = -\frac{2,73 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 7,5} = -1820 \text{ (°C/m)}$$

6,6-1. Cilindro finito con generación de calor $Q_0 = \text{cte.}$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,6-1.

Aplicando a la ec. (1) la transformada de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + \frac{\partial \bar{f}_{H,0}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}}{\partial \tau} + f_0 \quad (2)$$

donde

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R r J_0(\xi_i r) dr = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

con la inversión

$$T(r, z, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

Aplicando a la ec. (2) la transformada finita del seno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{f}_F(\xi_i, \eta_j, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F}{d \tau} + f_0' \quad (4)$$

donde

$$f_0' = - \frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R) \int_0^{L_z} \sin(\eta z) dz = - \frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R) \cdot \frac{2}{\eta} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_z}$$

con la inversión

$$f_{n,0}(\xi_i, z, \tau) = \frac{2}{L_z} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\eta z) \bar{f}_F^s(\xi_i, \eta, \tau) \quad (5)$$

Resolviendo (4)

$$\bar{f}_F^s(\xi_i, \eta, \tau) = \left(A + \frac{f_0}{\sigma^2} \right) \exp(-\alpha \sigma^2 \tau) - \frac{f_0}{\sigma^2} \quad (6)$$

Si en $\tau=0 \quad T=0 \quad A=0$

Sustituyendo en (5) y (3)

$$T(r, z, \tau) = \frac{4Q_0}{k R \pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \sin(\eta z)}{\xi_i \sigma^2 J_1(\xi_i R) (2n+1)} [1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)] \quad (7)$$

donde $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta^2$

Ejemplo 6,6-1.

En un recipiente de forma cilíndrica de 20 cm de diámetro y 40 cm de altura se realiza la polimerización de un compuesto orgánico que desprende 10^5 (kcal/h m³) durante 15 minutos. La temperatura de la superficie del recipiente se mantiene a 25°C. Se desea conocer:

- Temperatura del centro del recipiente para 5, 10 y 15 minutos.
- Tiempo necesario para que después de la polimerización el centro alcance 40°C.

Datos: $k = 0,5$ (kcal/kg °C) $q_p = 0,2$ (kcal/kg °C) $\rho = 1300$ (kg/m³)

- Por la ec.6,6-1(7) y para las raíces ξ_i de $J_0(\xi_i R) = 0$

$$\xi_1 R = 2,40 \quad \xi_2 R = 5,52 \quad \xi_3 R = 8,67 \quad \xi_4 R = 11,79$$

En el centro del cilindro $J_0(\xi_i 0) = 1$

$$T(0,0,z) = 4 \cdot 10^6 \sum_{i=1}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi/2] [1 - \exp(-\alpha [\xi_i^2 + ((2n+1)\pi/0,2)^2] z)]}{\xi_i [\xi_i^2 + ((2n+1)\pi/0,2)^2]} J_1(\xi_i R)$$

obteniéndose los valores

$$T(0,0,5/60) \approx 14 + 25 = 39(^{\circ}\text{C})$$

$$T(0,0,1/60) \approx 37,5 + 25 = 62,5(^{\circ}\text{C})$$

$$T(0,0,15/60) \approx 55 + 25 = 80(^{\circ}\text{C})$$

b) A partir de la distribución de temperatura a los 15 minutos y por la expresión en régimen transitorio ec.5,5-1(7) sin generación de calor

$$T(0,0,z) = \frac{8T_0}{\pi R} \sum_{i=1}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi/2] \cdot \exp(-\alpha \xi_i^2 z)}{\xi_i (2n+1) J_1(\xi_i R)} + 25$$

para $T_0 = 55(^{\circ}\text{C})$ y con los mismos valores de las raíces de a).

6,6-2. Cilindro finito con generación de calor $Q_0 = \text{cte.}$ y convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 6,6-2.

Aplicando a la ec.(1) la transformada de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{T}_{H,0}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_{H,0}}{\partial \tau} + \bar{f}_0 \quad (2)$$

donde

$$\bar{f}_0 = -\frac{Q_0}{k} \frac{R}{\xi_i} J_1(\xi_i R)$$

con la inversión

$$T(r, z, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(a^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R)} \bar{f}_{n,0}(\xi_i, z, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $\alpha_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(\xi_i R)$

Aplicando a la ec. (2) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{f}_F(\xi_i, \eta_j, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F(\xi_i, \eta_j, \tau)}{\partial \tau} + \bar{f}_0' \quad (4)$$

donde

$$\bar{f}_0' = -\frac{Q_0}{k} \frac{R J_1(\xi_i R)}{\xi_i \xi_i} \operatorname{sen}(\eta_j L_z)$$

con la inversión

$$\bar{f}_{n,0}(\xi_i, z, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + a_z^2) \cos(\eta_j z)}{(L_z(\eta_j^2 + a_z^2) + a_z} \bar{f}_F(\xi_i, \eta_j, \tau) \quad (5)$$

Resolviendo la ec. (4) con $T=0 \quad \tau=0$

$$\bar{f}_F(\xi_i, \eta_j, \tau) = \frac{\bar{f}_0'}{\sigma^2} [1 - \exp(-\sigma^2 \tau)] \quad (6)$$

y sustituyendo valores en (5) y (3)

$$T(r, z, \tau) = \frac{4Q_0}{kR} a_z a_r \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \cos(\eta_j z) [1 - \exp(-\sigma^2 \tau)]}{\sigma^2 (\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R) [L_z(\eta_j^2 + a_z^2) + a_z] \cos(\eta_j L_z)} \quad (7)$$

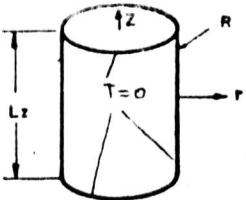
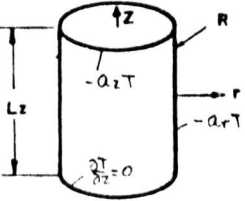
Ejemplo 6,6-2

Repetir el ejemplo 6,6-1 si el recipiente tiene un coeficiente de transmisión de calor al medio exterior de $50 \text{ (Kcal/hm}^2\text{°C)}$

a) La solución viene dada por la ec. 6,6-2 (7) con los valores

$a_z = h/k = 100$, η_j son las raíces de $\eta_j \tanh(\eta_j L_z) = a_z$ de la tabla I-3(5) Apéndice I y ξ_i son las raíces de $\alpha_r R = 100,0,1$ de la tabla I-3(4) Apéndice I.

b) Se aplica la ecuación 5,5-2(7) en régimen transitorio y con las

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|--|---|
|  <p>Fig. 6,6-1</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad \tau < 0$ $T=0 \quad r=R \quad \tau > 0$ $T=0 \quad z=0 \quad \tau > 0$ $T=0 \quad z=L_z \quad \tau > 0$ $Q=Q_0 = \text{cte}$ | $T(r, z, \tau) = \frac{4Q_0}{kR\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \sin(\eta_n z)}{\xi_i \sigma^2 (2n+1)} [1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)]$ $\eta_n = (2n+1) \frac{\pi}{L_z}; \quad \xi_i = \text{raíces de } J_0(\xi_i R) = 0$ $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_n^2$ |
|  <p>Fig. 6,6-2</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad \tau < 0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad z=0 \quad \tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r=R \quad \tau > 0$ $a_z = \frac{h_z}{k} \quad a_r = \frac{h_r}{k}$ $Q=Q_0 = \text{cte} \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -a_z T, z=L_z$ | $T(r, z, \tau) = \frac{4Q_0}{kR} a_z a_r \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \cos(\eta_j z)}{[z(\eta_j^2 + a_z^2) + a_z^2] \sigma^2 (\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R) \cos(\eta_j L_z)}$ $[1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)]$ $\xi_i \text{ y } \eta_j \text{ raíces de } a_r J_0(\xi_i R) = \xi_i J_1(R), \quad \eta_j \text{ tales que } \eta_j L_z = a_z$ $\sigma^2 = (\xi_i^2 + \eta_j^2)$ |

mismas raíces de a).

6,7-1. Tubo infinito con generación de calor $Q_0 = \text{cte.}$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,7-1.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau)}{d \tau} + f_0 \quad (2)$$

donde

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_{R_0}^{R_e} r C_0(\xi_i, r) dr = -\frac{Q_0}{k} \int_{R_0}^{R_e} [J_0(\xi_i, r) Y_0'(\xi_i, R_e) - J_0'(\xi_i, R_e) Y_0(\xi_i, r)] r dr$$

y si

$$\int_{R_0}^{R_e} r Y_0(\xi_i, r) dr = \left[\frac{r}{\xi_i} Y_1(\xi_i, r) + \frac{2r^2}{\xi_i^2} \right]_{R_0}^{R_e}$$

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \left[r Y_0'(\xi_i, R_e) J_1(\xi_i, r) - \left(\frac{r}{\xi_i} Y_1(\xi_i, r) + \frac{2r^2}{\xi_i^2} \right) J_0'(\xi_i, R_e) \right]_{R_0}^{R_e} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, \tau, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) + a_1 J_0(\xi_i, R_0)]^2 C_0(\xi_i, r)}{[\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) + a_1 J_0(\xi_i, R_0)]^2 - (a^2 + \xi_i^2) J_0'(\xi_i, R_e)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de

$$J_0'(\xi_i, R_e) [\xi_i Y_0'(\xi_i, R_0) + a_1 Y_0(\xi_i, R_0)] - Y_0'(\xi_i, R_e) [\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) + a_1 J_0(\xi_i, R_0)] = 0$$

Resolviendo la ec. (2)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \left(A + \frac{f_0}{\xi_i^2} \right) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \frac{f_0}{\xi_i^2} \quad (5)$$

si en $\tau=0$ $T=0$ $A=0$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = -\frac{f_0}{\xi_i^2} [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)] \quad (6)$$

y sustituyendo en la inversión (4)

$$\begin{aligned} T(r, z, z) = & \frac{Q_0}{k} \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 C_0(\xi_i r)}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 - (a_1^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R_0)} \cdot [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)] \\ & \cdot \left[\frac{R_0}{\xi_i} Y_0'(\xi_i R_0) J_1(\xi_i R_0) - \left(\frac{R_0}{\xi_i} Y_1(\xi_i R_0) + \frac{2 R_0^2}{\xi_i^2} \right) J_0(\xi_i R_0) - \frac{R_0}{\xi_i} Y_0'(\xi_i R_0) J_1(\xi_i R_0) \right. \\ & \left. - \left(\frac{R_0}{\xi_i} Y_1(\xi_i R_0) + \frac{2 R_0^2}{\xi_i^2} \right) J_0'(\xi_i R_0) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

6,7-2. Tubo infinito con generación de calor $Q = \text{cte.}$

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,7-2.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z)}{dz} + f_0 \quad (2)$$

con

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \left[\frac{r}{\xi_i} Y_0'(\xi_i R_0) J_1(\xi_i r) - \left(\frac{r}{\xi_i} Y_1(\xi_i r) + \frac{2 r^2}{\xi_i^2} \right) J_0'(\xi_i R_0) \right]_{R_0}^{R_0}$$

con la inversión

$$T(r, z, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 C_0(\xi_i r)}{[a_1^2 + \xi_i^2] J_0^2(\xi_i R_0) - [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) \quad (3)$$

son las raíces de

$$Y_0'(\xi_i R_0) [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)] = J_0'(\xi_i R_0) [\xi_i Y_0'(\xi_i R_0) + a_1 Y_0(\xi_i R_0)]$$

Resolviendo la ec. (2)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = -\frac{f_0}{\xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)) \quad (4)$$

y substituyendo valores en (3) se obtiene la ecuación que se indica en la Fig. 6,7-2.

6,7-3. Tubo infinito con generación de calor $Q_0 = \text{cte}$.

Cumple la ecuación, fig. 6,7-3

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_{H,0}}{d\tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (2)$$

donde

$$f_0 = - \int_{R_0}^{R_e} \frac{Q_0}{k} r C_0(\xi_i, r) dr$$

$$C_0(\xi_i, r) = J_0(\xi_i, r) [\xi_i Y_0'(\xi_i, R_0) + a_1 Y_0(\xi_i, R_0)] - Y_0(\xi_i, r) [\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) + a_1 J_0(\xi_i, R_0)]$$

y si

$$\int_{R_0}^{R_e} r Y_0(\xi_i, r) = \left[\frac{r}{\xi_i} Y_1(\xi_i, r) + \frac{2r^2}{\xi_i^2} \right]_{R_0}^{R_e}$$

$$f_0 = - \frac{Q_0}{k} \left[\frac{J_1(\xi_i, r)}{\xi_i} [\xi_i Y_0'(\xi_i, R_0) + a_1 Y_0(\xi_i, R_0)] - \left[\frac{r}{\xi_i} Y_1(\xi_i, r) + \frac{2r^2}{\xi_i^2} \right] (\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) + a_1 J_0(\xi_i, R_0)) \right]_{R_0}^{R_e}$$

con la inversión

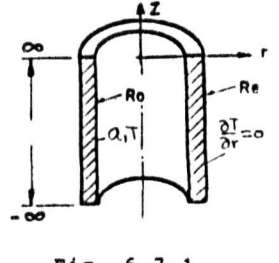
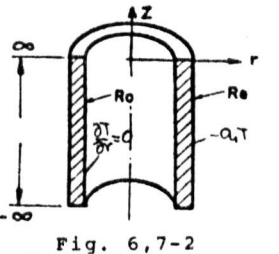
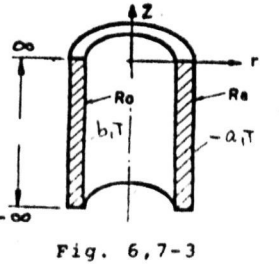
$$T(r, \tau) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) + b_1 J_0(\xi_i, R_0)]^2 C_0(\xi_i, r) \bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau)}{(b^2 + \xi_i^2) [\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) + a_1 J_0(\xi_i, R_0)]^2 - (a^2 + \xi_i^2) [\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) + b_1 J_0(\xi_i, R_0)]^2} \quad (3)$$

Resolviendo la ec. (2) con $T = 0$ en $\tau = 0$

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) = - \frac{f_0}{\xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \quad (3a)$$

y substituyendo en (3) se obtiene

$$T(r, \tau) = \text{Ec. 3, substituyendo } \bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) \text{ (Ec. 3a)} \quad (4)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 6, 7-1</p> | $T=0 \quad R_0 < r < R_e \quad z=0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_1 T \quad r=R_0 \quad z>0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r=R_e \quad z>0$ $a_1 = \frac{h_0}{k}$ $Q = Q_0 = Cte$ | $T(r, z) = \frac{Q_0 \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 Co(\xi_i r) [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)]}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 - (\alpha^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R_0)}$ $\cdot \left[\frac{R_e}{\xi_i} Y_0'(\xi_i R_e) J_1(\xi_i R_e) - \left(\frac{R_e}{\xi_i} Y_1(\xi_i R_e) + 2 \frac{R_e^2}{\xi_i^2} \right) J_0(\xi_i R_e) - \frac{R_e}{\xi_i} Y_0'(\xi_i R_e) J_1(\xi_i R_e) \right.$ $\left. - \left(\frac{R_e}{\xi_i} Y_1(\xi_i R_e) + 2 \frac{R_e^2}{\xi_i^2} \right) J_0'(\xi_i R_e) \right]$ <p>$Co(\xi_i r) = J_0(\xi_i r) Y_0'(\xi_i R_e) - J_0'(\xi_i R_e) Y_0(\xi_i r)$; ξ_i, raíces de</p> $J_0'(\xi_i R_e) [\xi_i Y_0'(\xi_i R_0) + a_1 Y_0(\xi_i R_0)] = Y_0'(\xi_i R_e) [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]$ |
|  <p>Fig. 6, 7-2</p> | $T=0 \quad R_0 < r < R_e \quad z=0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r=R_0 \quad z>0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad r=R_e \quad z>0$ $a_1 = \frac{h_0}{k}$ $Q = Q_0 = Cte$ | $T(r, z) = \frac{Q_0 \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)] Co(\xi_i r) (-f_0') [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)]}{(\alpha^2 + \xi_i^2) J_0^2(\xi_i R_0) - [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_1 J_0(\xi_i R_e)]^2}$ <p>En apartado 6, 7-2 se dan; raíces de ξ_i; $(-f_0') = -f_0 \frac{k}{Q_0}$; $Co(\xi_i r)$</p> |
|  <p>Fig. 6, 7-3</p> | $T=0 \quad R_0 < r < R_e \quad z=0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = b_1 T \quad r=R_0 \quad z>0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad r=R_e \quad z>0$ $a_1 = \frac{h_0}{k} \quad b_1 = \frac{h_0}{k}$ $Q = Q_0 = Cte$ | $T(r, z) = \frac{Q_0 \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 Co(\xi_i r) (-f_0') [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)]}{(b_1^2 + \xi_i^2) [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)]^2 - (\alpha^2 + \xi_i^2) [\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + b_1 J_0(\xi_i R_e)]^2}$ <p>ξ_i, $Co(\xi_i r)$, $(-f_0')$ véase apartado 6, 7-2</p> |

con $-f'_0 = -f_0 \frac{k}{Q_0}$

y ξ_i son las raíces

$$\begin{aligned} & [\xi_i Y'_0(\xi_i R_0) + a_1 Y_0(\xi_i R_0)] [\xi_i J'_0(\xi_i R_e) + b_1 J_0(\xi_i R_e)] = \\ & = [\xi_i Y'_0(\xi_i R_e) + b_1 Y_0(\xi_i R_e)] [\xi_i J'_0(\xi_i R_0) + a_1 J_0(\xi_i R_0)] \end{aligned}$$

6,8-1. Tubo finito con generación de calor $Q_0 = \text{cte}$.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,8-1.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel

$$- \xi_i \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_{H,0}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}}{\partial \tau} + f_0 \quad (2)$$

con la inversión de $\bar{f}_{H,0}$ dada por la ec. 6,7-1(3) y con los valores de $C_0(\xi; r)$ y raíces ξ_i del apartado 6,7-1.

Aplicando a la ec. (2) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^c}{d \tau} + \frac{f_0}{\eta_j} \sin(\eta_j L_z) \quad (3)$$

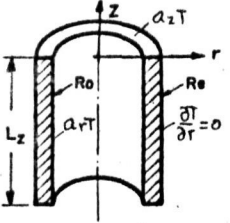
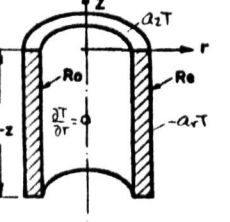
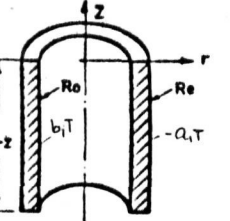
con la inversión

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + a_r^2) \cos(\eta_j z)}{[L_z(\eta_j^2 + a_r^2) + a_r]} \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) \quad (4)$$

Resolviendo la ec. (3) con la condición $T = 0 \quad \tau = 0$

$$\bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) = - \frac{f_0}{\eta_j} \frac{\sin(\eta_j L_z)}{\sigma^2} [1 - \exp(-\sigma^2 \tau)] \quad (5)$$

donde η_j son las raíces de $\eta_j \tan(\eta_j L_z) = a_r$
y por las inversiones 6,7-1(3) y (4) resulta

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|--|--|
|  | $T=0 \quad R_0 < r < R_e \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_e \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_r T \quad r = R_0 \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = a_z T \quad z = L_z \quad z > 0$ $Q = Q_0 = \text{cte.}$ | $T(r, z, z) = [\text{Ec. 6,7-1(6). Ec. 6,8-1(4)}]$ <p>Sustituir $\bar{F}_F(\xi; \eta)$ por $\bar{F}_F(\eta; z)$ Ec. 6,8-1(5)</p> $a_r = \frac{h_r}{k} \quad a_z = \frac{h_z}{k}$ |
|  | $T=0 \quad R_0 < r < R_e \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_0 \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r = R_e \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = a_z T \quad z = L_z \quad z > 0$ $Q = Q_0 = \text{cte.}$ | $T(r, z, z) = [\text{Ec. 6,7-2(3). Ec. 6,8-1(4)}]$ $a_r = \frac{h_r}{k} \quad a_z = \frac{h_z}{k}$ |
|  | $T=0 \quad R_0 < r < R_e \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = b_1 T \quad r = R_0 \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_1 T \quad r = R_e \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = a_z T \quad z = L_z \quad z > 0$ $Q = Q_0 = \text{cte.}$ | $T(r, z, z) = [\text{Ec. 6,7-3(3). Ec. 6,8-1(4)}]$ $a_1 = \frac{h_1}{k} \quad b_1 = \frac{h_2}{k} \quad a_2 = \frac{h_z}{k}$ |

$$T(r, z, \tau) = \text{Ec. 6,7-1(6) Ec. (4) Sustituyendo por la ec. (5)} \quad (6)$$

Análogamente para las condiciones de la Fig. 6,8-2

$$T(r, z, \tau) = \text{Ec. 6.7-2(3) Ec. (4) Sustituyendo por la ecuación equivalente a (5)} \quad (7)$$

Para las condiciones de la Fig, 6,8-3.

$$T(r, z, \tau) = \text{Ec. 6,7-3(3) Ec. (4) Sustituyendo por la ecuación equivalente a (5)} \quad (8)$$

6,9-1. Esfera con generación de calor $Q_0 = \text{cte}$.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k}$$

6

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r T(r, z)) = \frac{r}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0 r}{k} \quad (1)$$

con las condiciones que se indican en la Fig. 6,9-1.

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita del cero de Fourier

$$-\xi^2 \bar{T}_F(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F}{d \tau} + \bar{T}_0$$

$$\bar{T}_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R r \sin(\xi r) dr = -\frac{Q_0}{k} \left[\frac{\sin(\xi r)}{\xi^2} - r \frac{\cos(\xi r)}{\xi} \right]_0^R = -\frac{Q_0 (1)}{k \xi R}$$

con la inversión , $\xi = \frac{\pi m}{R}$

$$T(r, z) = \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi r)}{\xi} \bar{T}_F(\xi, \tau) \quad (3)$$

Resolviendo la ec.(2) con $T = 0 \quad \tau = 0$

$$\bar{f}_F^s(\xi, \tau) = -\frac{f_0}{\xi^2} [1 - \exp(-\alpha \xi^2 \tau)] \quad (4)$$

y sustituyendo en (3)

$$T(r, \tau) = \frac{2Q_0}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin(\xi_m r)}{\xi_m^3 r} [1 - \exp(-\alpha \xi_m^2 \tau)] \quad (5)$$

con $\xi = \frac{\pi m}{R}$

6,9-2. Esfera con generación de calor $Q_0 = \text{cte}$ y convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k}$$

6

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r T(r, \tau)) = r \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0 r}{k} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 6,9-2.

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi_i^2 \bar{f}_F^s(\xi_i, \tau) = \frac{d\bar{f}_F^s}{d\tau} \cdot \frac{1}{\alpha} + f_0 \quad (2)$$

$$f_0 = -\frac{Q_0}{k} \int_0^R r \sin(\xi_i r) dr = -\frac{Q_0}{k} \left[\frac{\sin(\xi_i R)}{\xi_i^2} + \frac{(1 - R \cos(\xi_i R))}{\xi_i} \right]$$

con la inversión (véase apartado 4,8-3)

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[R^2 \xi_i^2 + (a_r R - 1)] \sin(\xi_i r)}{[R^2 \xi_i^2 + a_r R (a_r R - 1)] r} \bar{f}_F^s(\xi_i, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $R \xi_i \cot \xi_i R + a_r R - 1 = 0$

Resolviendo la ec.(2) con la condición $T = 0$ $\tau = 0$

$$\bar{f}_F^s(\xi_i, \tau) = -\frac{f_0}{\xi_i^2} [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)] \quad (4)$$

y sustituyendo en (3)

$$T(r, \tau) = \frac{2 Q_0}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[R^2 \xi_i^2 + (a+R-1)^2]}{[R^2 \xi_i^2 + a+R(a+R-1)]} \frac{\sin(\xi_i r)}{r \xi_i^2} [\sin(\xi_i R) + (1-R \xi_i \cos(\xi_i R))] \cdot [1 - \exp(-a \xi_i^2 \tau)] \quad (5)$$

Ejemplo 6,9-2.

Una esfera de acero de 3 cm de diámetro se calienta en horno de inducción con una generación uniforme de 10^6 (kcal/h m³) La temperatura inicial es de 20°C y el coeficiente de transmisión de calor al ambiente vale 20 (kcal/h m² °C) Se desea conocer el tiempo necesario para que el centro de la esfera alcance 500°C .

Datos: $k = 16$ (kcal/h m °C) $\rho = 7800$ (kg/m³) $C_p = 0,12$ (kcal/kg °C)

Solución:

La ec.6,9-2(5) es indeterminada en $r = 0$. Hallando el límite se tiene

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(\xi_i r)}{r} = \frac{\cos(\xi_i r)}{\xi_i} = \frac{1}{\xi_i}$$

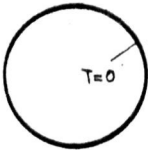
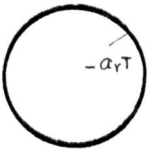
Las raíces ξ_i para $(h/k) \cdot R = (20/16) \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} = 2,18 \cdot 10^{-2}$ se obtiene por la tabla I-3(6) Apéndice I

$$\xi_1 R = 0,23 \quad \xi_2 R = 4,5 \quad \xi_3 R = 7,72 \quad \xi_4 R = 10,90$$

Sustituyendo valores se tiene

$$T(0, \tau) \approx 2460 [1 - \exp(-3,82 \tau)]$$

Para alcanzar $T(0, \tau) = 480$ (°C) se necesita un tiempo aproximado de 3,5 minutos y $T = 480 + 20 = 500$ (°C)

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|---|---|---|
|  <p data-bbox="105 402 246 425">Fig. 6,9-1</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T=0 \quad r=R \quad z > 0$ $Q = Q_0 = \text{cte}$ | $T(r, z) = \frac{2Q_0}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi_m r)}{\xi_m^3 r} [1 - \exp(-\alpha \xi_m^2 z)] \cdot (-1)^m$ $\xi_m = \frac{m\pi}{R}$ |
|  <p data-bbox="105 675 246 699">Fig. 6,9-2</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -\alpha_r T \quad z > 0$ $\alpha_r = \frac{h}{R}$ $Q = Q_0 = \text{cte}$ | $T(r, z) = \frac{2Q_0}{kR} \sum \frac{[\xi_i^2 R^2 + (\alpha_r R - 1)^2] \sin(\xi_i r)}{[R^2 \xi_i^2 + \alpha_r R (\alpha_r R - 1)] \xi_i^2} \left[\sin(\xi_i R) + (1 - R \xi_i \cos(\xi_i R)) \right] \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ $\xi_i, \text{ raíces de } \xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) + \alpha_r R - 1 = 0$ |

Bibliografia

- ARPACI, V.C., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley Publ.Co.
London (1966).
- AYERS, D.L., Transient Cooling of a Sphere in Space, Trans. ASME
92, 80 (1970).
- BEJAN, A., Transient Heat Conduction in Criogenic Current Cables
Following a Loss of Coolant Accident, J.Heat Transfer Trans.
ASME 99, C, 4 (1977).
- BECK, J.V., Transient Determination of Thermal Properties, Nucl.
Eng.and Design, 3, 373-81 (1966).
- CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C., Conduction of Heat in Solids, Ox
ford at the Clarendon Press, 2nd Ed. London (1959).
- COOPER, H.F., Transient and Steady State Temperature Distribution
in Foil Wound Solenoids and Other Electrical Apparatus of Rec-
tangular cross Sections, IEE Trans.on Parts, Materials and Pac-
kaging, Vol. PMP-2 March-June (1966).
- HIGGING, S.T.J., Temperature Distribution in Toroidal Electrical
Coils of Rectangular cross Sections, Franklin Inst. J. 240,
97-112 (1945).
- INGERSOL, L.R.-ZOBEL, O,J, and INGERSOL, A.C.m Heat Conduction
with Engineering Applications, McGraw-Hill, New York (1948).
- JALURIA, Y., A. Study of Transient Heat Transfer in Long Insulated
Wires, J.Heat Transfer Trans.ASME, 98, 127 (1976).
- JAKOB, M., Heat Transfer, Jhon Wiley and Sons Inc., New York
(1956).
- HOLY, Z.J., Temperature and Stresses in Reactor Fuel Elements due
to Time, Space dependent Heat Transfer Coefficients, Nucl.Eng.
and Design, 18, 147-97, (1972).

- LANCE, Cylindrical Transient Inverse Heat Conduction, Nucl.Eng. and Design, 39, 249-55 (1976).
- LASSMANN, K., Uranus. A Computer Programme for the Thermal and Mechanical Analysis of the Fuel Rods in a Nuclear Reactor, Nucl. Eng. and Design, 45, 325-42 (1978).
- OZISIK, M.N., Boundary Value Problems of Heat Conduction Int. Text-Book, Scranton, Pa. (1968).
- PFENNIGWERTH, P.L., Heat Transfer and Fluid Flow with Applications to Pressurized Water Reactors, Vol. I, II, WAPD-TM-1000, U.S. Department of Commerce, EE.UU. (1971).
- SCHNEIDER, P.J., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley Publ.Co. Inc., Cambridge, Mass. (1955).
- TONG, L.S. and WEISMAN, J., Thermal Analysis of Pressurized Water Reactors, American Nuclear Society, EE.UU. (1970).

CAPITULO 7

TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION EN REGIMEN TRANSITORIO CON TEMPERATURAS SUPERFICIALES FUNCION DEL TIEMPO

INTRODUCCION

En los capítulos 5 y 6 se ha considerado el régimen transitorio con respecto al sólido, admitiendo que las temperaturas en la superficie permanecen constantes, lo que equivale a decir que la inercia térmica del medio que rodea al sólido es elevada. Esta situación, corresponde a una gran masa de materia o fluido frente a un sólido de dimensiones pequeñas. Cuando no existe tal diferencia, el medio cambia su temperatura por efecto del cambio de temperaturas en el sólido. En otros casos, varía la temperatura del medio por condiciones exteriores, como sucede con el aire sometido a cambios atmosféricos o de radiación solar.

En los problemas que se tratan en este capítulo, se admite que el coeficiente de transmisión de calor por convección y radiación permanece constante y con un valor poderado en el intervalo de temperaturas de cada problema particular.

Los cambios de temperaturas superficiales aumentan la complejidad de los métodos de cálculo respecto a los desarrollados en los capítulos anteriores y también aumenta el número de casos y aplicaciones. La ecuación que representa la transmisión de calor en ausencia de generación en el sólido, se expresa por la ecuación

$$\nabla(k \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

y las funciones del tiempo en las temperaturas superficiales se introducen en las condiciones de contorno, tales como $T_s(\tau)$ para la superficie del cuerpo o $\frac{\partial T}{\partial x} = \pm \frac{h}{k}(T - t(\tau))$ donde $t(\tau)$ representa la temperatura del fluido que rodea al sólido. La presen-

cia simultánea de generación de calor conduce a la ecuación

$$\nabla(k \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} - Q \quad (2)$$

donde Q puede ser constante o función de la posición y/o del tiempo.

El tratamiento de cálculo que se da en este capítulo cubre múltiples aplicaciones, por la generalidad de las transformaciones de Fourier o Hankel combinadas con las transformaciones y convoluciones de Laplace. Aunque los casos desarrollados se refieren a la ec. (1), cuando existe generación de calor, las soluciones se obtienen cómodamente con las desarrolladas en los capítulos anteriores. La generación de calor en la superficie por flujos térmicos variables y régimen transitorio puede resolverse por el mismo procedimiento, pero su cálculo se incluye en el capítulo 8, por razones de sencillez y generalidad que el lector observará fácilmente.

7.1.1. Sólido semiinfinito con temperaturas superficiales función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & 0 < x < \infty & \tau < 0 \\ T_{x_0}(\tau) & x=0 & \tau > 0 \\ T=0 & x=\infty & \tau > 0 \end{array} \quad (2)$$

aplicando a la ec. (1) las transformadas de Laplace

$$L\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2 f(s)}{dx^2}$$

$$L\left[\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}\right] = -\frac{1}{\alpha} (T_{x_0})_{\tau=0} + \frac{s}{\alpha} f(s)$$

Y si por las condiciones (2) $(T_{x_0})_{\tau=0} = 0$ resulta

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} = \frac{s}{\alpha} f(s) \quad (3)$$

Resolviendo la ec. (3) por transformadas de Laplace haciendo:

$$L[f(s)] = f(p)$$

$$p^2 f(p) - p A - B = \frac{s}{\alpha} f(p)$$

$$f(p) = A \frac{p}{p^2 - \frac{s}{\alpha}} + \frac{B}{p^2 - s/\alpha}$$

y por la inversión de $f(p)$

$$f(s) = A \cosh(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x) + \sqrt{\frac{s}{\alpha}} B \sinh(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x) \quad (4)$$

La ec. (4) puede escribirse

$$f(s) = C_1 \exp(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x) + C_2 \exp(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x)$$

Para $x = \infty$ $f(s)$ vale cero y $C_1 = 0$ y en $x=0$ $L[T_{x_0}(z)] = C_2$
y

$$f(s) = L[T_{x_0}(z)] \exp(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x) \quad (5)$$

y si la inversión

$$\begin{aligned} L^{-1}[\exp(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x)] &= \frac{x}{2\sqrt{\alpha\pi}} z^{-3/2} \exp(-x^2/4\alpha z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\text{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}\right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha z}} \exp(-x^2/4\alpha z) dz \right] = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \exp(-x^2/4\alpha z) dz \end{aligned}$$

y por la convolución de Laplace se obtiene la expresión de Duhamel

$$T(x, z) = \int_0^z T_{x_0}(z^*) \times \frac{\exp[-x^2/4\alpha(z-z^*)]}{2\sqrt{\alpha\pi}(z-z^*)^{3/2}} dz^* = \int_0^z T_{x_0}(z^*) \frac{\partial}{\partial z} \text{fer}\left(\frac{x}{2\sqrt{(z-z^*)\alpha}}\right) dz^* \quad (6)$$

Haciendo el cambio de variables $z-z^* = \frac{x^2}{4\alpha \xi^2}$; $dz^* = \frac{4\sqrt{\alpha}}{x} \sqrt{(z-z^*)} d\xi$

y los límites $\xi = x/2\sqrt{\alpha\tau}$ para $\tau^* = 0$ y ∞ para $\tau = \tau^*$

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\alpha\tau}}^{\infty} T_{x0} \tau \exp(-\xi^2) d\xi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\alpha\tau}}^{\infty} T_{x0} \frac{x^2}{4\alpha\xi^2} \exp(-\xi^2) d\xi \quad (7)$$

a) Si $T_{x0}(\tau) = T_{x0} \tau$ Fig. 7-1(a)

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\alpha\tau}}^{\infty} T_{x0} \tau \exp(-\xi^2) d\xi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\alpha\tau}}^{\infty} T_{x0} \frac{x^2}{4\alpha\xi^2} \exp(-\xi^2) d\xi$$

y si

$$\int_{x/2\sqrt{\alpha\tau}}^{\infty} \frac{\exp(-\xi^2)}{\xi^2} d\xi = - \left[\frac{\exp(-\xi^2)}{\xi} \right]_{x/2\sqrt{\alpha\tau}}^{\infty} - 2 \int_{x/2\sqrt{\alpha\tau}}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi$$

$$= \frac{2\sqrt{\alpha\tau}}{x} \exp(-x^2/4\alpha\tau) - \sqrt{\pi} \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$$

$$T(x, \tau) = T_{x0} \tau \left[\left(1 + \frac{x^2}{2\alpha\tau}\right) \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) - \frac{x}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} \exp(-x^2/4\alpha\tau) \right] \quad (8)$$

donde $\operatorname{ferc}(x/2\sqrt{\alpha\tau})$ es la función de error complementaria de $x/2\sqrt{\alpha\tau}$ véase Apéndice I-6.

b) Si $T = T_0$ para $0 < \tau$ y $T = T_{x0}$ para $\tau > 0$ por la ec. (6)

$$T(x, \tau) = T_0 \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) + (T_{x0} - T_0) \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha(\tau - \tau^*)}}\right) \quad (9)$$

c) Análogamente para $T_{x0}(\tau) = T_{x0} \tau^{n/2}$ $n = 1, 2, 3, \dots$ fig. 7-1(c)
si

$$L[T_{x0} \tau^{n/2}] = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{s^{n/2 + 1}}$$

$$T(x, \tau) = T_{x0} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) (\alpha\tau)^{n/2} \frac{i^{n-2}}{2n} \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) - \frac{x}{n} i^{n-1} \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$$

Los resultados anteriores pueden obtenerse por aplicación de la transformada del seno de Fourier si bien en algunos casos la inversión puede presentar expresiones más complicadas que las obtenidas por la aplicación de la convolución de Laplace o aplicación de la expresión de Duhamel.

7,1-2. Sólido seminfinito con temperaturas superficiales periódicas.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} T &= 0 & 0 < x < \infty & \tau < 0 \\ T &= T_{x_0} \cos(\omega \tau - \varphi) & x = 0 & \tau > 0 \\ T &= 0 & x = \infty & \tau > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Con los resultados del apartado 7,1-1 la solución puede obtenerse por distintos caminos.

a) A partir de la ec. 7,1-1(7) se tiene

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T_{x_0} \cos \left[\omega \left(\tau - \frac{x^2}{4\alpha^2 \xi^2} \right) - \varphi \right] \exp(-\xi^2 \tau) d\xi \quad (3)$$

y si

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \left[\omega \left(\tau - \frac{x^2}{4\alpha^2 \xi^2} \right) - \varphi \right] \exp(-\xi^2 \tau) d\xi &= \exp \left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right) \cdot \cos \left(\omega \tau - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} - \varphi \right) \\ T(x, \tau) &= T_{x_0} \exp \left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \right) \cos \left(\omega \tau - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} - \varphi \right) - \frac{2 T_{x_0}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} \cos \left(\omega \left(\tau - \frac{x^2}{4\alpha^2 \xi^2} \right) - \varphi \right) \exp(-\xi^2 \tau) d\xi \end{aligned} \quad (4)$$

b) Aplicando la inversión de la ec. 7,1-1(5)

$$T(x, \tau) = L^{-1} \left[L \left[T_{x_0} \cos(\omega \tau - \varphi) \right] \exp \left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x \right) \right] \quad (5)$$

y si

$$L \left[\cos(\omega \tau - \varphi) \right] = \frac{s \cos \varphi}{s^2 + \omega^2} + \frac{\omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$$

por el teorema de la inversión, Apéndice I-4

$$T(x, \tau) = \frac{T_{x_0}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \left(\frac{s \cos \varphi + \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} \right) \exp(s\tau - \sqrt{\frac{s}{\alpha}} x) ds \quad (6)$$

Realizando la integración de (6) en el campo complejo

$$T(x, \tau) = T_{x0} \exp(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) \cos(\omega\tau - \varphi - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) - \frac{2T_{x0}\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\omega \sin \varphi + \alpha \xi^2 \cos \varphi)}{\omega^2 + (\alpha \xi^2)^2} \xi \exp(-\alpha \xi^2 \tau) d\xi \quad (7)$$

c) Aplicando a la ec. (1) la transformada del seno de Fourier resulta

$$-\xi^2 \bar{f}_F(\xi, \tau) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_{x0} \cos(\omega\tau - \varphi) = \frac{1}{\alpha} \frac{df_F}{d\tau} \quad (8)$$

con la inversión

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f_F(\xi, \tau) \sin(x\xi) d\xi \quad (9)$$

Aplicando a la ec. (8) las transformadas de Laplace

$$f(\xi) = \frac{2\alpha T_{x0}}{\sqrt{\pi}} \xi \frac{\xi \cos \varphi + \omega \sin \varphi}{(\xi^2 + \omega^2)(\xi + \alpha \xi^3)}$$

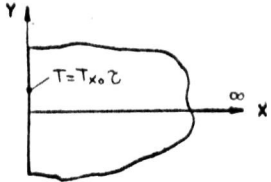
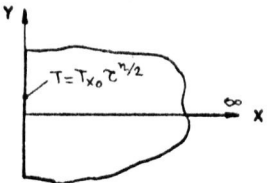
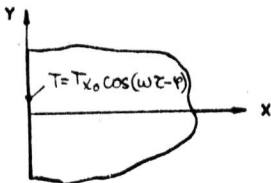
y por la inversión de $f(\xi)$ teniendo en cuenta la convolución de Laplace

$$\bar{f}_F(\xi, \tau) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} T_{x0} \xi \int_0^\tau \cos[\omega(\tau^* - \tau) - \varphi] \exp(-\alpha \xi^2 \tau^*) d\tau^* \quad (10)$$

$$= \frac{2\alpha T_{x0} \xi}{\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(\frac{-\alpha \xi^2 \tau^*}{\alpha \xi^2 \tau^2 + \omega^2}\right) (\omega (\sin \omega(\tau^* - \tau) \cos \varphi - \sin \varphi \cos \omega(\tau^* - \tau)) - \alpha \xi^2 (\omega \cos \omega(\tau^* - \tau) \cos \varphi + \sin \omega(\tau^* - \tau) \sin \varphi)) \right]_{\tau=0}^{\tau=\tau^*} \quad (11)$$

y por aplicación de la inversión (9) y realizando las integraciones se tiene

$$T(x, \tau) = T_{x0} \exp(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) \cos(\omega\tau - \varphi - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) - \frac{2T_{x0}\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\omega \sin \varphi + \alpha \xi^2 \cos \varphi)}{(\alpha \xi^2)^2 + \omega^2} \xi \exp(-\alpha \xi^2 \tau) d\xi \quad (12)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|--|---|
|  <p>Fig. 7,1-1(a)</p> | $T = 0 \quad 0 < x < \infty \quad z < 0$ $T = T_{x_0} \tau \quad x = 0 \quad z > 0$ | $T(x, z) = T_{x_0} \tau \left[\left(1 + \frac{x^2}{2\alpha z} \right) \operatorname{ferc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} \right) - \frac{x}{\sqrt{\pi \alpha z}} \exp \left(-\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} \right) \right]$ $\operatorname{ferc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} \right) \text{ (véase Apéndice I-6)}$ |
|  <p>Fig. 7,1-1(c)</p> | $T = 0 \quad 0 < x < \infty \quad z < 0$ $T = T_{x_0} \tau^{n/2} \quad x = 0 \quad z > 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$ | $T(x, z) = T_{x_0} \Gamma \left(\frac{n}{2} + 1 \right) (\alpha z)^{n/2} \frac{i^{n-2}}{2n} \operatorname{ferc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} \right) - \frac{x}{n} i^{(n-1)} \operatorname{ferc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} \right)$ |
|  <p>Fig. 7,1-2</p> | $T = 0 \quad 0 < x < \infty \quad z < 0$ $T = T_{x_0} \cos(w\tau - \varphi) \quad x = 0 \quad z > 0$ | $T(x, z) = T_{x_0} \exp \left(-x \sqrt{\frac{w}{2\alpha}} \right) \cos(wz - \varphi - x \sqrt{\frac{w}{2\alpha}}) - \frac{2T_{x_0}\alpha}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{(w \sin \varphi + \alpha \xi^2 \cos \varphi)}{(w^2 + (\alpha \xi^2)^2)} \xi \exp(-\alpha \xi^2 z) d\xi$ $\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha z}}$ |

Como puede observarse la aplicación de los distintos métodos conduce como es lógico a los mismos resultados. De las ecuaciones (4), (7) y (12) se desprende:

1. La aparición de un término exponencial transitorio que desaparece cuando el tiempo aumenta.
2. La temperatura es oscilante con amplitud decreciente dada por la expresión

$$T_{x_0} \exp(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) = \exp(-2\pi x / \lambda)$$

donde λ es la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}} = 2\sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$ siendo f la frecuencia $\omega/2\pi$.

3. Se produce una disminución de la fase dada por, $x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$
4. La velocidad de propagación dentro del sólido vale $v = \sqrt{2\alpha\omega}$

Ejemplo 7,1-2.

Las oscilaciones de temperatura en la superficie de la tierra en una región determinada son de tipo coseno con valores máximos y mínimos durante un día de 39°C y 20°C si las propiedades térmicas del terreno son, $C_p = 0,4$ (Kcal/Kg°C), $k = 0,5$ (Kcal/h m°C) $\rho = 1500$ (Kg/m³) se desea conocer:

- a) Ecuación de la temperatura en la superficie en función del tiempo.
- b) Ecuación de la temperatura a 10 cm de profundidad.
- c) Flujos térmicos en la superficie y 20 cm de profundidad.
- d) Calor acumulado.

Solución:

a) La temperatura media vale

$$\frac{29,4 + 20}{2} = 29,5 \text{ (}^\circ\text{C)} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} ; \omega = \frac{2\pi}{2,4} = 0,26 \left(\frac{1}{h}\right)$$

si el régimen es estacionario

$$T = 29,5 + 9,5 \cos(0,26 \tau)$$

b) Aplicando la ec. 7,1-2(12) sin término transitorio

$$\alpha = \frac{0,5}{0,4 \cdot 1500} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ (m}^2/\text{h)} \quad \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} = 12,5$$

$$T(0,1) = 29,5 + 9,5 \exp(-1,25) \cos(\omega \tau - 1,25) = 29,5 + 2,72 \cos(0,26 \tau - 1,25)$$

con una variación de amplitud de $9,5^\circ\text{C}$ a $2,72^\circ\text{C}$. Si en la ecuación de a) $\cos(0,26 \tau) = 0$; $0,26 \tau = \pm \frac{\pi}{2}$ mientras que para

b) debe cumplirse $\tau = \pm \frac{\pi}{2} - 1,25/0,26$ y el retraso de la onda térmica $\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - 4,8) = 3,22 \text{ (h)}$ y para cualquier distancia

$\Delta \tau = \sqrt{2\alpha/\omega} \cdot x$ La longitud de onda $= 2\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} = 0,5 \text{ (m)}$
y la velocidad de propagación, $v = \sqrt{2\alpha\omega} = 2,07 \text{ (cm/h)}$

c) Por derivación de la ec. 7,1-2(12) sin término transitorio

$$\left(\frac{q}{S}\right) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x = T_{x_0} k \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \exp(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) \left[\cos(\omega \tau - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) - \sin(\omega \tau - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) \right]$$

En $x=0$ y $\tau=0$ (régimen estacionario)

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(0,0)} = 9,5 \cdot 0,5 \cdot 12,5 [\cos(0,26 \tau) - \sin(0,26 \tau)] = 59 \text{ (Kcal/h m}^2\text{)}$$

En $x=0,1$ y $\tau=0$ (régimen estacionario)

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(0,1,0)} = 2,72$$

d) El calor acumulado en un tiempo τ en un espesor x vale

$$Q(\tau) = \int_0^x q_x dx = T_{x_0} k \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \left[\cos(\omega \tau) - \sin(\omega \tau) \right] \int_0^x \exp(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) \left(\cos(x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) - \sin(x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}) \right) dx$$

y si

$$\int_0^x \exp(-x \sqrt{\frac{W}{2\alpha}}) (\cos(x \sqrt{\frac{W}{2\alpha}}) - \sin(x \sqrt{\frac{W}{2\alpha}})) dx = \sqrt{\frac{2\alpha}{W}} \exp(-x \sqrt{\frac{W}{2\alpha}})$$

$$\frac{Q(\tau)}{S} = \frac{1}{x} \cdot 9,5 \cdot 0,5 \cdot 12,5 [\cos(0,26\tau) - \sin(0,26\tau)] \cdot \frac{1}{2,5} \exp(-x \sqrt{\frac{W}{2\alpha}})$$

y para $x = 0,1$

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tau)}{S} &= 2,72 \cdot \frac{0,5}{0,1} [\cos(0,26\tau) - \sin(0,26\tau)] \\ &= 136 [\cos(0,26\tau) - \sin(0,26\tau)] \text{ (Kcal/m}^2\text{)} \end{aligned}$$

7,1-3. Sólido semiinfinito con convección función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones

$$T=0 \quad 0 < x < \infty \quad \tau < 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_x (T - t_o(\tau)) \quad x=0 \quad \tau > 0$$

y t_o es la

temperatura del fluido función del tiempo.

Aplicando a la ec. (1) las transformadas de Laplace

$$\frac{d^2 f(s)}{dx^2} = \left[\frac{1}{\alpha} \exp(-s\tau) \right]_0^\infty + \frac{s}{\alpha} f(s)$$

donde

$$f(s) = \int_0^\infty T(x, \tau) \exp(-s\tau) d\tau \quad \text{y si } T=0 \quad \tau=0 \quad \tau=\infty \quad \frac{d^2 f(s)}{dx^2} = \frac{s}{\alpha} f(s)$$

Resolviendo (3) por transformadas de Laplace con $f(p) = \int_0^\infty f(s) \exp(-px) dx$
 $p^2 f(p) - A(p) - B = \frac{s}{\alpha} f(p)$

y por la inversión de $f(p)$

$$f(s) = A \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) + B \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) \quad (4)$$

Si $T=0$ en $x=\infty$ los términos exponenciales positivos de \cosh y \sinh no deben intervenir en (4) y

$$f(s) = C_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) \quad (5)$$

con las condiciones en $x = 0$

$$\alpha_x \left(f(s)_0 - L[t_0(\tau)] \right) = C_1 \sqrt{\frac{s}{\alpha}}$$

y sustituyendo en $x = 0$

$$C_1 = \frac{-\alpha_x f(s)_0 + \alpha_x L[t_0(\tau)]}{\sqrt{s/\alpha}}$$

y sustituyendo (5)

$$f(s)_0 \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + \alpha_x \right) = \alpha_x L[t_0(\tau)]$$

y finalmente

$$T(x, \tau) = L^{-1} \left[\frac{\alpha_x L[t_0(\tau)] \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right)}{\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + \alpha_x\right)} \right] \quad (6)$$

Si

$$L^{-1} \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) \right] = \left(\frac{2}{2\sqrt{\alpha x}} \right) \cdot \tau^{-3/2} \exp\left(-x^2/4\alpha\tau\right)$$

por la convolución de Laplace la ec. (6) toma la forma de las ecuaciones 7,1-1(6)-(7) sustituyendo T_x por t_0

a) Para $t_0(\tau) = C_2 = t_0$ $L[t_0] = f_0/s$

$$T(x, \tau) = L^{-1} \left[\frac{\alpha_x t_0}{s \left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + \alpha_x \right)} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x\right) \right] \quad (7)$$

Por las tablas de inversión, Apéndice I, tabla I-7(115)

$$T(x, z) = t_0 \left[\operatorname{fenc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} \right) - \exp(\alpha_x x + \alpha_x^2 \alpha z) \operatorname{fenc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha z}} + \alpha_x \sqrt{\alpha z} \right) \right] \quad (8)$$

La ec. (8) es la obtenida en el apartado 5,1-3.

b) Si $t_0(z) = t_0 \omega(\omega z - \varphi)$

y si $\cos(\omega z - \varphi) = \cos(\omega z) \cos \varphi + \sin(\omega z) \sin \varphi$

y $L[\cos(\omega z)] = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2}$ $L[\sin(\omega z)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$$T(x, z) = \alpha_x t_0 L^{-1} \left[\frac{\exp(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x)}{s(\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + \alpha_x)} \cdot \frac{s + \omega^2}{s^2 + \omega^2} \right] \quad (9)$$

Aplicando a la ec. (9) el teorema de la inversión

$$T(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s) \exp(sz) ds$$

$$T(x, z) = \frac{\alpha_x t_0}{\sqrt{(\alpha_x + \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}})^2 + \omega/2\alpha}} \exp(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x) \cos\left(\omega z - \varphi - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} + \arctg\left(\frac{\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}}{\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} + \alpha_x}\right)\right) - \frac{2\alpha\alpha_x}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\omega \cos \varphi - \alpha \xi^2 \sin \varphi) [\xi \cos(\xi x) + \alpha_x \sin(\xi x)]}{[(\alpha \xi^2)^2 + \omega^2] [\alpha_x^2 + \xi^2]} \exp(-\alpha \xi^2 z) d\xi \quad (10)$$

El primer término del segundo miembro corresponde al estado estacionario mientras que el segundo término transitorio. Lo mismo que en el apartado 7,1-2 se producen cambios de amplitud y fase de las ondas de temperatura en función de la distancia x .

Ejemplo 7,1-3.

Un bloque plano de acero que se encuentra a 20°C se calienta con una masa de gas que inicialmente tiene 20°C y aumenta 100°C/h , hasta alcanzar la temperatura de $t = 550^\circ\text{C}$. Las propiedades térmicas del acero pueden considerarse constantes

$\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ $c_p = 0,11 \text{ (kcal/kg}^\circ\text{C)}$, $k = 18 \text{ (kcal/hm}^\circ\text{C)}$ El coeficiente de transmisión de calor vale $200 \text{ (kcal/hm}^2\text{C)}$. Se desea conocer:

- a) Las temperaturas en función del tiempo en un plano de la masa de acero situado a 25 cm de la superficie.

b) Flujos y gradientes térmicos en la superficie.

Solución:

a) Aplicando la ecuación 7,1-3(6) se tiene

$$\frac{t - T(x, z)}{t - 20} = 100 \alpha_x L^{-1} \left[\frac{L(\tau)}{(\sqrt{\frac{x}{\alpha_x}} + \alpha_x)} \exp(-\sqrt{\frac{x}{\alpha_x}}) \right]$$

$$L[(\tau)] = 1/s^2 \quad \text{y por la inversión de } L^{-1}[\quad] \quad \text{tabla I-7(117)}$$

Apéndice I

$$L^{-1}[\quad] = -\frac{\alpha}{\alpha_x} \exp(\alpha_x x + \alpha_x^2 \tau) \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_x \tau}} + \alpha_x \sqrt{\alpha_x \tau}\right) + \left(\frac{\alpha}{\alpha_x} - 2\alpha \sqrt{\alpha_x \tau}\right) \operatorname{ferc}\frac{x}{2\sqrt{\alpha_x \tau}}$$

$$\text{y si } i \operatorname{ferc}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2) - y \operatorname{ferc}(y)$$

$$T(x, z) = t - (t - 20) \cdot \frac{100}{\alpha_x} \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha_x} + \frac{\alpha_x}{2\sqrt{\alpha_x \tau}} \right) \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_x \tau}} + \alpha_x \sqrt{\alpha_x \tau}\right) - \frac{2\alpha \sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha_x \tau}\right) - \frac{\alpha}{\alpha_x} \exp(\alpha_x x + \alpha_x^2 \tau) \right]$$

$$\alpha = \frac{k}{g \rho} = \frac{18}{7800 \cdot 0,11} = 0,021 \quad \frac{x}{2\sqrt{\alpha_x \tau}} = \frac{0,86}{\sqrt{\tau}} \quad \alpha_x = \frac{200}{18} = 11,1$$

$$T(x, z) = t - (t - 20) \cdot \frac{100}{11,1} \left[\left(1,9 \cdot 10^{-3} + \frac{0,018}{\sqrt{\tau}} \right) \operatorname{ferc}\frac{0,86}{\sqrt{\tau}} - 1,9 \cdot 10^{-3} \exp(-0,74/\tau) - 1,9 \cdot 10^3 \cdot \exp(2,77 + 2,58 \tau) \operatorname{ferc}\left(\frac{0,86}{\sqrt{\tau}} + 1,60 \sqrt{\tau}\right) \right]$$

$$\text{Para } \tau = 1(h) \quad T(0,25,1) = 120 - 3,5 = 116(^{\circ}C)$$

$$\text{para } z = 5(h) \quad T(0,25,5) = 520 - 25 = 495(^{\circ}C)$$

b) El flujo térmico vale

$$\left(\frac{q}{S}\right) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(x, z)}$$

$$\text{teniendo en cuenta que } \frac{d}{dx} \left[\operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_x \tau}}\right) \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/4\alpha_x \tau)$$

y derivando la expresión anterior

$$\left(\frac{q}{S}\right)_{(x, z)} = (t - 20) \cdot \frac{100}{\alpha_x} \left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha_x \tau}} \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_x \tau}}\right) + \frac{\alpha_x}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/4\alpha_x \tau) - \frac{x^3}{2\alpha_x \tau} \exp(-x^2/4\alpha_x \tau) \right]$$

$$- \alpha \exp(\alpha x + \alpha a_x^2 \tau) \operatorname{ferc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha \tau}} + a_x \sqrt{\alpha \tau}\right) - \frac{2\alpha}{a_x \sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha \tau}} + a_x \sqrt{\alpha \tau}\right)^2\right] \cdot \exp(\alpha x + \alpha a_x^2 \tau) \Big] \cdot k$$

Para $x = 0$ $\operatorname{ferc}\left(x/2\sqrt{\alpha \tau}\right) = 1$

$$\left(\frac{q}{s}\right)_{(0,\tau)} = (1-2\alpha) \frac{100}{a_x} \left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha \tau}} - \alpha \exp(\alpha a_x^2 \tau) \operatorname{ferc}(a_x \sqrt{\alpha \tau}) - \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi} a_x} \right] k$$

Para $\tau = 1$ hora en $x = 0$

$$\left(\frac{q}{s}\right)_{(0,1)} = 1062 \text{ (Kcal/h.m}^2\text{)}$$

El gradiente térmico $-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x,\tau}$ y en $x = 0$ y $\tau = 1$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{0,1} = \frac{1.062}{18} = 59 \text{ (}^\circ\text{C/m)}$$

Ejemplo 7,2-2.

Una pared plana de 10 cm de espesor inicialmente a 0°C tiene una cara aislada mientras que la otra cara se calienta a una velocidad de 500°C/h . Al final de cada hora la temperatura se baja a 0°C y se repite este proceso durante 6 horas. La difusivi dad térmica del material es de $\alpha = 0.002 \text{ (m}^2\text{/h)}$. Se desea conocer la distribución de temperaturas en la pared a los 45 minutos.

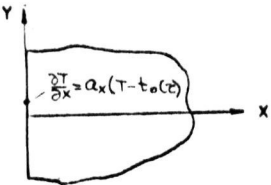
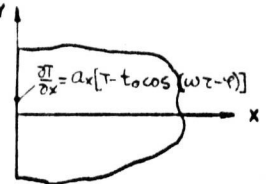
Solución:

a) Considerando una pared de 20 cm de espesor calentado por las dos superficies se tiene el caso de una pared de 10 cm aisla da en una de las superficies, obteniéndose la ec.7,2-1(7) con

$T_1(\tau) = T_2(\tau)$ y para un tiempo τ la temperatura en la super ficie vale $500 \cdot \tau$ donde τ se expresa en horas.

La inversión $L^{-1}\left[\frac{s T_1 (1-f)^m L[(\tau)]}{s + \alpha s^2}\right]$ aplicando la convolu ción de Laplace se tiene

$$L^{-1}\left[\right] = \int_0^\tau s T_1 (1-f)^m (\tau - \tau^*) \exp(-\alpha s^2 \tau^*) d\tau^* = \frac{T_1}{s} (1-f)^m \left[\tau - \frac{1}{\alpha s^2} + \frac{\exp(-\alpha s^2 \tau)}{\alpha s^2} \right]$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|--|
|  <p>Fig. 7,1-3</p> | $T=0 \quad 0 < x < \infty \quad \tau < 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = a_x (T - t_0(\tau)), \quad x=0, \tau > 0$ $T=0 \quad x=\infty \quad \tau > 0$ $a_x = \frac{h_x}{k}$ | $T(x, \tau) = L^{-1} \left[\frac{a_x L[t_0(\tau)]}{\sqrt{\frac{s}{\alpha}} + a_x} \exp(-\sqrt{\frac{s}{\alpha}} x) \right]$ $L[t_0(\tau)] = \int_0^{\infty} \exp(-s\tau) \cdot t_0(\tau) d\tau$ |
|  <p>Fig. 7,1-4</p> | $T=0 \quad 0 < x < \infty \quad \tau < 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = a_x [T - t_0 \cos(\omega\tau - \varphi)], \quad x=0, \tau > 0$ $T=0 \quad x=\infty \quad \tau > 0$ $a_x = \frac{h_x}{k}$ | $T(x, \tau) = \frac{a_x t_0}{\sqrt{(a_x + \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}})^2 + \frac{\omega}{2\alpha}}} \exp(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x) \cdot \cos[\omega\tau - \varphi - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}}{a_x + \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}})]$ $- \frac{2 a_x a_x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\omega \cos \varphi - \alpha \xi^2 \sin \varphi) [\xi \cos(\xi x) + a_x \sin(\xi x)]}{[\omega^2 + (\alpha \xi^2)^2] [a_x^2 + \xi^2]} \exp(-\alpha \xi^2 \tau) d\xi$ $\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha \tau}}$ |

Sustituyendo en la ecuación de inversión de la transformada finita del seno de Fourier 7,2-1(4)

$$T(x, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_1}{\xi} (1 - (-1)^m) \sin(\xi x) \left[\tau + \frac{1}{\alpha \xi^2} - \frac{\exp(-\alpha \xi^2 \tau)}{\alpha \xi^2} \right]$$

Puede apreciarse la aparición del término transitorio exponencial con el término periódico en τ . $L_x = 0,20 \text{ m}$ y $\xi = \frac{\pi m}{L_x}$

Para $45 (\text{min}) = 0,75 (\text{h})$

$$T(x, 0,75) = \frac{4}{L_x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T_1}{\xi} \sin(\xi x) \left[\tau - \frac{1}{\alpha \xi^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 \tau)) \right] \quad \xi = \frac{\pi}{L_x} (2m+1)$$

En particular para la superficie aislada $x = \frac{L_x}{2}$

$$\begin{aligned} T\left(\frac{L_x}{2}, 0,75\right) &= \frac{4.500}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2m+1)\pi}{2}\right]}{(2m+1)} \left[0,75 - \frac{2,02}{(2m+1)^2} (1 - \exp(-0,49(2m+1)^2 \cdot 0,75)) \right] \\ &= 127 (^\circ\text{C}) \end{aligned}$$

7,2-1. Pared plana con temperaturas superficiales función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Con las condiciones

$$\begin{aligned} T &= 0 & 0 < x < L_x \\ T &= T_1(\tau) & x = 0 & \tau > 0 \\ T &= T_2(\tau) & x = L_x & \tau > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, z) + \xi [T_1(z) - (-1)^m T_2(z)] = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{f}_F^s}{dz} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(x, z) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) f_F^s(\xi, z) \quad \xi = \frac{m\pi}{L_x} \quad (4)$$

Aplicando a la ec. (3) la transformada de Laplace $f(s) = \int_0^{\infty} \bar{f}_F^s \exp(-st) dz$

$$-\alpha \xi^2 f(s) + L[\alpha \xi (T_1(z) - (-1)^m T_2(z))] = s f(s) - A. \quad (5)$$

$$f(s) = \frac{L[\alpha (T_1(z) - (-1)^m T_2(z))] + A}{(s + \alpha \xi^2)} \quad (6)$$

$$\text{En } z=0 \quad f(s)=0 \quad A=0$$

y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_F^s(\xi, z) = L^{-1} \left[\frac{L[\alpha \xi T_1(z) - (-1)^m T_2(z)]}{s + \alpha \xi^2} \right]$$

y por (4)

$$T(x, z) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) L^{-1} \left[\frac{L[\alpha \xi T_1(z) - (-1)^m T_2(z)]}{s + \alpha \xi^2} \right] \quad (7)$$

Como puede observarse a partir de la ecuación (7) pueden obtenerse soluciones para distintas funciones $T_1(z)$ y $T_2(z)$ con simple manejo de las transformadas de Laplace y sus inversas. En el apéndice se incluyen tablas de Laplace para soluciones que presenten mayor complicación.

- a) Para $T_1(z) = T_1 z$ $T_2(z) = T_2 z$

$$L[T_1 z] = \frac{T_1}{s^2} \quad L[T_2 z] = \frac{T_2}{s^2}, \quad L^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s + \alpha \xi^2)} \right] = \frac{1}{\alpha \xi^2} \left[z - \frac{1}{\alpha \xi^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right]$$

$$T(x, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[T_1 - (-1)^m T_2]}{m} \sin \left(\frac{m\pi x}{L_x} \right) \left[z - \frac{1}{\alpha \xi^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right] \quad (8)$$

- b) $T_1(z) = T_1$ $T_2(z) = T_2 z$

$$L[T_1] = \frac{T_1}{s}; \quad L^{-1} \left[\frac{\alpha \xi T_1}{s(s+\xi^2)} - \frac{(-1)^m \alpha \xi T_2}{s^2(s+\xi^2)} \right] = \frac{T_1}{\xi} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) - \frac{(-1)^m T_2}{\xi} \left[z - \frac{1}{\alpha \xi^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right]$$

$$T(x, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \left[T_1 (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) - (-1)^m T_2 \left(z - \frac{1}{\alpha \xi^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right) \right] \quad (9)$$

- c) Si $T_1(z) = T_1 \exp(-bz)$ $T_2(z) = T_2 \exp(-cz)$

$$L[T_1(z)] = \frac{T_1}{s+b} \quad L[T_2(z)] = \frac{T_2}{s+c}$$

$$L^{-1} \left[\frac{\alpha \xi T_1}{(s+b)(s+\alpha \xi^2)} - \frac{(-1)^m \alpha \xi T_2}{(s+c)(s+\alpha \xi^2)} \right] = \frac{\alpha \xi}{b - \alpha \xi^2} [T_1 \exp(-\alpha \xi^2 z) - T_2 \exp(-bz)] - \frac{(-1)^m \alpha \xi}{(c - \alpha \xi^2)} \cdot$$

$$[T_1 \exp(-\alpha \xi^2 z) - T_2 \exp(-cz)]$$

$$T(x, z) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha \xi \sin(\xi x) \left[T_1 \exp(-\alpha \xi^2 z) \left(\frac{1}{b - \alpha \xi^2} - \frac{(-1)^m}{c - \alpha \xi^2} \right) + T_2 \left(\frac{(-1)^m \exp(-cz)}{c - \alpha \xi^2} - \frac{\exp(-bz)}{b - \alpha \xi^2} \right) \right] \quad (10)$$

- d) Si la temperatura inicial a $z=z^*$ es $T=T(x)$ el valor de A en la ecuación (6) vale

$$A = \int_0^{L_x} T(x') \sin(\xi x') dx'$$

donde las primas se introducen para evitar equivocaciones en la inversión y la solución teniendo en cuenta la convolución de Laplace, conocido en transmisión de calor como teorema de Duhamel. Si

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s + \alpha \xi^2} \right] = \exp(-\alpha \xi^2 z)$$

$$L^{-1} \left[\frac{L[T_1(z)]}{s + \alpha \xi^2} \right] = \int_0^z \exp(-\alpha \xi^2 (z - \tau^*)) T_1(\tau) d\tau^* = \int_0^z \exp(-\alpha \xi^2 \tau^*) T_1(z - \tau^*) d\tau^*$$

y la solución toma la forma

$$T(x, \tau) = \frac{2}{Lx} \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \sin(\xi x) \left[\int_0^{Lx} T(x') \sin(\xi x') dx' + \xi \int_0^{\tau} \exp(-\alpha \xi^2 \tau') \left[T_1(\tau - \tau') - (-1)^m T_2(\tau - \tau') \right] d\tau' \right] \quad (11)$$

Ejemplo 7,2-1.

Un recipiente destinado a contener sodio a 500°C tiene 1 cm de espesor de acero inoxidable con propiedades $\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$
 $c_p = 0,11 \text{ (Kcal/kg}^\circ\text{C)}$ $k = 20 \text{ (Kcal/h m}^\circ\text{C)}$ Antes de introducir sodio se calienta con gas inerte hasta alcanzar 100°C y posteriormente se recicla sodio con temperatura de 100°C aumentando 200°C/h hasta alcanzar 500°C. Si la superficie exterior se mantiene aislada, se desea conocer

a) Temperaturas en la superficie aislada en función del tiempo.

b) Gradientes térmicos en la pared.

Solución:

a) El problema puede tratarse como una pared plana infinita con coeficiente de transmisión elevado por tratarse de sodio fundido, buen conductor del calor. Por la ec. 7,2-1(8) se puede considerar una placa de 2 cm de espesor calentada a la misma temperatura en las superficies interna y externa y

$$T\left(\frac{Lx}{2}, \tau\right) = \frac{2Lx}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_1(1 - (-1)^m)}{\pi m \cdot m} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \left[\tau - \frac{1}{\alpha \left(\frac{\pi m}{Lx}\right)^2} \left(1 - \exp\left(-\alpha \left(\frac{\pi m}{Lx}\right)^2 \tau\right) \right) \right]$$

para valores pares de m los términos son cero y para valores impares son alternativamente positivos y negativos por el valor de $\sin \frac{m\pi}{2}$

$$T(1, \tau) = 100 + T\left(\frac{Lx}{2}, \tau\right) \quad \alpha = \frac{k}{\rho c_p} = 0,023$$

Dando valores

$$T(1, 1) = 100 + 200 = 300(^\circ\text{C})$$

$$T(1, 2) = 100 + 400 = 500(^\circ\text{C})$$

Es decir que prácticamente la temperatura de la superficie aislada sigue las temperaturas de la masa de sodio.

b)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_1 (1 - (-1)^m)}{m} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \left[\tau - \frac{1}{\alpha \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2} \left(1 - \exp\left(-\alpha \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \tau\right)\right)\right]$$

para $x = 0$

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x = 400 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\tau - \frac{1}{\alpha \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2} \left(1 - \exp\left(-\alpha \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \tau\right)\right)\right]$$

7.2-2. Pared plana con temperaturas superficiales periódicas.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T = 0 & 0 < x < L_x & \tau > 0 \\ T = T_{x_0} \cos(\omega \tau) & x = 0 & \tau > 0 \\ T = 0 & x = L_x & \tau > 0 \end{array} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (1) las transformadas finitas del seno de Fourier

$$-s^2 \bar{T}_F^s(x, \tau) + s T_{x_0} \cos(\omega \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F^s}{d \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(x, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(x, \xi\right) \bar{T}_F^s(\xi, \tau) \quad (4)$$

Resolviendo la ec. (3) por transformadas de Laplace, teniendo en cuenta que $L[\cos(\omega \tau)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ donde $f(s) = \int_0^{\infty} \bar{T}_F^s(\xi, \tau) \exp(-s\tau) d\tau$

$$-\alpha s^2 f(s) + \alpha \int_0^{\infty} T_{x_0} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = s f(s) + A$$

y si en $\tau = 0$ $T = 0$ por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_F^s(s, \tau) = L^{-1} \left[\alpha s T_{x0} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s + \alpha s^2} \right] \quad (5)$$

Por la convolución de Laplace

$$\begin{aligned} \bar{f}_F^s(s, \tau) &= \alpha s T_{x0} \int_0^\tau \cos(\tau - \tau^*) \exp(-\alpha s \tau^*) d\tau^* = \frac{\alpha s T_{x0}}{\omega^2 + (\alpha s^2)^2} \left[\alpha s^2 \cos(\omega \tau_c) \right. \\ &\quad \left. + \omega \sin(\omega \tau_c) - \alpha s^2 \exp(-\alpha s^2 \tau) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

y por la inversión (4)

$$T(x, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(s x) \frac{\alpha s T_{x0}}{\omega^2 + (\alpha s^2)^2} \left[\alpha s^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) - \alpha s^2 \exp(-\alpha s^2 \tau) \right] \quad (7)$$

La ecuación (7) exige una aclaración respecto al tiempo. Al poner

$\tau^* = 0$ en el límite inferior de la integral aparece un término estacionario que corresponde a un número de periodos completos que en las ec. (6) y (7) se ha simbolizado por $\omega \tau_c$ y un término transitorio comprendido entre el tiempo cero al tiempo τ en que comienza un nuevo ciclo. Si en la ec. (6) se hubiese colocado en el límite inferior otro tiempo τ_i éste correspondería hasta alcanzar el período cíclico y así la ecuación (7) para un tiempo $\tau_f = \tau_c + \tau$ puede escribirse

$$T(x, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha T_{x0} s \sin(s x)}{\omega^2 + (\alpha s^2)^2} \left[\alpha s^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) + \alpha s^2 \left[\exp(-\alpha s^2 \tau_i) - \exp(-\alpha s^2 \tau_f) \right] \right] \quad (8)$$

La ec. (8) pone de manifiesto la propagación ondulatoria de las temperaturas con cambio de amplitud y fase, aunque se ha omitido la fase inicial por comodidad de cálculo. Si fuese $\cos(\omega \tau \pm \varphi)$ la expresión (8) presenta términos con $\cos \varphi$, $\sin \varphi$

El tratamiento anterior se extiende a cualquier función periódica. El tratamiento por aplicación de las transformadas de Laplace se base en que la transformada de una función periódica es de la forma

$$L[T(\tau)] = f(s) = \frac{\int_0^{\tau_p} T(\tau) \exp(-s\tau) d\tau}{1 - \exp(-s\tau_p)} \quad (9)$$

donde τ_p es el período.

La ec. (10) con la ecuación general del problema en términos de la transformación de Laplace conduce a la inversión general

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s) \exp(-sx) ds \quad (10)$$

La ec. (10) se resuelve por integración en el campo complejo en la forma que se ha indicado en capítulos anteriores.

Por cualquiera de los procedimientos anteriores se obtienen soluciones para perfiles de temperaturas, de ondas o fracción n de ondas, cuadradas, triangulares, funciones trigonométricas, o cualquiera otra.

7,2-3. Pared plana con temperaturas superficiales y generación de calor función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q_0}{k}(\tau) \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & 0 < x < L_x & \tau < 0 \\ T=T_1(\tau) & x=0 & \tau > 0 \\ T=T_2(\tau) & x=L_x & \tau > 0 \end{array}$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{T}_f^s(\xi, \tau) + \xi [T_1(\tau) - (-1)^m T_2(\tau)] = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_f^s}{d\tau} + f_0(\tau) \quad (2)$$

donde

$$f_0(\tau) = \int_0^{L_x} -\frac{Q_0(\tau)}{k} \sin(\xi x) dx$$

con la inversión

$$T(x, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{T}_F^s(\xi, \tau) \quad (3)$$

Resolviendo la ec. (2) resulta

$$\bar{T}_F^s(\xi, \tau) = L^{-1} \left[\frac{L[\alpha \xi (T_1(\tau) - (-1)^m T_2(\tau))]}{s + \alpha \xi^2} \right] + L^{-1} \left[\frac{L[df_0(\tau)]}{s + \alpha \xi^2} \right] \quad (4)$$

La ec. (4) presenta la misma generalidad que la ec. 7,2-1(7) y los problemas con generación de calor función del tiempo se tratan cómodamente añadiendo a las ecuaciones de los apartados anteriores la inversa de la función $f_0(\tau)$

- a) Para $T_1(\tau) = T_1$ $T_2(\tau) = T_2 \tau$ $Q_0 = \text{cte}$

La solución es la ec. 7,2-1(8) introduciendo en la expresión entre corchetes el término

$$2\alpha \frac{Q_0}{k} \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \quad \text{donde} \quad \xi = (2m+1) \frac{\pi}{L_x}$$

- b) Si $\frac{Q_0}{k}(\tau) = \frac{Q_0 \tau}{k}$ el término que debe añadirse a la ec. 7,2-1(8) vale

$$L^{-1} \left[\frac{L[-2\alpha Q_0 \tau / k \xi]}{s + \alpha \xi^2} \right] = L^{-1} \left[-\frac{2\alpha Q_0}{\xi k} \cdot \frac{1}{s^2 (s + \alpha \xi^2)} \right] = -\left(\frac{\tau}{\alpha \xi^2} - \frac{1}{\alpha^2 \xi^4} [1 - \exp(-\alpha \xi^2 \tau)] \right) \\ \cdot \frac{2\alpha Q_0}{\xi k}$$

con $\xi = (2m+1) \frac{\pi}{L_x}$

- c) Si $-\frac{Q_0}{k}(\tau) = -\frac{Q_0}{k} \exp(-b\tau)$

$$L^{-1} \left[-\frac{2\alpha Q_0}{\xi k} \cdot \frac{1}{s+b} \cdot \frac{1}{s + \alpha \xi^2} \right] = -\frac{2\alpha Q_0}{\xi k} \frac{1}{(b - \alpha \xi^2)} [\exp(-\alpha \xi^2 \tau) - \exp(-b\tau)]$$

Ejemplo 7,2-3.

Un material plástico en forma de placa plana de 1 cm de espesor y difusividad térmica $8 \cdot 10^{-4}$ (m^2/h) en las últimas fases de polimerización genera calor según la ecuación $10^{-4} \exp(-7\tau)$ ($\text{kcal}/\text{h m}^3$) donde τ se expresa en horas. Inicial-

mente la temperatura del material es de 85°C y se enfría con una corriente de aire que mantiene las superficies de la placa inicialmente a 20°C y por acumulación continua del aire las temperaturas superficiales aumentan 20°C/h hasta alcanzar 60°C . Se desea conocer la distribución de temperaturas en el centro de la placa en función del tiempo. La conductividad térmica del material vale $0,2 \text{ (kcal/h m }^{\circ}\text{C)}$

Solución:

Incluyendo en la ecuación 7,2-1(8) el término de 7,2-3

$$T\left(\frac{L_x}{2}, \tau\right) = 85 - (85 - 20\tau) \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)}{2m+1} \left[\tau - \frac{1}{\alpha \xi^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 \tau)) - \frac{Q_0}{k} \left(\frac{1}{b - \alpha \xi^2} \right) \right. \\ \left. \left[\exp(-\alpha \xi^2 \tau) - \exp(-b \tau) \right] \right]$$

Dando valores con los datos del problema se tiene para $L_x = 0,01 \text{ m}$

$\xi = \frac{(2m+1)\pi}{L_x}$ Teniendo en cuenta que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2m+1)\pi}{2}\right]}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Para $\tau = 1 \text{ (h)}$ $T\left(\frac{L_x}{2}, 1\right) = 75,5 (^{\circ}\text{C})$

7.2-4. Pared plana con convección y temperaturas periódicas.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Para $T=0$ en $0 < x < L_x$ y $\tau < 0$ pueden considerarse distintos tipos de funciones periódicas.

a) Temperaturas $t_0 \cos(\omega \tau)$ Fig. 7,2-4

$$\text{Si } \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ en } x=0 \quad \tau > 0 \quad (2)$$

$$\gamma \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{h}{k} (T - t_0 \cos(\omega \tau)) \quad x=L_x \quad \tau > 0$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$- \xi_i \bar{f}_F^c(\xi_i, \tau) + \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cos(\xi_i x) + \xi_i T \sin(\xi_i x) \right]_{x=0}^{L_x} = \frac{d \bar{f}_F^c(\xi_i, \tau)}{\alpha d \tau} \quad (3)$$

y si ξ_i son las raíces de $\xi_i \tan(\xi_i L_x) = \frac{h}{k} = a_x$
Se obtiene la ecuación

$$- \xi_i^2 \bar{f}_F^c(\xi_i, \tau) + a_x t_0 \cos(\omega \tau) \cos(\xi_i L_x) = \frac{d \bar{f}_F^c}{\alpha d \tau} \quad (4)$$

con la inversión

$$T(x, \tau) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{f}_F^c(\xi_i, \tau) \quad (5)$$

Aplicando a la ec. (4) la transformación de Laplace

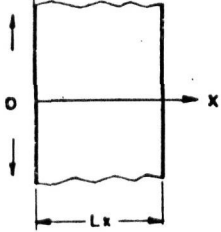
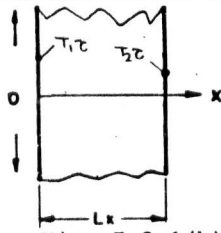
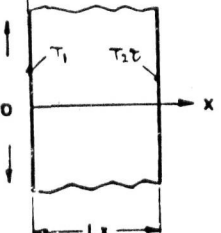
$$\begin{aligned} - \xi_i^2 f(s) + a_x t_0 \cos(\xi_i L_x) \frac{s}{s^2 + \omega^2} &= \frac{s}{\alpha} f(s) \\ f(s) (s + \alpha \xi_i^2) &= \alpha a_x t_0 \cos(\xi_i L_x) \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (6)$$

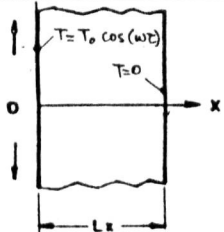
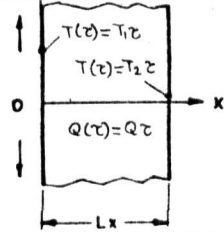
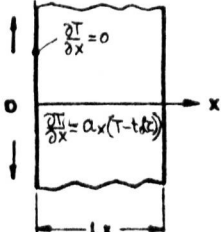
y por la convolución de Laplace

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1}{(s + \alpha \xi_i^2)} \right] &= \int_0^{\tau} \cos[\omega(\tau - \tau^*)] \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau^*) d\tau^* \\ &= \left[\frac{\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2} [\omega \sin[(\tau - \tau^*) \omega] - \alpha \xi_i^2 \cos \omega(\tau - \tau^*)] \right]_0^{\tau} \end{aligned} \quad (7)$$

y sustituyendo en (5) con la nomenclatura de 7,2-2

$$\begin{aligned} T(x, \tau) &= 2 \alpha a_x t_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] \sin(\xi_i L_x) [\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2]} \cdot \\ &\quad [\alpha \xi_i^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) + \alpha \xi_i^2 [\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \\ &\quad - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_f)]] \end{aligned} \quad (8)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|---|
|  <p>Fig. 7,2-1(a)</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $T=T_1 z \quad x=0 \quad z > 0$ $T=T_2 z \quad x=L_x \quad z > 0$ | $T(x, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(T_1 - (-1)^m T_2)}{m} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \left[z - \frac{1}{\alpha \xi^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right]$ $\xi = \frac{\pi m}{L_x}$ |
|  <p>Fig. 7,2-1(b)</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $T=T_1 \quad x=0 \quad z > 0$ $T=T_2 z \quad x=L_x \quad z > 0$ | $T(x, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \cdot \frac{1}{m} \left[T_1 (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) - (-1)^m \left(z - \frac{1}{\alpha \xi^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right) \right]$ $\xi = \frac{\pi m}{L_x}$ |
|  <p>Fig. 7,2-1(c)</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $T=T_1 \exp(-b z) \quad z > 0$ $T=T_2 \exp(-c z) \quad z > 0$ | $T(x, z) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha \xi \sin(\xi x) \left[T_1 \exp(-\alpha \xi^2 z) \left(\frac{1}{b - \alpha \xi^2} - \frac{(-1)^m}{c - \alpha \xi^2} \right) \right. \\ \left. + T_2 \left(\frac{(-1)^m \exp(-c z)}{c - \alpha \xi^2} - \frac{\exp(-b z)}{b - \alpha \xi^2} \right) \right]$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|--|---|
|  <p>Fig. 7,2-2(a)</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $T=0 \quad x=L_x \quad z > 0$ $T=T_0 \cos(wz) \quad x=0 \quad z > 0$ | $T(x,z) = \frac{2\alpha T_0}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi \sin(\xi x)}{(\omega^2 + (\alpha \xi)^2)} \left[\alpha \xi^2 \cos(\omega z_c) + \omega \sin(\omega z_c) + \alpha \xi^2 \left[\exp(-\alpha \xi^2 z_i) - \exp(-\alpha \xi^2 z_f) \right] \right]$ $\xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad z = z_i + z_c + z_f$ <p>z_i = antes del periodo cíclico z_f = despues " "</p> |
|  <p>Fig. 7,2-3(a)</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $T=T_1 z \quad x=0 \quad z > 0$ $T=T_2 z \quad x=L_x \quad z > 0$ $Q(z)=Qz \quad z > 0$ | $T(x,z) = Ec \ 7,2-1(a) + \frac{2\alpha Q}{k} \left[\frac{z}{\alpha \xi^2} + \frac{1}{(\alpha \xi)^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right]$ $\xi = \frac{\pi m}{L_x}$ |
|  <p>Fig. 7,2-4</p> | $T=0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = a_x [T - t_0 \cos(\omega z)]$ $x=L_x \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x=0 \quad z > 0$ $a_x = \frac{h_x}{k}$ | $T(x,z) = 2\alpha_x^2 t_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + \alpha_x^2) + \alpha_x] \sin(\xi_i L_x) [\omega^2 + (\alpha \xi_i)^2]} \cdot [\alpha \xi_i^2 \cos(\omega z_c) + \omega \sin(\omega z_c) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 z_i) - \exp(-\alpha \xi_i^2 z_f))]$ |

7,3-1. Rectángulo con temperaturas en los lados función del tiempo

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Si} & T=0 & 0 < x < L_x & 0 < y < L_y & \tau < 0 & \\ & T=T_{x_0}(\tau) & x=0 & T=T_{L_x}(\tau) & x=L_x & \tau > 0 & \\ & T=T_{y_0}(\tau) & y=0 & T=T_{L_y}(\tau) & y=L_y & \tau > 0 & \end{array} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, y, \tau) + [T_{x_0}(\tau) - (-1)^m T_{L_x}(\tau)] + \frac{\partial \bar{f}_F^s}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{f}_F^s}{\partial \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(x, y, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{f}_F^s(\xi, y, \tau) \quad (4)$$

Aplicando a la ec. (3) nuevamente la transformada finita del seno de Fourier

$$\begin{aligned} & -(\xi^2 + \eta^2) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, \tau) + \eta [T_{y_0}(\tau) - (-1)^n T_{L_y}(\tau)] + 2 \frac{\xi}{\eta} [T_{x_0}(\tau) - (-1)^m T_{L_x}(\tau)] \\ & = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^{s'}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (5)$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^s(\xi, y, \tau) = \frac{2}{L_y} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\eta y) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, \tau) \quad (6)$$

Resolviendo la ec. (5) por transformadas de Laplace y teniendo en cuenta que $T = 0$ en $\tau = 0$

$$f(s) = L[\eta \alpha (T_{y_0}(\tau) - (-1)^n T_{L_y}(\tau)) + 2 \frac{\xi}{\eta} (T_{x_0}(\tau) - (-1)^m T_{L_x}(\tau))] \cdot \frac{1}{s + \alpha \xi^2} = \frac{L[C(\tau)]}{s + \alpha \xi^2} \quad (7)$$

donde $C(\tau)$ es la función del tiempo de los términos entre corchetes y $\xi^2 = \xi^2 + \eta^2$

y por la inversión de Laplace

$$\bar{T}_F(\xi, \eta, \tau) = L^{-1} \left[\frac{L[C(\tau)]}{s^2 + \alpha^2 \sigma^2} \right] \quad (8)$$

y por las inversiones (6) y (4)

$$T(x, y, z) = \frac{2}{L_x} \cdot \frac{2}{L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) L^{-1} \left[\frac{L[C(\tau)]}{s + \alpha^2 \sigma^2} \right] \quad (9)$$

$$\text{con } \xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y} \quad \sigma^2 = \xi^2 + \eta^2$$

La ecuación (9) presenta nuevamente la posibilidad de tratamiento de distintas funciones de τ

$$a) \quad T_{Lx}(\tau) = T_{Ly}(\tau) = 0 \quad T_{x_0}(\tau) = \tau T_{x_0} \quad T_{y_0}(\tau) = \tau T_{y_0}$$

$$L[C(\tau)] = \frac{\alpha}{s^2} \left(\eta T_{y_0} + 2 \frac{\xi}{\eta} T_{x_0} \right)$$

y la inversión

$$L^{-1} \left[\frac{L[C(\tau)]}{s + \alpha^2 \sigma^2} \right] = \alpha \left(\eta T_{y_0} + 2 \frac{\xi}{\eta} T_{x_0} \right) \left(\frac{\tau}{\alpha \sigma^2} - \frac{1}{(\alpha \sigma^2)^2} [1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)] \right)$$

y finalmente

$$T(x, y, z) = \frac{2}{L_x} \cdot \frac{2\alpha}{L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \left(\eta T_{y_0} + 2 \frac{\xi}{\eta} T_{x_0} \right) \left(\frac{\tau}{\alpha \sigma^2} - \frac{1}{(\alpha \sigma^2)^2} [1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)] \right) \quad (10)$$

$$\xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y}$$

$$b) \quad T_{Lx}(\tau) = T_{Ly}(\tau) = 0 \quad T_{x_0}(\tau) = T_{x_0} \exp(-b\tau) \quad T_{y_0}(\tau) = T_{y_0} \exp(-c\tau)$$

$$L[C(\tau)] = \frac{\alpha}{s + \alpha^2 \sigma^2} \left[\frac{\eta T_{y_0}}{(s+b)} + \frac{2 \xi T_{x_0}}{(s+c)} \right]$$

La inversión

$$L^{-1} \left[\frac{L[C(\tau)]}{s + \alpha^2 \sigma^2} \right] = \left[\frac{\alpha T_{y_0}}{(b - \alpha \sigma^2)} (\exp(-\alpha \sigma^2 \tau) - \exp(-b\tau)) + \frac{2 \xi T_{x_0}}{\eta (c - \alpha \sigma^2)} (\exp(-\alpha \sigma^2 \tau) - \exp(-c\tau)) \right] = A(\tau)$$

$$T(x, y, z) = \frac{4d}{L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) A(\tau)$$

$$\xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad \eta = \frac{(2n+1)\pi}{L_y} \quad \delta^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad (11)$$

7,3-2. Rectángulo con temperaturas en los lados funciones periódicas del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Para temperatura $T = T(x, y)$ en $\tau < 0$

| | | | | | |
|-----------------|---------|------------|-----------------|---------|------------|
| $T_{x_0}(\tau)$ | $x=0$ | $\tau > 0$ | $T_{y_0}(\tau)$ | $y=0$ | $\tau > 0$ |
| $T_{L_x}(\tau)$ | $x=L_x$ | $\tau > 0$ | $T_{L_y}(\tau)$ | $y=L_y$ | $\tau > 0$ |

Aplicando a la ec.(1) dos veces sucesivas la transformada finita del seno de Fourier se obtiene la ecuación análoga a la 7,3-1(10) del apartado anterior

$$f(s) = \frac{L[c(\tau)] + A}{s + \alpha \delta^2} \quad (2)$$

Con el valor de A

$$A = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} T(x, y) \sin(\xi x) \sin(\eta y) dx dy \quad (3)$$

y por el teorema de Duhamel o convolución de Laplace en forma análoga al apartado 7,2-1(d) la inversión de (2)

$$T(x, y, \tau) = \frac{4}{L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\alpha \delta^2 \tau) \sin(\xi x) \sin(\eta y) \left[\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} T(x, y) \sin(\xi x) \sin(\eta y) dx dy \right. \\ \left. + d \int_0^{\tau} \exp(-\alpha \delta^2 \tau^*) \left[\eta (T_{y_0}(\tau - \tau^*) - (-1)^m T_{L_y}(\tau - \tau^*)) + 2 \frac{\xi}{\eta} (T_{x_0}(\tau - \tau^*) - (-1)^n T_{L_x}(\tau - \tau^*)) \right] d\tau^* \right] \quad (4)$$

a) Para $T = T(x, y) = 0$ en $z < 0$ $A = 0$ Fig. 7,3-2(a) y si

$$T_{x_0}(z) = T_{x_0} \cos(\omega z) \quad x=0, \quad T_{Lx}(z) = T_{Lx} \cos(\omega z) \quad x=L_x \quad z>0$$

$$T_{y_0}(z) = T_{y_0} \cos(\omega z) \quad y=0, \quad T_{Ly}(z) = T_{Ly} \cos(\omega z) \quad y=L_y \quad z>0$$

La expresión $L[C(z)]$ de la ec.7,3-1(7) vale

$$L[C(z)] = [\eta d (T_{y_0} - (-1)^n T_{Ly}) + \frac{2 d \xi}{\eta} (T_{x_0} - (-1)^m T_{Lx})] \frac{S}{s^2 + \omega^2}$$

y la inversión de Laplace correspondiente a la ecuación análoga a 7,3-1(8) teniendo en cuenta la convolución y la nomenclatura 7,2-2

$$L^{-1} \left[\frac{C(z)}{s + d\omega^2} \right] = \frac{1}{\omega^2 + d\omega^2} \left[d\delta^2 \cos(\omega z) + \omega \sin(\omega z) + d\delta^2 (\exp(-d\delta^2 z) - \exp(-d\delta^2 z)) \right. \\ \left. \cdot \left(d\eta (T_{y_0} - (-1)^n T_{Ly}) + \frac{2 d \xi}{\eta} (T_{x_0} - (-1)^m T_{Lx}) \right) \right] = B(z)$$

(5)

y por las inversiones de las transformadas finitas del seno de Fourier

$$T(x, y, z) = \frac{4d}{L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) B(z) \quad (6)$$

$$\text{siendo} \quad \xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y} \quad \delta^2 = \xi^2 + \eta^2$$

Obsérvese que si en $x = 0$ $T_{x_0}(z) = T_{x_0}$ para $z > 0$ se tiene el caso de aletas rectas con las condiciones. Igualmente se obtiene otros casos con lados aislados $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ en forma cómoda y de fácil aplicación.

b) Si $T_{Lx} = 0$ y $T_{Ly} = 0$ se tiene la ec.(6) sin T_{Lx} y T_{Ly}

7,3-3. Rectángulo con convección y temperaturas periódicas.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1)$$

Si se tienen las condiciones, Fig. 7,3-3

$$\begin{aligned} T=0 \quad 0 < x < L_x \quad 0 < y < L_y \quad \tau < 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad x=0 \quad y=0 \quad \tau > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{h_x}{k} (T - t_o \cos(\omega \tau)), \quad x = L_x, \quad \tau > 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{h_y}{k} (T - t_o \cos(\omega \tau)) \quad y = L_y, \quad \tau > 0$$

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$- \xi_i^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, y, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, y, \tau)}{\partial y^2} + \alpha_x t_o \cos(\omega \tau) \cos(\xi_i L_x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{T}_F^c(\xi_i, y, \tau)}{\partial \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(x, y, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + \alpha_x^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + \alpha_x^2) + \alpha_x]} \bar{T}_F^c(\xi_i, y, \tau) \quad (4)$$

donde $\alpha_x = \frac{h_x}{k}$ y ξ_i son las raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = \alpha_x$

Aplicando a la ec.(3) nuevamente la transformada finita del coseno de Fourier

$$\begin{aligned} - (\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) + \alpha_y t_o \cos(\omega \tau) \cos(\eta_j L_y) + \frac{\alpha_x t_o}{\eta_j} \sin(\eta_j L_y) \cos(\xi_i L_x) \cos(\omega \tau) \\ = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau)}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (5)$$

con la inversión

$$\bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + \alpha_y^2) \cos(\eta_j y)}{[L_y(\eta_j^2 + \alpha_y^2) + \alpha_y]} \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) \quad (6)$$

con las raíces de $\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = \alpha_y$

Aplicando a la ec. (5) la transformación de Laplace y teniendo en cuenta que $T = 0$ en $\tau = 0$

$$f(s) (s + \alpha^2 \tau) = \frac{s t_o}{s^2 + \omega^2} \left[\alpha \alpha_y \cos(\eta_j L_y) + \alpha \frac{\alpha_x}{\eta_j} \sin(\eta_j L_y) \cos(\xi_i L_x) \right] \quad (7)$$

Por la convolución de las funciones $\frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \omega^2}$ como en el apartado 7,2-4 y sustituyendo en las inversiones (6) y (4) y nomenclatura del apartado 7,2-2,

$$T(x, y, \tau) = \Delta a_x^2 a_y^2 t_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[\alpha \delta^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) + \alpha \delta^2 (\exp(-\alpha \delta^2 \tau_c) - \exp(-\alpha \delta^2 \tau))]}{[L_x (\xi_i^2 + a_x^2) + a_x] [L_y (\eta_j^2 + a_y^2) + a_y] [\omega^2 + (\alpha \delta^2)^2]} \cdot \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \left[\frac{\alpha \xi_i \sin(\eta_j L_y)}{\eta_j \sin(\xi_i L_x)} + \frac{\alpha \eta_j}{\sin(\eta_j L_y)} \right] \quad (8)$$

Ejemplo 7,3-3.

Una columna de sección rectangular de $0,5 \times 0,30 \text{ (m}^2\text{)}$ ha sufrido los efectos de un incendio con las características siguientes. Se han producido 3 ciclos consecutivos de 5 minutos cada uno con variación de la temperatura ambiental en forma de se mionda senoidal con un valor máximo de 700°C . Dos caras contíguas de la columna estaban situadas en el ambiente del incendio mientras que las otras dos caras se hallaban a un medio ambiental a 20°C . Con un coeficiente de transmisión de calor de $5 \text{ (kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$ La temperatura inicial de la columna era de 20°C . El coeficiente de transmisión de calor medio durante el incendio se estimó en $40 \text{ (kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$ Las propiedades térmicas medias del material de la columna son

$$\rho = 3800 \text{ (kg/m}^3\text{)} \quad k = 5 \text{ (kcal/h.m.}^\circ\text{C)} \quad c_p = 0,30 \text{ (kcal/kg.}^\circ\text{C)}$$

Se desea conocer:

- a) Distribución de temperaturas en función del tiempo en la sec- ción recta.

Solución

a) El problema puede tratarse por superposición de los cam pos de temperaturas debidos a considerar la columna con dos caras contíguas aisladas en el ambiente a 20°C y dos caras en el ambiente del incendio, en ambos casos con la misma base de coordena das y tiempos.

Para la columna en el ambiente a 700°C se aplican las con sideraciones del apartado 7,3-3 donde el término $t_0 \cos(\omega \tau)$ se sus

tituye por $t_0 \sin \pi \frac{\tau_c}{\tau_p}$ donde τ_p es el tiempo correspondien
te a una semionda y τ_c el tiempo comprendido entre $0-\tau_p$; $\tau = n^{\circ}$ se-
miondas $+\tau_c$

La convolución de Laplace aplica a la inversión de $f(s)$ es

$$\int_0^{\tau} \exp[-\alpha \sigma^2(\tau-\tau^*)] \sin\left(\pi \frac{\tau^*}{\tau_p}\right) d\tau^* = \frac{\exp(-\alpha \sigma^2 \tau)}{\left(\frac{\pi}{\tau_p}\right)^2 + (\alpha \sigma^2)^2} \left[\exp(-\alpha \sigma^2 \tau^*) \cdot \left(\alpha \sigma^2 \sin\left(\pi \frac{\tau^*}{\tau_p}\right) - \frac{\pi}{\tau_p} \cos\left(\pi \frac{\tau^*}{\tau_p}\right) \right) \right]_{\tau^*=0}^{\tau^*=\tau}$$

y substituyendo en las inversiones 7,3-3(4) y 7,3-3(5) y si $\alpha_x = \alpha_y$

$$T(x, y, \tau) = 4 \alpha \alpha_x^4 t_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{\pi}{\tau_p} (\exp(-\alpha \sigma^2 \tau) - \cos(\pi \tau_c / \tau_p)) + \alpha \sigma^2 \sin \pi \tau_c / \tau_p \right]}{\left[\left(\frac{\pi}{\tau_p} \right)^2 + (\alpha \sigma^2)^2 \right] \left[L_x (\xi_i^2 + \alpha_x^2) + \alpha_x \right] \left[L_y (\eta_j^2 + \alpha_y^2) + \alpha_y \right]} \cdot \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \cdot \left[\frac{\xi_i \sin(\eta_j L_y)}{\sin(\xi_i L_x)} + \frac{\eta_j}{\sin(\eta_j L_y)} \right]$$

$$\alpha_x = \alpha_y = \frac{1}{k} = \frac{40}{5} = 8 \quad L_x = 0,5 \quad L_y = 0,30 \quad \alpha = 0,0043 \quad \frac{\pi}{\tau_c} = 12 \pi$$

$$\alpha_x L_x = 4 \quad \alpha_y L_y = 2,4$$

Las raices ξ_i y η_j Apéndice I talba I-3(5)

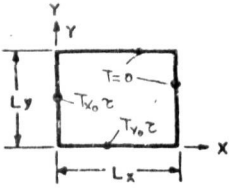
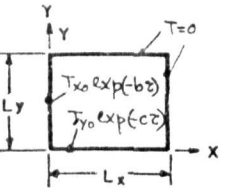
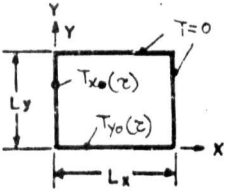
$$\xi_1 L_x = 1,26 \quad \xi_2 L_x = 3,93 \quad \xi_3 L_x = 6,81 \quad \xi_4 L_x = 9,81 \quad \xi_5 L_x = 12,86$$

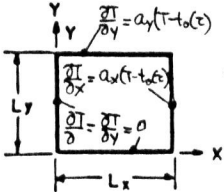
$$\eta_1 L_y = 1,16 \quad \eta_2 L_y = 3,71 \quad \eta_3 L_y = 6,63 \quad \eta_4 L_y = 9,66 \quad \eta_5 L_y = 12,74$$

En particular para $x=y=0$ y en el tiempo total de 12,5 mi-
nutos $\tau_c = 2,50\%$ $\sin(\pi \tau_c / \tau_p) = 1$ $\cos(\pi \tau_c / \tau_p) = 0$ y la ecuación an-
terior toma la forma

$$T(0, 0, 12,5/60) - 20 = 4.0,0043.8^4.680 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{12 \pi \exp(-0,053 \sigma^2 / 60) + \alpha \sigma^2}{[0,5(8^2 + \xi_i^2) + 8] [0,3(8^2 + \eta_j^2) + 8]}$$

$$\cdot \frac{1}{[(12 \pi)^2 + (0,0043 \sigma^2)^2]} \left[\frac{\xi_i \sin(\eta_j L_y)}{\sin(\xi_i L_x)} + \frac{\eta_j}{\sin(\eta_j L_y)} \right] = 90^{\circ} C, \quad T(0, 0, 12,5/60) = 110^{\circ} C$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|---|
|  <p>Fig. 7,3-1(a)</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $T=T_{x_0}\tau \quad x=0 \quad z > 0$ $T=T_{y_0}\tau \quad y=0 \quad z > 0$ | $T(x, y, z) = \frac{4\alpha}{L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \left[\eta T_{y_0} + \frac{2\xi}{\eta} T_{x_0} \right]$ $\left[\frac{\tau}{\alpha \delta^2} - \frac{1}{\alpha \delta^2} (1 - \exp(-\alpha \delta^2 z)) \right]$ $\xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y} \quad \delta^2 = \xi^2 + \eta^2$ |
|  <p>Fig. 7,3-1(b)</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $T=T_{x_0} \exp(-b z) \quad x=0 \quad z > 0$ $T=T_{y_0} \exp(-c z) \quad y=0 \quad z > 0$ | $T(x, y, z) = \frac{4\alpha}{L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \left[\frac{\eta T_{y_0}}{(b - \alpha \delta^2)} (\exp(-\alpha \delta^2 z) - \exp(b z)) \right.$ $\left. + \frac{2\xi T_{x_0}}{\eta(c - \alpha \delta^2)} (\exp(-\alpha \delta^2 z) - \exp(c z)) \right]$ $\xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y} \quad \delta^2 = \xi^2 + \eta^2$ |
|  <p>Fig. 7,3-2(b)</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $T(z) = T_{x_0} \cos(\omega z), \quad x=0, \quad z > 0$ $T(z) = T_{y_0} \cos(\omega z), \quad y=0, \quad z > 0$ $T=0 \quad y=L_y \quad x=L_x \quad z > 0$ | $T(x, y, z) = \frac{4\alpha}{L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\eta y)}{[\omega^2 + (\alpha \delta^2)^2]} \left[\alpha \delta^2 \cos(\omega z) + \omega \sin(\omega z) + \right.$ $\left. + \alpha \delta^2 [\exp(-\alpha \delta^2 z) - \exp(-\alpha \delta^2 z_f)] \left[d \eta T_{y_0} + \frac{2\alpha \xi}{\eta} T_{x_0} \right] \right]$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|---|
|  <p>Fig. 7,3-3</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad z < 0$ $0 < y < L_y \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad x=0 \quad y=0 \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = a_x(T-t_0 \cos(wz)) \quad x=L_x, z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial y} = a_y(T-t_0 \cos(wz)) \quad y=L_y, z > 0$ | $T(x,y,z) = 4a_x a_y t_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y][w^2 + (\xi_i^2 + \eta_j^2)]} \cdot$ $\cdot [d \xi_i^2 \cos(wz) + w \sin(wz) + d \xi_i^2 (\exp(-d \xi_i^2 z) - \exp(-d \xi_i^2 z_f))].$ $\cdot \left[\frac{d \xi_i \sin(\eta_j L_y)}{\eta_j \sin(\xi_i L_x)} + \frac{d \eta_j}{\sin(\eta_j L_y)} \right]$ <p>ξ_i, η_j, raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$, $\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = a_y$</p> <p>$a_x = \frac{h_x}{k}$, $a_y = \frac{h_y}{k}$, $\delta^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$</p> |

7,4-1. Paralelepípedo con temperaturas en las caras función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones Fig. 7,4-1

$$\begin{aligned} T &= 0 & 0 < x < L_x & \quad 0 < y < L_y & \quad 0 < z < L_z & \quad z < 0 \\ T_{x_0}(\tau) & & x=0; T_{L_x}(\tau) & & x=L_x; T_{y_0}(\tau) & & y=0; T_{L_y}(\tau) & & y=L_y \\ T_{z_0}(\tau) & & z=0; T_{L_z}(\tau) & & z=L_z \end{aligned}$$

y para todos $\tau > 0$

Aplicando a la ec.(1) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, y, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^s}{\partial z^2} + \xi [T_{x_0}(\tau) - (-1)^m T_{L_x}(\tau)] = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^s}{\partial \tau} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi x) \bar{f}_F^s(\xi, y, z, \tau) \quad (3)$$

Aplicando a la ec.(2) nuevamente la transformada finita del seno de Fourier

$$\begin{aligned} -(\xi^2 + \eta^2) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z, \tau) + \eta [T_{y_0}(\tau) - (-1)^n T_{L_y}(\tau)] + \frac{2\xi}{\eta} [T_{x_0}(\tau) - (-1)^m T_{L_x}(\tau)] + \\ + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^{s'}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^{s'}}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (4)$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^s(\xi, y, z, \tau) = \frac{2}{L_y} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\eta y) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z, \tau) \quad (5)$$

Aplicando a la ec.(3) nuevamente la transformada del seno de Fourier

$$\begin{aligned} -(\xi^2 + \eta^2 + r^2) \bar{f}_F^{s''}(\xi, \eta, r, z) + r [T_{x_0}(\tau) - (-1)^m T_{L_x}(\tau)] + \frac{2\eta}{r} [T_{y_0}(\tau) - (-1)^n T_{L_y}(\tau)] \\ + \frac{4\xi}{\eta r} [T_{z_0}(\tau) - (-1)^p T_{L_z}(\tau)] = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^{s''}}{d \tau} \end{aligned} \quad (6)$$

Aplicando la transformación de Laplace a (6)

$$f(s) = \frac{\alpha L[Ec.6]}{s^2 + \alpha \mu^2} = \frac{L[C(z)]}{s^2 + \alpha \mu^2} \quad (7)$$

donde

$$\mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + \gamma^2 \quad \xi = \pi \frac{m}{L_x} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y} \quad \gamma = (2p+1) \frac{\pi}{L_z}$$

$$f_F^{(1)}(\xi, \eta, \gamma, z) = L^{-1} \left[\frac{L[C(z)]}{s^2 + \alpha \mu^2} \right]$$

y por las inversiones correspondientes a z , ec. (5) y ec. (3)

$$T(x, y, z, z) = \frac{8}{L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(\gamma z) L^{-1} \left[\frac{L[C(z)]}{s^2 + \alpha \mu^2} \right] \quad (8)$$

a) Si $T_{L_x}(z) = T_{L_y}(z) = T_{L_z}(z) = 0$ Fig. 7,4-1(a)

$$y \quad T_{x_0}(z) = T_{x_0} z \quad T_{y_0}(z) = T_{y_0} z \quad T_{z_0}(z) = T_{z_0} z$$

$$L[C_2(z)] = \frac{\alpha}{s^2} \left[\gamma T_{z_0} + \frac{2\eta}{\gamma} T_{y_0} + \frac{4\xi}{\eta\gamma} T_{x_0} \right] = \frac{A}{s^2}$$

y la inversión

$$L^{-1} \left[\frac{L[C_2(z)]}{s^2 + \alpha \mu^2} \right] = A \left(\frac{z}{\alpha \mu^2} - \frac{1}{2\mu^2} [1 - \exp(-\alpha \mu^2 z)] \right) \quad (9)$$

$$T(x, y, z, z) = \frac{8}{L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(\gamma z) L^{-1} \left[\frac{L[C_2(z)]}{s^2 + \alpha \mu^2} \right] \quad (10)$$

con $\xi = \pi \frac{m}{L_x} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y} \quad \gamma = (2p+1) \frac{\pi}{L_z} \quad \mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + \gamma^2$

b) Si $T_{L_x}(z) = T_{L_y}(z) = T_{L_z}(z) = 0$ Fig. 7,4-1(b)

$$T_{x_0}(z) = T_{x_0} \exp(-bz), \quad T_{y_0}(z) = T_{y_0} \exp(-cz), \quad T_{z_0}(z) = T_{z_0} \exp(-az)$$

$$L[C_2(z)] = \alpha \left[\gamma \frac{T_{z_0}}{s+a} + \frac{2\eta}{\gamma} \frac{T_{y_0}}{s+c} + \frac{4\xi}{\eta\gamma} \frac{T_{x_0}}{s+b} \right]$$

y la inversión

$$L^{-1} \left[\frac{L[G(z)]}{s + \mu^2 \tau} \right] = \alpha \left[\frac{\tau T_{z0}}{g - \alpha \mu^2} [\exp(-\alpha \mu^2 z) - \exp(-g z)] + \frac{2\eta}{\gamma} T_{y0} [\exp(-\alpha \mu^2 z) - \exp(-cz)] \right. \\ \left. + \frac{4\zeta}{\eta \gamma} [\exp(-\alpha \mu^2 z) - \exp(-bz)] \right] = A_1$$

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{8}{L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(\tau z) A_1 \quad (11)$$

7,4-2. Paralelepípedo con temperaturas periódicas en las caras

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Para las condiciones

$$T_{x0}(\tau) = T_{x0} \cos(\omega \tau) \quad T_{y0}(\tau) = T_{y0} \cos(\omega \tau) \\ T_{z0}(\tau) = T_{z0} \cos(\omega \tau) \quad \gamma \quad T_{Lx} = T_{Ly} = T_{Lz} = 0 \quad (2)$$

La solución de la ec. (1) es como se ha visto en el apartado 7,4-1

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{8}{L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(\tau z) L^{-1} \left[\frac{L[G(z)]}{s^2 + \alpha \mu^2} \right] \quad (3)$$

Para las condiciones (2) y por las propiedades de la convolución de Laplace

$$L^{-1} \left[\frac{L[G(z)]}{s^2 + \alpha \mu^2} \right] = \frac{\alpha}{\omega^2 + (\alpha \mu^2)^2} \left[\alpha \mu^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) + \alpha \mu^2 \exp(-\alpha \mu^2 \tau) - \exp(-\alpha \mu^2 \tau) \right] \cdot \\ \cdot \left[\tau T_{z0} + \frac{2\eta}{\gamma} T_{y0} + \frac{4\zeta}{\eta \gamma} T_{x0} \right] \quad (4)$$

y la solución es la ec. (3) sustituyendo los valores de la ec. (4).

7,4-3. Paralelepípedos con convección y temperaturas periódicas

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

-a) Para las condiciones

$$\begin{aligned}
 T=0 \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad 0 < z < L_z \quad \tau < 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x=0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad y=0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad z=0 \quad \tau > 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial x} = -a_x(T-t_0 \cos(\omega\tau)) \quad x=L_x, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -a_y(T-t_0 \cos(\omega\tau)) \quad y=L_y \\
 \frac{\partial T}{\partial z} = -a_z(T-t_0 \cos(\omega\tau)) \quad z=L_z \quad \tau > 0
 \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-\xi_i^2 \bar{T}_F^c(\xi_i, y, z, \tau) + a_x t_0 \cos(\omega\tau) \cos(\xi_i L_x) + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F^c}{\partial \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(x, y, z, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2) \cos(\xi_i x)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x]} \bar{T}_F^c(\xi_i, y, z, \tau) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i \tan(\xi_i L_x) = a_x$

Aplicando a la ec.(3) la transformada finita del coseno de Fourier

$$\begin{aligned}
 -(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau) + a_y t_0 \cos(\omega\tau) \cos(\eta_j L_y) + \frac{a_x}{\eta_j} t_0 \cos(\omega\tau) \cos(\xi_i L_x) \sin(\eta_j L_y) \\
 + \frac{\partial^2 \bar{T}_F^c}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{T}_F^c}{\partial \tau}
 \end{aligned} \quad (5)$$

con la inversión

$$\bar{T}_F^c(\xi_i, y, z, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\eta_j^2 + a_y^2) \cos(\eta_j y)}{[L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y]} \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, z, \tau) \quad (6)$$

η_j son las raíces de $\eta_j \tan(\eta_j L_y) = a_y$

Aplicando a la ec.(5) la misma transformada de Fourier

$$\begin{aligned}
 -(\xi_i^2 + \eta_j^2 + \gamma_m^2) \bar{T}_F^c(\xi_i, \eta_j, \gamma_m, \tau) + t_0 \cos(\omega\tau) [a_z \cos(\gamma_m L_z) + \frac{a_y}{\gamma_m} \cos(\eta_j L_y) \cdot \\
 \cdot \sin(\gamma_m L_z) + \frac{a_x}{\eta_j \gamma_m} \cos(\xi_i L_x) \sin(\eta_j L_y) \sin(\gamma_m L_z)] = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F^c}{d \tau}
 \end{aligned} \quad (7)$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^{(1)}(\xi_i, \eta_j, z, \tau) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(r_m^2 + a_z^2) \cos(r_m z)}{[L_z(r_m^2 + a_z^2) + a_z]} \bar{f}_F^{(1)}(\xi_i, \eta_j, r_m, \tau) \quad (8)$$

Aplicando a (7) la transformación de Laplace

$$f(s)(s + \alpha \mu^2) = \alpha t_0 A \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

con $\mu^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 + r_m^2$ y A es el valor del paréntesis de la ec. (7).

La inversión de $f(s)$ teniendo en cuenta la convolución del producto de las transformadas como en el apartado 7,2-2

$$\bar{f}_F^{(1)}(\xi_i, \eta_j, r_m, \tau) = \frac{A t_0}{(\alpha \mu^2 + \omega^2)} [\alpha \mu^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) - \alpha \mu^2 \exp(-\alpha \mu^2 \tau)] \quad (8)$$

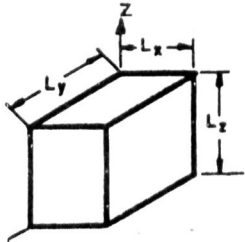
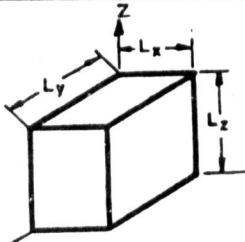
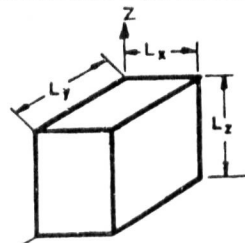
y por las relaciones de las raíces ξ_i, η_j, r_m y las inversiones (7), (6) y (4)

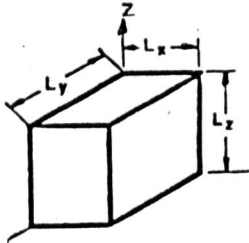
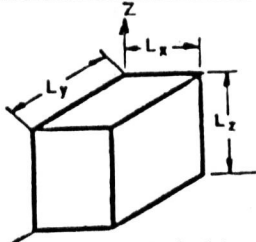
$$\begin{aligned} T(x, y, z, \tau) = & 8 \alpha t_0 a_x^2 a_y^2 a_z^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \cos(r_m z)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y][L_z(r_m^2 + a_z^2) + a_z]} \\ & \cdot \left[\frac{\xi_i}{\eta_j r_m} \cdot \frac{\sin(\eta_j y) \sin(r_m z)}{\sin(\xi_i x)} + \frac{\eta_j}{r_m} \frac{\sin(r_m z)}{\sin(\eta_j y)} + \frac{r_m}{\sin(r_m z)} \right] [\alpha \mu^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) \\ & + \alpha \mu^2 (\exp(-\alpha \mu^2 \tau_c) - \exp(-\alpha \mu^2 \tau_c))] \left[\frac{1}{\omega^2 + (\alpha \mu^2)^2} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

b) Si la función es $t_0 \sin(\omega \tau)$ la convolución de $\sin(\omega \tau) \exp(-\alpha \mu^2 \tau)$ vale

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \exp[-\alpha \mu^2 (\tau - \tau^*)] \sin(\omega \tau^*) d\tau^* &= \frac{\exp(-\alpha \mu^2 \tau)}{(\alpha \mu^2)^2 + \omega^2} \left[\exp(\alpha \mu^2 \tau^*) (\alpha \mu^2 \sin(\omega \tau^*) \right. \\ &\quad \left. - \omega \cos(\omega \tau^*)) \right]_0^{\tau = \tau^*} = \frac{1}{(\omega^2 + (\alpha \mu^2)^2)} [\alpha \mu^2 \sin(\omega \tau) - \omega \cos(\omega \tau) + \omega \exp(-\alpha \mu^2 \tau)] \quad (10) \end{aligned}$$

y la solución es la ec. (9) sustituyendo los términos periódicos de aquella por la ec. (10).

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|--|
|  <p>Fig. 7,4-1</p> | $T=0 \quad \begin{matrix} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{matrix} \quad z < 0$ $T = T_{x_0}(z), \quad x=0, \quad z > 0$ $T = T_x(z), \quad x=L_x, \quad z > 0$ $T = T_{y_0}(z), \quad y=0, \quad z > 0$ $T = T_y(z), \quad y=L_y, \quad z > 0$ $T = T_{z_0}(z), \quad z=0, \quad z > 0$ $T = T_z(z), \quad z=L_z, \quad z > 0$ | $T(x,y,z) = \frac{8}{L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz) L^{-1} \left[\frac{L[C_1(z)]}{s + \mu^2} \right]$ $L[C_1(z)] = L \left[\alpha r (T_{z_0}(z) - t) T_{z_0}(z) + \frac{2dh}{r} (T_{y_0}(z) - t) T_{y_0}(z) + \frac{4gh}{r} (T_{x_0}(z) - t) T_{x_0}(z) \right]$ $L^{-1}[C_1(z)] = \text{inversión de Laplace}$ $\xi^2 = \frac{m^2 \pi^2}{L_x^2}, \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y}, \quad r = (2p+1) \frac{\pi}{L_z}, \quad \mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + r^2$ |
|  <p>Fig. 7,4-1(a)</p> | $T=0 \quad \begin{matrix} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{matrix} \quad z < 0$ $T=0 = T_{Lx} = T_{Ly} = T_{Lz} \quad z > 0$ $T(z) = T_{x_0} z, \quad x=0, \quad z > 0$ $T(z) = T_{y_0} z, \quad y=0, \quad z > 0$ $T(z) = T_{z_0} z, \quad z=0, \quad z > 0$ | $T(x,y,z) = \frac{8}{L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz) L^{-1} \left[\frac{L[C_2(z)]}{s + \mu^2} \right]$ $L^{-1} \left[\frac{L[C_2(z)]}{s + \mu^2} \right] = \alpha \left[r T_{z_0} + \frac{2h}{r} T_{y_0} + \frac{4g}{r} T_{x_0} \right] \left[\frac{r}{\alpha \mu^2} - \frac{1}{(\alpha \mu)^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right]$ |
|  <p>Fig. 7,4-1(b)</p> | $T=0 \quad \begin{matrix} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{matrix} \quad z < 0$ $T=0 = T_{Lx} = T_{Ly} = T_{Lz} \quad z > 0$ $T = T_{x_0} \exp(-bz), \quad x=0, \quad z > 0$ $T = T_{y_0} \exp(-cz), \quad y=0, \quad z > 0$ $T = T_{z_0} \exp(-dz), \quad z=0, \quad z > 0$ | $T(x,y,z) = \frac{8}{L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz) L^{-1} \left[\frac{L[C_3(z)]}{s + \mu^2} \right]$ $L^{-1} \left[\frac{L[C_3(z)]}{s + \mu^2} \right] = \alpha \left[r T_{z_0} (\exp(-\alpha \mu^2 z) - \exp(-gz)) + \frac{2h}{r} T_{y_0} (\exp(-\alpha \mu^2 z) - \exp(-cz)) + \frac{4g}{r} T_{x_0} (\exp(-\alpha \mu^2 z) - \exp(-bz)) \right]$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|--|
|  <p>Fig. 7,4-2</p> | $T=0 \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{array} \quad \tau < 0$ $T=0 = T_{Lx} = T_{Ly} = T_{Lz}$ $T = T_{x0} \cos(\omega \tau) \quad x=0 \quad \tau > 0$ $T = T_{y0} \cos(\omega \tau) \quad y=0 \quad \tau > 0$ $T = T_{z0} \cos(\omega \tau) \quad z=0 \quad \tau > 0$ | $T(x,y,z,\tau) = \frac{8}{L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sin(\xi_m x) \sin(\eta_n y) \sin(\gamma_p z) L^{-1} \left[\frac{L[C_i(\tau)]}{S + \alpha \mu^2} \right]$ $L^{-1} \left[\frac{L[C_i(\tau)]}{S + \alpha \mu^2} \right] = \frac{\alpha}{\omega^2 + (\alpha \mu^2)^2} \left[\alpha \mu^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) - \alpha \mu^2 \right.$ $\left. \cdot (\exp(-\alpha \mu^2 \tau_c) - \exp(-\alpha \mu^2 \tau_f)) \right] \left[\tau T_{z0} + \frac{2\eta}{\gamma} T_{y0} + \frac{4\xi}{\eta \gamma} T_{x0} \right]$ |
|  <p>Fig. 7,4-3(a)</p> | $T=0 \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{array} \quad \tau < 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad x=y=z=0, \tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha x (T - t_0 \cos(\omega \tau)), \quad x=L_x, \tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha y (T - t_0 \cos(\omega \tau)), \quad y=L_y, \tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha z (T - t_0 \cos(\omega \tau)), \quad z=L_z, \tau > 0$ | $T(x,y,z,\tau) = 8\alpha^2 a_1^2 a_2^2 \alpha t_0 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \cos(\gamma_m z)}{[L_x(\xi_i^2 + \alpha^2) + \alpha x][L_y(\eta_j^2 + \alpha^2) + \alpha y][L_z(\gamma_m^2 + \alpha^2) + \alpha z]}$ $\cdot \left[\frac{\xi_i \sin(\eta_j L_y) \sin(\gamma_m L_z)}{\eta_j \gamma_m \sin(\xi_i L_x)} + \eta_j \frac{\sin(\gamma_m L_z)}{\gamma_m \sin(\eta_j L_y)} + \gamma_m \frac{\sin(\xi_i L_x)}{\xi_i \sin(\gamma_m L_z)} \right] \left[\alpha \mu^2 \cos(\omega \tau_c) + \right.$ $\left. + \omega \sin(\omega \tau_c) + \alpha \mu^2 (\exp(-\alpha \mu^2 \tau_c) - \exp(-\alpha \mu^2 \tau_f)) \right] \frac{1}{(\alpha \mu^2)^2 + \omega^2}$ $\xi_i, \text{ raíces de } \xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = \alpha x \quad \alpha x = \frac{h_x}{k} \quad a_x = \frac{h_x}{k}$ $\eta_j, \text{ " } \eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = \alpha y \quad \alpha y = \frac{h_y}{k} \quad a_y = \frac{h_y}{k}$ $\gamma_m, \text{ " } \gamma_m \operatorname{tg}(\gamma_m L_z) = \alpha z \quad \alpha z = \frac{h_z}{k} \quad a_z = \frac{h_z}{k}$ $\mu^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 + \gamma_m^2$ |

7,5-1. Cilindro infinito con temperatura superficial función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & 0 < r < R & \tau < 0 \\ T=T_R(\tau) & r=R & \tau > 0 \end{array} \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) + \xi_i R T_R(\tau) J_1(\xi_i R) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_{H,0}}{d\tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

Aplicando a (3) la transformación de Laplace y si $T=0$

$$\alpha \xi_i R J_1(\xi_i R) L[T_R(\tau)] = f(s) (s + \alpha \xi_i^2) \quad (5)$$

y la inversión de $f(s)$

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \alpha \xi_i R J_1(\xi_i R) L^{-1} \left[\frac{L[T_R(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right] \quad (6)$$

Por la inversión (4)

$$T(r, \tau) = \frac{2\alpha}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} L^{-1} \left[\frac{L[T_R(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right] \quad (7)$$

a) Si $T_R(\tau) = T_R \tau$

$$L^{-1} \left[\frac{T_R}{s^2 (s + \alpha \xi_i^2)} \right] = T_R \left[\frac{\tau}{\alpha \xi_i^2} - \frac{1}{(\alpha \xi_i^2)^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right]$$

$$T(r, \tau) = \frac{2\alpha T_R}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} \left[\frac{\tau}{\alpha \xi_i^2} - \frac{1}{(\alpha \xi_i^2)^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right] \quad (8)$$

b) Si $T_R(\tau) = T_R \exp(-b\tau)$

$$L[T_R(\tau)] = \frac{T_R}{s+b}$$

$$L^{-1} \left[\frac{T_R}{(s+b)(s+\alpha \xi_i^2)} \right] = \frac{T_R}{b-\alpha \xi_i^2} (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-b\tau))$$

$$T(r, \tau) = \frac{2\alpha T_R}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R) (b-\alpha \xi_i^2)} (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-b\tau)) \quad (9)$$

Ejemplo 7,5-1

Una bomba centrífuga para circulación de sodio líquido tiene un eje de 4 cm de diámetro. Antes de alcanzar el régimen estacionario en la instalación la bomba se precalienta a 100°C y posteriormente se circula sodio inicialmente a 100°C, aumentando la temperatura de éste último en 200°C/h hasta alcanzar 500°C. Se desea conocer

- a) Distribución de temperaturas en el centro del eje en función del tiempo si las propiedades del material son

$$k = 32 \text{ (Kcal/h m } \sigma\text{)} \quad \rho = 7800 \text{ (Kg/m}^3\text{)} \quad C_p = 0,11 \text{ (Kcal/Kg } \sigma\text{)}$$

- b) Flujos y gradientes térmicos.

Solución:

- a) Por la ecuación 7,5-1(8)

$$T(r, \tau) - 100 = 2 \cdot 200 \cdot \frac{0,037}{0,02} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{J_1(\xi_i R)} \frac{1}{0,037 \xi_i^2} \left(\tau - \frac{1}{0,037 \xi_i^2} (1 - \exp(-0,037 \xi_i^2 \tau)) \right)$$

donde $\alpha = \frac{k}{\rho C_p} = 0,037$

Las raíces de $J_0(\xi_i R)$

son Apéndice I, tabla I-3(3)

$$\xi_1 R = 2,40 \quad \xi_2 R = 5,52 \quad \xi_3 R = 8,65 \quad \xi_4 R = 11,79 \quad \xi_5 R = 14,93$$

En particular para $\tau = 1$ (h)

$$T(0,1) = 134 + 100 = 234 (^{\circ}\text{C})$$

Para $\tau = 2$ (h) $T(0,2) = 368 (^{\circ}\text{C})$.

A partir de las 2 horas hay que considerar el sistema como régimen transitorio a temperatura constante

$$b) \quad \frac{q}{S} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{(r,z)} = \frac{2k\alpha T_R}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_1(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} \cdot \frac{1}{\alpha \xi_i^2} \left[\tau - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right]$$

en $r=R$

$$\left(\frac{q}{S} \right)_{(R,z)} = \frac{2 \cdot 0,037 \cdot 32 \cdot 200}{0,02} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left[\tau - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right]$$

para $\tau = 1$ (h)

$$\left(\frac{q}{S} \right)_{(R,1)} = 6,4 \cdot 10^5 \text{ (Kcal/hm}^2\text{)}$$

y los gradientes térmicos $-\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{(r,z)} = \left(\frac{q}{S} \right)_{(r,z)} \cdot \frac{1}{k}$

Para $\tau = 1$ (h) $r=R$

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right) = 2 \cdot 10^4 \text{ (}^{\circ}\text{C/h)}$$

7,5-2. Cilindro infinito con temperaturas periódicas

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

a) Para las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & 0 < r < R & \tau < 0 \\ T = T_R \cos(\omega \tau) & r=R & \tau > 0 \end{array} \quad (2)$$

Por la ec. 7,5-1(7) del apartado anterior

$$L^{-1} \left[\frac{L[T_R(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right] = L^{-1} \left[\frac{T_R s}{(s^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1}{(s + \alpha \xi_i^2)} \right] \quad (3)$$

y por la convolución de Laplace

$$L^{-1} \left[\frac{T_R s}{(s^2 + \omega^2)(s + \alpha \xi_i^2)} \right] = T_R \int_0^{\tau} \cos \omega(\tau - \tau^*) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau^*) d\tau^* = \frac{T_R}{\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2} \left[\alpha \xi_i^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) - \alpha \xi_i^2 \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \right] \quad (4)$$

y por la inversión 7,5-1(7) y con la nomenclatura de 7,2-2

$$T(r, \tau) = \frac{2\alpha T_R}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} \cdot \frac{1}{(\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2)} \left[\alpha \xi_i^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_f)) \right] \quad (5)$$

7,5-3. Cilindro infinito con convección y temperaturas periódicas

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

a) Para las condiciones

$$\begin{aligned} T &= 0 & 0 < r < R & & \tau < 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= 0 & r &= R & \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= -\alpha_r (T - t_o \cos(\omega \tau)) & r &= R, \quad \alpha_r = \frac{h_r}{R}, \quad \tau > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

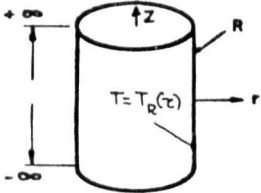
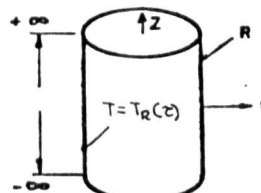
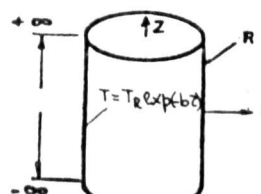
Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel

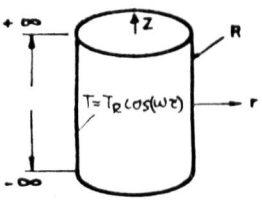
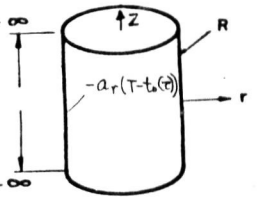
$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) + R J_0(\xi_i R) \alpha_r t_o \cos(\omega \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_{H,0}}{d \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + \alpha_r^2) J_0^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i J_1(\xi_i R) = \alpha_r J_0(\xi_i R)$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|--|
|  <p>Fig. 7,5-1</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T = T_R(z) \quad r = R \quad z > 0$ | $T(r,z) = \frac{2\alpha}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} L^{-1} \left[\frac{L[T_R(z)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right]$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |
|  <p>Fig. 7,5-1(a)</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T = T_R z \quad r = R \quad z > 0$ | $T(r,z) = \frac{2\alpha T_R}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} \left[\frac{z}{\alpha \xi_i^2} - \frac{1}{(\alpha \xi_i^2)^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)) \right]$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |
|  <p>Fig. 7,5-1(b)</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T = T_R \exp(-bz), \quad r = R, \quad z > 0$ | $T(r,z) = \frac{2\alpha T_R}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R) \cdot (b - \alpha \xi_i^2)} \left[\exp(-\alpha \xi_i^2 z) - \exp(-bz) \right]$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|---|
|  <p>Fig. 7,5-2</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z=0$ $T=T_R \cos(\omega \tau) \quad r=R \quad z>0$ | $T(r, z) = \frac{2\alpha T_R}{R} \sum \frac{\xi_i J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R) [\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2]} \left[\alpha \xi_i^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_i) - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_f)) \right]$ <p>ξ_i, raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |
|  <p>Fig. 7,5-3</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z=0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r (T - t_0 \cos(\omega \tau))$ $a_r = \frac{hr}{k}$ | $T(r, z) = \frac{2\alpha a_r t_0}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0(\xi_i R) [\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2]} \left[\alpha \xi_i^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_i) - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_f)) \right]$ <p>ξ_i, raíces de $\xi_i J_1(\xi_i R) = a_r J_0(\xi_i R)$</p> |

Resolviendo (3) con $T = 0$ en $r = 0$

$$f(s) = \alpha R J_0(\xi_i R) \alpha_r t_0 \frac{s}{(s^2 + \omega^2)} \cdot \frac{1}{s + \alpha \xi_i^2} \quad (5)$$

Por la convolución de Laplace

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i, z) = \alpha R J_0(\xi_i R) \alpha_r t_0 \int_0^z \cos[\omega(\tau - \tau^*)] \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau^*) d\tau^* \quad (6)$$

y sustituyendo en (4) y con la nomenclatura de 7,2-2

$$T(r, z) = \frac{2\alpha \alpha_r t_0}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + \alpha^2) J_0(\xi_i R) (\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2)} \left[\alpha \xi_i^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 z) - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_c)) \right] \quad (7)$$

Ejemplo 7,5-3.

Una barra de 5 cm de diámetro y propiedades

$c_p = 0,24 \text{ (Kcal/Kg } ^\circ\text{C)}$, $k = 2 \text{ (Kcal/hm } ^\circ\text{C)}$, $\rho = 3100 \text{ (Kg/m}^3\text{)}$ inicialmente a 20°C . Se calienta con un fluido cuya temperatura oscila en forma de onda senoidal semirectificada, es decir durante 15 minutos la temperatura varía en forma senoidal con un máximo de 300°C y temperatura inicial 20°C mientras que en los 15 minutos siguientes la temperatura permanece a 20°C , repitiéndose el ciclo durante 4 horas. Determinar la distribución de temperaturas en función del tiempo si el coeficiente de transmisión de calor es de $50 \text{ (Kcal/hm}^2\text{ } ^\circ\text{C)}$

Solución:

La ecuación es análoga a la obtenida 7,5-3 pero teniendo en cuenta que la convolución de Laplace es

$$\int_0^{\tau} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_c} \tau^*\right) \exp[-\alpha \xi_i^2 (\tau - \tau^*)] d\tau^* = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\tau_c}\right)^2 + (\alpha \xi_i^2)^2} \left[\frac{2\pi}{\tau_c} \left(\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_c} \tau_c\right) \right) + \alpha \xi_i^2 \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_c} \tau_c\right) \right]$$

donde τ_c es el tiempo periódico, τ el tiempo total y $\tau_c = 30$ minutos. Si $\alpha = k/\rho c_p = 2/0,24 \cdot 3100 = 0,0026$ la longitud de onda = $\sqrt{4\pi\alpha/\rho} = 0,25 \text{ (m)}$ y la velocidad de propagación de la onda térmica $\sqrt{2\alpha\omega} = 0,125 \text{ (m/h)}$ La ecuación de distribución de temperaturas

$$T(r, z) = 20 + \frac{2\alpha \arctan}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + \alpha^2)(4\pi^2 + (1/\xi_i^2) J_0^2(\xi_i R))} [\alpha \xi_i^2 \sin(4\pi z) - 4\pi \cos(4\pi z) + 4\pi \exp(-\alpha \xi_i^2 z)]$$

$$\alpha r = \frac{h}{k} = \frac{50}{2} = 25 \quad \alpha R = 25 \cdot 0,025 = 0,625$$

y las raíces $\xi_i R$ Apéndice I, tabla I-3(4)

$$\xi_1 R = 1,02 \quad \xi_2 R = 3,98 \quad \xi_3 R = 7,10 \quad \xi_4 R = 10,23$$

Sustituyendo valores en la ec. anterior se tiene para $z = 7,5$ (v.in)

$$Y \quad r=0 \quad T(0, 7,5/60) = 20 + 201 = 221 (^\circ C)$$

7,6-1. Cilindro finito con temperaturas superficiales función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones Fig. 7,6-1

$$\begin{array}{lll} T=0 & 0 < r < R & 0 < z < l_2 \quad \tau < 0 \\ T=T_R(z) & r=R & \tau > 0 \\ T=T_{z_0}(z) & z=0 & \tau > 0 \\ T=T_{l_2}(z) & z=l_2 & \tau > 0 \end{array} \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + \xi_i R T_R(z) R_1(\xi_i R) + \frac{\partial^2 \bar{f}_{H,0}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}}{\partial \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, z, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

Aplicando a (3) la transformada finita del seno de Fourier

$$-(\xi^2 + \eta^2) \bar{f}_F^s(\xi, \eta, z) + T_R(z) \frac{2\xi \alpha R J_1(\xi R)}{\eta} + \eta [T_{Z_0}(z) - (-1)^n T_{L_2}(z)] = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^s}{\partial z}$$

con la inversión

$$\bar{f}_{H,0}(\xi, z, \tau) = \frac{2}{L_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\eta z) \bar{f}_F^s(\xi, \eta, z) \quad (6)$$

con $\eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_2}$

Resolviendo la ec. (5) por la transformada de Laplace

$$f(s) (s + \alpha \sigma^2) = 2\xi \alpha R J_1(\xi R) + \alpha \eta [T_{Z_0}(z) - (-1)^n T_{L_2}(z)] \quad (7)$$

$$\bar{f}_F^s(\xi, \eta, z) = L^{-1} \left[\frac{L[A_1(z)] + L[A_2(z)]}{s + \alpha \sigma^2} \right]$$

Sustituyendo (7) en (6) y por (4)

$$T(r, z, \tau) = \frac{4}{R^2 L_2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \sin(\eta z) L^{-1} \left[\frac{L[A_1(z)] + L[A_2(z)]}{s + \alpha \sigma^2} \right] \quad (8)$$

a) Fig. 7,6-1(a). Si $T_{L_2}(z) = T_{L_2} z$ $T_R(z) = T_R z$ $T_{Z_0}(z) = T_{Z_0} z$

$$L[A_1(z)] = \frac{A_1}{s^2} \quad L[A_2(z)] = \frac{A_2}{s^2}$$

$$L^{-1} \left[\frac{A_1 + A_2}{s^2 (s + \alpha \sigma^2)} \right] = (A_1 + A_2) \left[\frac{z}{\alpha \sigma^2} - \frac{1}{(\alpha \sigma^2)^2} (1 - \exp(-\alpha \sigma^2 z)) \right] \quad (9)$$

$$T(r, z, \tau) = \frac{4}{R^2 L_2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \sin(\eta z) \left[\frac{2\xi \alpha R J_1(\xi_i R) T_R}{\eta} + \alpha \eta (T_{Z_0} - (-1)^n T_{L_2}) \right] \cdot \left[\frac{z}{\alpha \sigma^2} - \frac{1}{(\alpha \sigma^2)^2} (1 - \exp(-\alpha \sigma^2 z)) \right] \quad (10)$$

ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$ $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta^2$ $\eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_2}$

b) Fig. 6,7-1(b). Si $T_R(z) = T_R \exp(-b z)$, $T_{L_2}(z) = T_{L_2} \exp(-c z)$

$$T_{Z_0}(z) = T_{Z_0} \exp(-g z)$$

$$L^{-1} \left[\frac{A_1}{s-b} + \frac{A_2}{s+c} + \frac{A_3}{s+g} \right] \frac{1}{s + \alpha \sigma^2} = \frac{A_1}{b - \alpha \sigma^2} [\exp(-\alpha \sigma^2 z) - \exp(-b z)] + \frac{A_2}{c - \alpha \sigma^2} [\exp(-\alpha \sigma^2 z) - \exp(-c z)] + \frac{A_3}{g - \alpha \sigma^2} [\exp(-\alpha \sigma^2 z) - \exp(-g z)] \quad (11)$$

y finalmente

$$T(r, z, \tau) = \frac{4}{R^2 L_z} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \sin(\eta z) \left[\frac{2 \alpha \xi_i R J_1(\xi_i R) T_R (\exp(-\alpha^2 \tau) - \exp(-\tau))}{\eta (b - \alpha^2)} \right. \\ \left. + \frac{\alpha \eta T_{z0}}{c - \alpha^2} (\exp(-\alpha^2 \tau) - \exp(-\tau)) - \frac{(1) m \alpha \eta T_{Lz}}{(g - \alpha^2)} (\exp(-\alpha^2 \tau) - \exp(-g \tau)) \right] \quad (12)$$

Ejemplo 7,6-1.

Un recipiente de acero de 1 m de diámetro y 2,5 m de altura, almacena un producto orgánico que funde a 94°C y sus propiedades son $C_p = 0,5$ (Kcal/kg°C), $\rho = 850$ (kg/m³), $k = 0,6$ (Kcal/hm°C). La altura del producto en el recipiente es de 2 m. El recipiente se calienta por el exterior con resistencias eléctricas adosadas a la superficie. Se desea conocer:

- Distribución de temperaturas en el eje vertical del recipiente cuando las temperaturas en la superficie exterior aumentan linealmente 50°C/h hasta alcanzar 94°C con una temperatura inicial de 20°C.
- Flujos térmicos.
- Calor almacenado en el producto en función del tiempo.

Solución:

- Si el calentamiento del recipiente tiene lugar también por el fondo y se admite que la caída de temperaturas a través del acero es despreciable el problema se trata como un cilindro de 4 m de altura que por simetría equivalente a $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ en $z = 2$ m. Aplicando la ec.7,6-1(10) se tiene

$$\alpha = \frac{0,6}{0,5 \cdot 850} = 0,0014 \text{ (m}^2/\text{h)} \quad J_0(\xi_i r) = 1$$

$$T(0, z, \tau) = 20 + \frac{0,56}{4 \cdot 0,5^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\eta z)}{J_1^2(\xi_i R)} \left[\frac{1,4 \cdot 10^{-3} \xi_i J_1(\xi_i R)}{\eta} + \frac{\eta}{1,4 \cdot 10^{-3} \delta^2} \left(\tau - \frac{1 - \exp(-1,4 \cdot 10^{-3} \tau)}{1,4 \cdot 10^{-3} \delta^2} \right) \right]$$

$$b) \left(\frac{q}{S}\right) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_R$$

$$c) \frac{Q(\tau)}{V} = g_{cp} \cdot \frac{1}{\pi R_0^2} \int_0^R 2\pi r T dr$$

7,6-2. Cilindro finito con temperaturas periódicas.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

a) Si se cumplen las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & 0 < r < R & 0 < z < L_z \quad \tau < 0 \\ T = T_R \cos(\omega \tau) & r = R & \tau > 0 \\ T = T_{L_z} \cos(\omega \tau) & z = L_z & \tau > 0 \\ T = T_{z_0} \cos(\omega \tau) & z = 0 & \tau > 0 \end{array} \quad (2)$$

Aplicando la inversión 7,6-1(8) del apartado anterior

$$L[A_1(z)] = \frac{A_1 S}{S^2 + \omega^2} \quad L[A_4(z)] = \frac{A_2 S}{S^2 + \omega^2} + \frac{A_3 S}{S^2 + \omega^2} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta la convolución de Laplace

$$\begin{aligned} \tilde{f}_F(\xi_i, \eta, z) &= L^{-1} \left[\frac{(A_1 + A_2 + A_3) S}{(S + \alpha \sigma^2)(S^2 + \omega^2)} \right] = \frac{(A_1 + A_2 + A_3)}{\omega^2 + (\alpha \sigma^2)^2} \left[\alpha \sigma^2 \cos(\omega \tau) \right. \\ &\quad \left. + \omega \sin(\omega \tau) - \alpha \sigma^2 \exp(-\alpha \sigma^2 \tau) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

y sustituyendo (4) en la inversión 7,6-1(8) y con la nomenclatura 7,2-2

$$\begin{aligned} T(r, z, \tau) &= \frac{4}{R^2 L_z} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \sin(\eta z)}{J_1^2(\xi_i R)} \left[2 \xi_i \alpha R J_1(\xi_i R) T_R \frac{1}{\eta} + \alpha \eta T_{z_0} - (-1)^n T_{L_z} \frac{\pi}{L_z} \right] \\ &\quad \left(\frac{1}{\omega^2 + (\alpha \sigma^2)^2} \right) \left[\alpha \sigma^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) + \alpha \sigma^2 (\exp(-\alpha \sigma^2 \tau) - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$ $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta^2$, $\eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_z}$

7,6-3. Cilindro finito con convección y temperatura periódicas

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

a) Si $T=0$ $0 < r < R$ $0 < z < L_z$ $\tau < 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r=0 \quad \tau > 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = a_r (T - t_0 \cos(\omega \tau)) \quad r=R \quad \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad z=0 \quad \tau > 0 \quad \frac{\partial T}{\partial z} = a_z (T - t_0 \cos(\omega \tau)) \quad z=L_z \quad \tau > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + R J_0(\xi_i R) a_r t_0 \cos(\omega \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_{H,0}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}}{\partial \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, z, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r) \bar{f}_{H,0}}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0^2(\xi_i R)} \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i J_1(\xi_i R) = a_r J_0(\xi_i R)$

Aplicando a (3) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) + \frac{R J_0(\xi_i R)}{\eta_j} a_r t_0 \cos(\omega \tau) \sin(\eta_j L_z) + a_z t_0 \cos(\omega \tau) \cos(\eta_j L_z) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^c}{d \tau} \quad (5)$$

con la inversión

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) = 2 \sum \frac{(\eta_j^2 + a_z^2) \cos(\eta_j z)}{[L_z(\eta_j^2 + a_z^2) + a_z]} \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) \quad (6)$$

donde η_j son las raíces de $\eta_j \tan(\eta_j L_z) = a_z$

Resolviendo la ec. (5) por transformadas de Laplace

$$f(s) [s + \alpha \omega^2] = \frac{s t_0}{s^2 + \omega^2} \left[\frac{\alpha R J_0(\xi_i R)}{\eta_j} a_r \sin(\eta_j L_z) + a_z \alpha \cos(\eta_j L_z) \right] \quad (7)$$

Teniendo en cuenta la convolución y las inversiones (6) y (4).

$$T(r, z, \tau) = \frac{4a_2^2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\eta_j z) \xi_i^2 J_0(\xi_i r) t_0}{J_0^2(\xi_i R) [L_2(\eta_j^2 + a_2^2) + a_2] [\xi_i^2 + a_2^2] \sin^2(\eta_j L_2)} \left[\frac{\alpha R J_0(\xi_i R)}{\eta_j} a_r \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{\sin(\eta_j L_2) + a_2 \alpha \cos(\eta_j L_2)}{(\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2)} \right] \left[\alpha \xi_i^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_i) - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_f)) \right] \quad (8)$$

Ejemplo 7,6-3.

El catalizador para una reacción química en lecho fijo está constituido por pastillas cilíndricas de 5 mm de diámetro y 5 mm de altura de un material cerámico poroso en cuyo interior se ha fijado el compuesto activo. Para homogeneizar el comportamiento del catalizador y evitar resquebrajaduras durante el funcionamiento en el reactor, las pastillas se someten al tratamiento térmico siguiente: Calentamiento en un medio inerte con temperatura inicial de 20°C y variación senoidal hasta alcanzar 450°C en 1 hora. Después de este tiempo se somete el material durante 3 horas a un ambiente de temperaturas periódicas ley coseno de 100°C con períodos de 10 minutos. Las propiedades de la pastilla son: conductividad media equivalente $k = 0,12 \text{ (kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$, $\rho = 800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, $C_p = 0,15 \text{ (kcal/kg.}^\circ\text{C)}$. El coeficiente de transmisión fluido pastillas se mantiene constante por control de la velocidad del fluido en 50 $\text{(kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$. Se desea conocer

- Distribución de temperaturas en la pastilla en función del tiempo para el período senoidal.
- Idem para los períodos ley coseno.

Solución:

- Aplicando los criterios del apartado 7,6-3 para el valor de

$$\bar{T}_{H,0} = L^{-1} \left[L \left[R J_0(\xi_i R) \frac{a_r \sin(\eta_j L_2)}{\eta_j} + a_2 \cos(\eta_j L_2) \frac{\sin\left(\frac{2\pi \tau}{T_p}\right)}{s^2 + \alpha \xi_i^2} \right] t_0 \alpha \right]$$

Si $a_2 = a_r$ por la convolución de Laplace

$$L^{-1} \left[\right] = \alpha a_r t_0 (R J_0(\xi_i R) \frac{\sin(\eta_j L_2)}{\eta_j} + \cos(\eta_j L_2)) \int_0^{\tau} \sin\left(\frac{2\pi \tau^*}{T_p}\right) \exp(-\alpha \xi_i^2 (\tau - \tau^*)) d\tau^*$$

y si

$$\int_0^{\tau} [\quad] d\tau^* = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\tau_p}\right)^2 + (\alpha\sigma^2)^2} \left[\frac{2\pi}{\tau_p} \right] \left(\exp(-\alpha\sigma^2\tau) - \cos\left(2\pi \frac{\tau}{\tau_p}\right) + \alpha\sigma^2 \sin\left(\pi \frac{\tau}{\tau_p}\right) \right]$$

donde $\tau = 0 < \tau < \tau_p$ y si la variación senoidal solo llega a 1 hora $\tau_p = 4(h)$ el tiempo de la exponencial es también τ_c y

$$T(r, z, \tau) = \frac{4\alpha a_r^5 t_0}{r^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\eta_j z) J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R) [L_2(a_i^2 + \eta_j^2) + a_i^2] [\xi_i^2 + a_i^2] \sin^2(\eta_j L_z)} \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{2\pi}{\tau_p}\right)^2 + (\alpha\sigma^2)^2\right]} \cdot \left[\frac{R J_0(\xi_i R) \sin(\eta_j L_z) + \cos(\eta_j L_z) \right] \left[\frac{2\pi}{\tau_p} \right] \left(\exp(-\alpha\sigma^2\tau) - \cos\left(2\pi \frac{\tau}{\tau_p}\right) + \alpha\sigma^2 \sin\left(\pi \frac{\tau}{\tau_p}\right) \right)$$

$$a_r = \frac{h}{b} = \frac{50}{0,2} = 250 \quad \alpha = \frac{k}{g\phi} = 0,0016 \quad \sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$$

Para $a_r R = 1,25$
tabla I-3(4)

las raíces de $\xi_i R$ Apéndice I

$$\xi_1 R = 1,35 \quad \xi_2 R = 4,13 \quad \xi_3 R = 7,18 \quad \xi_4 R = 10,29$$

Para $a_x L_x = 1,25$
tabla I-3(5)

las raíces de $\eta_j L_x$ Apéndice I,

$$\eta_1 L_x = 0,92 \quad \eta_2 L_x = 3,48 \quad \eta_3 L_x = 6,46 \quad \eta_4 L_x = 9,55$$

b) Aplicando la ecuación 7,6-3(8) teniendo en cuenta que $t_0 = 100$

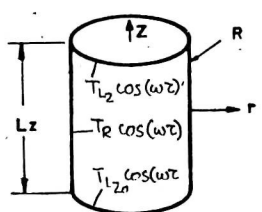
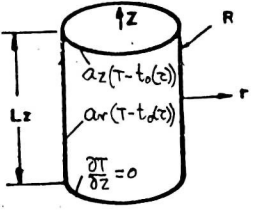
$$a_r = a_z, \quad \omega = 12\pi$$

$$T(r, z, \tau) = T(0,0, 15/60) + \frac{4a_r^5 t_0}{r^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\eta_j L_z) J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R) [L_2(\eta_j^2 + a_i^2) + a_i^2] [\xi_i^2 + a_i^2] \sin^2(\eta_j L_z)} \cdot \left[\frac{R J_0(\xi_i R) \sin(\eta_j L_z) + \cos(\eta_j L_z) \right] \left[\frac{\alpha\sigma^2 \cos(12\pi \tau) + 12\pi \sin(12\pi \tau) - \alpha\sigma^2 \exp(-\alpha\sigma^2\tau)}{(12\pi)^2 + (\alpha\sigma^2)^2} \right]$$

con $0 < \tau < 1/6$, $\tau = n^\circ \text{ periodos} + \tau_c$

Las raíces ξ_i y η_j son las mismas que en el caso a).

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|----------------------|---|---|
| <p>Fig. 7,6-1</p> | $ \begin{aligned} T=0 & \quad 0 < r < R \quad z < 0 \\ & \quad 0 < z < L_z \quad z < 0 \\ T=T_R(\tau) & \quad r=R \quad z > 0 \\ T=T_0(\tau) & \quad z=0 \quad z > 0 \\ T=T_{L_z}(\tau) & \quad z=L_z \quad z > 0 \end{aligned} $ | $ T(r,z,\tau) = \frac{4}{R^2 L_z} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \sin(\eta z)}{J_1^2(\xi_i R)} \left[\frac{2 \xi_i \alpha R J_1(\xi_i R)}{\eta} L^{-1} \left[\frac{L [T_R(\tau)]}{s + \alpha \delta^2} \right] + \right. \\ \left. + \alpha \eta L^{-1} \left[\frac{L [T_0(\tau) - (-1)^n T_{L_z}(\tau)]}{s + \alpha \delta^2} \right] \right] \\ \xi_i, \text{ raíces de } J_0(\xi_i R) = 0 \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_z} \quad \delta^2 = \xi_i^2 + \eta^2 $ |
| <p>Fig. 7,6-1(a)</p> | $ \begin{aligned} T=0 & \quad 0 < r < R \quad z < 0 \\ & \quad 0 < z < L_z \quad z < 0 \\ T=T_R \tau & \quad r=R \quad z > 0 \\ T=T_0 \tau & \quad z=0 \quad z > 0 \\ T=T_z \tau & \quad z=L_z \quad z > 0 \end{aligned} $ | $ T(r,z,\tau) = \frac{4}{R^2 L_z} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \sin(\eta z)}{J_1^2(\xi_i R)} \left[\frac{2 \alpha \xi_i R J_1(\xi_i R) T_R}{\eta} + \alpha \eta (T_0 - (-1)^n T_{L_z}) \cdot \right. \\ \left. \left[\frac{\tau}{\alpha \delta^2} - \frac{1}{\alpha \delta^2} (1 - \exp(-\alpha \delta^2 \tau)) \right] \right] $ |
| <p>Fig. 7,6-1(b)</p> | $ \begin{aligned} T=0 & \quad 0 < r < R \quad z < 0 \\ & \quad 0 < z < L_z \quad z < 0 \\ T=T_R \exp(-bz) & \quad r=R, z > 0 \\ T=T_{L_z} \exp(-cz) & \quad z=L_z, z > 0 \end{aligned} $ | $ T(r,z,\tau) = \frac{4}{R^2 L_z} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r) \sin(\eta z)}{J_1^2(\xi_i R)} \left[\frac{2 \xi_i \alpha R J_1(\xi_i R)}{\eta (b - \alpha \delta^2)} T_R (\exp(-\alpha \delta^2 \tau) - \exp(-b \tau)) + \right. \\ \left. + \frac{\eta \alpha T_{L_z}}{(c - \alpha \delta^2)} (\exp(-\alpha \delta^2 \tau) - \exp(-c \tau)) - \frac{(-1)^n \alpha \eta T_{L_z}}{g - \alpha \delta^2} (\exp(-\alpha \delta^2 \tau) - \exp(-g \tau)) \right] $ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperatura |
|--|---|---|
|  <p>Fig. 7,6-2</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $0 < z < L_z$ $T = T_{L_z} \cos(wz), \quad z = L_z \quad r > 0$ $T = T_{L_0} \cos(wz), \quad z = 0 \quad r > 0$ $T = T_R \cos(wz), \quad r = R \quad z > 0$ | $T(r, z, z) = \frac{4}{R^2 L_z} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \sin(\eta z) \left[\frac{2 \xi_i}{\eta} \alpha R J_1(\xi_i R) T_R + \alpha \eta (T_{L_0} - (-1)^n T_{L_z}) \right]$ $\left[\frac{1}{\omega^2 + (\alpha \delta)^2} \right] \left[\alpha \delta^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) + \alpha \delta^2 (\exp(-\alpha \delta^2 \tau_i) - \exp(-\alpha \delta^2 \tau_f)) \right]$ $\xi_i, \text{ raíces de } J_0(\xi_i R) = 0 \quad \delta^2 = \xi_i^2 + \eta^2 \quad \eta^2 = (2n+1) \frac{\pi}{L_z}$ |
|  <p>Fig. 7,6-3</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $0 < z < L_z$ $\frac{\partial T}{\partial z} = a_z(T - t_0 \cos(\omega z)), \quad z = L_z, \quad r > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_r(T - t_0 \cos(\omega z)), \quad r = R, \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad r > 0$ | $T(r, z, z) = \frac{4 a_z^2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r) t_0 \cos(\eta_j z)}{J_0^2(\xi_i R) [L_z(\eta_j^2 + a_z^2) + a_z]} \left[\frac{\alpha a_r R J_0(\xi_i R)}{\eta_j} \right.$ $\cdot \sin(\eta_j L_z) + \alpha a_z \cos(\eta_j L_z) \left. \right] \left[\alpha \delta^2 \cos(\omega \tau_c) + \omega \sin(\omega \tau_c) + \alpha \delta^2 (\exp(-\alpha \delta^2 \tau_i) - \exp(-\alpha \delta^2 \tau_f)) \right]$ $\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad r > 0$ $\xi_i, \text{ raíces de } \xi_i J_1(\xi_i R) = a_r J_0(\xi_i R)$ $\eta_j, \text{ raíces de } \eta_j \tanh(\eta_j L_z) = a_z$ $\delta^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$ |

7,7-1. Tubo infinito con convección y temperaturas función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones Fig. 7,7-2

$$\begin{aligned} T=0 & \quad R_0 < r < R_e & \quad \tau < 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_r (T - t(\tau)) & \quad r = R_0 & \quad \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0 & \quad r = R_e & \quad \tau > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$\bar{L}_{H,0} \left[\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \frac{2}{\pi \xi_i} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R_e} - \frac{2 J_0'(\xi_i R_e)}{\pi (\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + \alpha_r J_0(\xi_i R_0))} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R_0} - \alpha_r T_{R_0} \right] - \xi_i^2 \bar{f}_{H,0} \quad (3)$$

$$- \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) + \alpha_r t(\tau) \frac{2}{\pi} \frac{J_0'(\xi_i R_e)}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + \alpha_r J_0(\xi_i R_0)]} = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_{H,0}}{d \tau} \quad (4)$$

con la inversión y los valores de $C_0(\xi_i, \tau)$ y raíces de ξ_i dados en el apartado 6,7-1.

Resolviendo la ec. (4) por transformación de Laplace con las condiciones de (2)

$$\begin{aligned} f(s) (s + \alpha \xi_i^2) &= L[A_1 t(\tau)] & A_1 = \frac{2 \alpha_r J_0'(\xi_i R_e)}{\pi (\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + \alpha_r J_0(\xi_i R_0))} \\ \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) &= L^{-1} \left[\frac{L[A_1 t(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

y la solución

$$T(r, \tau) = [Ec. 6,7-1(4) \text{ sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por } Ec(5)] \quad (6)$$

-a) Si $t(\tau) = t_0 \tau$ Fig. 7,7-1(a)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{A_1 t_0}{\alpha \xi_i^2} \left[\tau - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right] \quad (7)$$

$$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-1(4)} \text{ Sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (7)}]$$

-b) Si $t(\tau) = t_0 \exp(-b\tau)$ Fig. 7,7-1(b)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{A_1 t_0}{(b - \alpha \xi_i^2)} (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-b\tau)) \quad (8)$$

$$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-1(4)} \text{ sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por Ec. (8)}] \quad (9)$$

-c) Si $t(\tau) = t_0 \cos(\omega\tau)$

$$f_{H,0}(\xi_i, \tau) = A_1 t_0 L^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s + \alpha \xi_i^2)} \right]$$

y por la convolución de Laplace

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{A_1 t_0}{(\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2)} \left[\alpha \xi_i^2 \cos(\omega\tau) + \omega \sin(\omega\tau) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right]$$

$$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-1(4)} \text{ Sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (10)}] \quad (11)$$

7,7-2. Tubo infinito con convección y temperaturas función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones Fig. (7,7-2)

$$\begin{aligned} T &= 0 & R_0 < r < R_e & \tau < 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= 0 & r &= R_0 & \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= -a_r (T - t_0(\tau)) & r &= R_e & \tau > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$\bar{L}_{H,0} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{J_0'(\xi_i R_0)}{(\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_r J_0(\xi_i R_e))} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{R_e} + a_r T_{R_e} \right] - \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) \quad (3)$$

$$- \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) + A_2 t(\tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_{H,0}}{d \tau} \quad (4)$$

con la inversión, valores de $G(\xi, r)$ y raíces ξ_i indicados en el apartado 6,7-2.

Resolviendo la ec.(4) se obtiene

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = L^{-1} \left[\frac{1 [A_2 t(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right] \quad (5)$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \frac{J_0'(\xi_i R_0)}{\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + \alpha r J_0(\xi_i R_0)}$$

$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-2(3)} \text{ sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (5)}]$

a) Si $t_0(\tau) = t_0 \tau$ Fig. 7,7-2(a)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{A_2 t_0}{\alpha \xi_i^2} \left(\tau - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(\alpha \xi_i^2 \tau)) \right) \quad (6)$$

$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-2(3)} \text{ Sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (6)}] \quad (7)$

b) Si $t(\tau) = t \exp(-b\tau)$ Fig. 7,7-2(b)

$$f_{H,0} = \frac{A_2 t_0}{(b - \alpha \xi_i^2)} (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-b\tau)) \quad (8)$$

$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-2(3)} \text{ Sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (8)}]$

c) Si $t(\tau) = t_0 \cos(\omega \tau)$ Fig. 7,7-2(c)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{A_2 t}{\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2} \left[\alpha \xi_i^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_0)) \right] \quad (9)$$

$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-2(3)} \text{ Sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (9)}]$

7,7-3. Tubo infinito con convección y temperaturas función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones de la Fig. 7,7-3.

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel

$$\begin{aligned} \bar{L}_{H,0} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\xi_i J_0'(\xi_i R_0) + b_1 J_0(\xi_i R_0)}{\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_1 J_0(\xi_i R_e)} \right] \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{R_e} + a_1 T_{R_e} \right] - \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{R_0} + b_1 T_{R_0} \right] - \xi_i^2 \bar{f}_{H,0} \\ - \xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) + \Delta_1 t_{Re}(\tau) + \Delta_2 t_{Ro}(\tau) &= \frac{1}{\alpha} \frac{df_{H,0}}{d\tau} \end{aligned} \quad (2)$$

y procediendo como en el apartado 7,7-2

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = L^{-1} \left[\frac{A_1 L[t_{Re}(\tau)] + A_2 L[t_{Ro}(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right] \quad (3)$$

$$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-3(3) Sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (3)}] \quad (4)$$

a) Si $t_{Re}(\tau) = t_{Re} \tau$ $t_{Ro}(\tau) = t_{Ro} \tau$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \left(\frac{A_1 t_{Re} + A_2 t_{Ro}}{\alpha \xi_i^2} \right) \left[\tau - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right] \quad (5)$$

$$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-3(3) Sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (5)}] \quad (6)$$

b) Si $t_{Re}(\tau) = t_{Re} \exp(-c\tau)$ $t_{Ro}(\tau) = t_{Ro} \exp(-g\tau)$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{A_1 t_{Re}}{(c - \alpha \xi_i^2)} \left[\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-c\tau) \right] + \frac{A_2 t_{Ro}}{(g - \alpha \xi_i^2)} \left[\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-g\tau) \right] \quad (7)$$

$$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-3(3) Sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (7)}]$$

c) Si $t_{Re}(\tau) = t_{Ro}(\tau) = t_0 \cos(\omega\tau)$

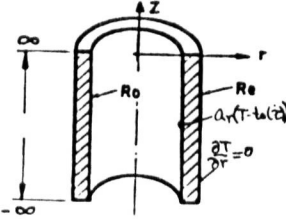
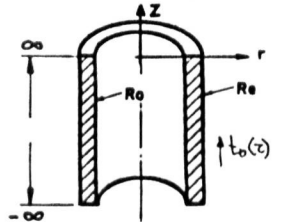
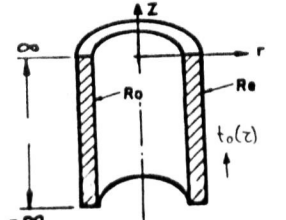
$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{(A_1 + A_2) t_0}{\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2} \left[\alpha \xi_i^2 \omega \cos(\omega\tau) + \omega \sin(\omega\tau) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_f)) \right] \quad (8)$$

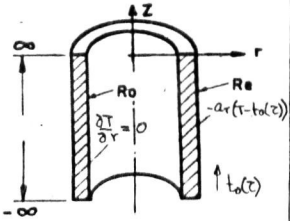
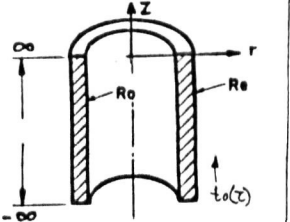
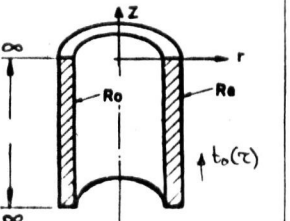
$$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,7-3(3) Sustituyendo } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (8)}] -$$

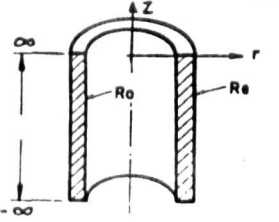
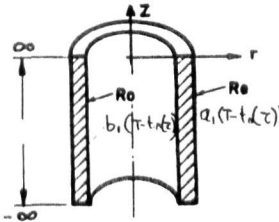
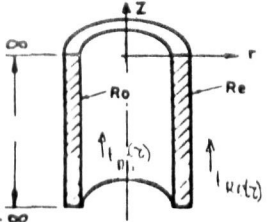
7,8-1. Tubo finito con convección y temperaturas función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|---|
|  <p>Fig. 7,7-1(a)</p> | $T=0 \quad R_o < r < R_e \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_r (T - t_d(z)), \quad r = R_o \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_e \quad z > 0$ | $T(r, z) = \text{Ec. 6,7-1(a)} \text{ sustituyendo } \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \text{ por}$ $\bar{f}_{H,0}(\xi_i) = \frac{2 \alpha_r J_0'(\xi_i R_o)}{\pi [\xi_i J_0'(\xi_i R_o) + \alpha_r J_0(\xi_i R_o)]} \frac{t_o}{\alpha \xi_i^2} \left[z - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)) \right]$ |
|  <p>Fig. 7,7-1(b)</p> | <p>fig. 7,7-1(a) con</p> $t_d(z) = t_o \exp(-b z)$ | $T(r, z) = \text{Ec. 6,7-1(a)} \text{ sustituyendo } f_{H,0}(\xi_i) \text{ por}$ $f_{H,0}(\xi_i) = \frac{A_1 t_o}{b - \alpha \xi_i^2} (\exp(\alpha \xi_i^2 z) - \exp(-b z))$ $A_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha_r J_0'(\xi_i R_o)}{\xi_i J_0'(\xi_i R_o) + \alpha_r(\xi_i R_o)}$ |
|  <p>Fig. 7,7-1(c)</p> | <p>fig 7,7-1(a) con</p> $t_o(z) = t_o \cos(\omega z)$ | $T(r, z) = \text{Ec. 6,7-1(a)} \text{ sustituyendo } \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \text{ por}$ $\bar{f}_{H,0}(\xi_i) = \frac{A_1 t_o}{\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2} [\alpha \xi_i^2 \omega(\omega z) + \omega \sin(\omega z) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 z) - \exp(-\alpha \xi_i^2 z_f))]]$ <p>$A_1 = \text{valor de 7,7-1(b)}$</p> |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|--|---|
|  <p>Fig. 7,7-2(a)</p> | $T=0 \quad R_o < r < R_e \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_r (T - t_o(z)), \quad r=R_e, \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r=R_o \quad z > 0$ | $T(r,z) = \text{Ec. 6,7-2(3)} \quad \text{sustituyendo } \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \text{ por}$ $\bar{f}_{H,0}(\xi_i) = \frac{A_2 t_o}{\alpha \xi_i^2} \left[z - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)) \right]$ $A_2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{J_0'(\xi_i R_o)}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_e) + a_r J_0(\xi_i R_e)]}$ |
|  <p>Fig. 7,7-2(b)</p> | <p>fig. 7,7-2(a) con</p> $t_o(z) = t_o \exp(-bz)$ | $T(r,z) = \text{Ec. 6,7-2(3)} \quad \text{sustituyendo } \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \text{ por}$ $\bar{f}_{H,0}(\xi_i) = \frac{A_2 t_o}{b - \alpha \xi_i^2} (\exp(-\alpha \xi_i^2 z) - \exp(-bz))$ $A_2 = \text{valor de 7,7-2(a)}$ |
|  <p>Fig. 7,7-2(c)</p> | <p>fig. 7,7-2(a) con</p> $t_o(z) = t_o \cos(wz)$ | $T(r,z) = \text{Ec. 6,7-2(3)} \quad \text{sustituyendo } \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \text{ por}$ $\bar{f}_{H,0}(\xi_i) = \frac{A_2 t_o}{w^2 + (\alpha \xi_i^2)^2} \left[\alpha \xi_i^2 \cos(wz) + w \sin(wz) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 z) - \exp(-\alpha \xi_i^2 z_f)) \right]$ $A_2 = \text{valor de 7,7-2(a)}$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|---|
|  <p>Fig. 7,7-3(a)</p> | $T=0 \quad R_o < r < R_e \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = b_1 (T - t_{R_o} z)$ $r = R_o \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_1 (T - t_{R_e} z)$ $r = R_e \quad z > 0$ $a_1 = \frac{h_e}{k} \quad b_1 = \frac{h_o}{k}$ | $T(r, z) = \text{Ec. 6,7-3(3)} \text{ sustituyendo } \bar{f}_{H,o}(\xi_i) \text{ por}$ $\bar{f}_{H,o}(\xi_i) = \left(\frac{A_1 t_{R_e} + A_2 t_o}{\alpha \xi_i^2} \right) \left(z_o - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 z)) \right)$ $A_1 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\xi_i J_o'(\xi_i R_o) + b_1 J_o(\xi_i R_o)}{\xi_i J_o'(\xi_i R_e) + a_1 J_o(\xi_i R_e)} \right] \quad A_2 = -\frac{2}{\pi}$ |
|  <p>Fig. 7,7-3(b)</p> | <p>Fig 7,7-3(a) con</p> $t_{R_o}(z) = t_{R_o} \exp(-cz)$ $t_{R_e}(z) = t_{R_e} \exp(-dz)$ | $T(r, z) = \text{Ec. 6,7-3(3)} \text{ sustituyendo } \bar{f}_{H,o}(\xi_i) \text{ por}$ $\bar{f}_{H,o}(\xi_i) = \frac{A_1 t_{R_e}}{(C - \alpha \xi_i^2)} (\exp(-\alpha \xi_i^2 z) - \exp(-cz)) + \frac{A_2 t_{R_o}}{d - \alpha \xi_i^2} (\exp(-\alpha \xi_i^2 z) - \exp(-dz))$ <p>A_1, A_2 valores de 7,7-3(a)</p> |
|  <p>Fig. 7,7-3(c)</p> | <p>Fig 7,7-3(a) con</p> $t_{R_o}(z) = t_{R_e}(z) = t_o \cos(\omega z)$ | $T(r, z) = \text{Ec. 6,7-3(3)} \text{ sustituyendo } \bar{f}_{H,o}(\xi_i) \text{ por}$ $\bar{f}_{H,o}(\xi_i) = \frac{(A_1 + A_2) t_o}{[\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2]} [\alpha \xi_i^2 \cos(\omega z) + \omega \sin(\omega z) + \alpha \xi_i^2 (\exp(-\alpha \xi_i^2 z) - \exp(-\alpha \xi_i^2 z_f))]$ <p>A_1, A_2 valores de 7,7-3(a)</p> |

Aplicando a (1) la transformada finita de Hankel y con la nomenclatura del apartado 7,7-1

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + A_1 t(\tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_{H,0}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}}{\partial \tau} \quad (2)$$

con la inversión, valores de $\omega(\xi; \tau)$ y raíces de ξ_i indicados en el apartado 6,7-1.

Aplicando a (2) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2) \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) + \frac{A_1 t_r(\tau) \sin(\eta_j L_2) + a_2 t_z(\tau) \cos(\eta_j L_2)}{\eta_j} = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^c}{d \tau} \quad (3)$$

con la inversión

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_2^2 + \eta_j^2) \cos(\eta_j z)}{[L_2(\eta_j^2 + a_2^2) + a_2]} \bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) \quad (4)$$

donde η_j son las raíces de $\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_2) = a_2$

Resolviendo (3)

$$\bar{f}_F^c(\xi_i, \eta_j, \tau) = L^{-1} \left[L \left[\frac{A_1 t_r(\tau) \sin(\eta_j L_2) + a_2 t_z(\tau) \cos(\eta_j L_2)}{\eta_j} \right] \frac{1}{s + \alpha \xi_i^2} \right] \quad (5)$$

donde $\xi_i^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$ y por las inversiones (4) y 6,7-1 (3)

$T(r, \tau) = [\text{Ec. 6,8-1 (6)}]$ Sustituyendo \bar{f}_F^c por la ec. (5) .

7,9-1. Esfera con temperaturas superficiales función del tiempo.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 7,9-1.

La ec. (1) puede escribirse

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r T(r, \tau)) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (2) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, z) + \xi [r T(0, z) - (-1)^m T_R(z)]_0^R = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^s}{dz} \quad (3)$$

$$-\xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, z) - \xi (-1)^m T_R(z) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^s}{dz} \quad (4)$$

Resolviendo (4) con $T = 0$ en $z = 0$

$$f(s) [s + \alpha \xi^2] = L [-\xi (-1)^m T_R(z)]$$

y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_F^s(\xi, z) = L^{-1} \left[\frac{L[-\xi (-1)^m T_R(z)]}{s + \alpha \xi^2} \right] \quad (5)$$

y por la inversión de $\bar{f}_F^s(\xi, z)$

$$T(r, z) = \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi r)}{r} \cdot L^{-1} \left[\frac{L[-(-1)^m \xi T_R(z)]}{s + \alpha \xi^2} \right] \quad (6)$$

donde $\xi = \pi \frac{m}{R}$.

a) Si $T_R(z) = T_R z$

$$L [-(-1)^m T_R(z)] = (-1)^m \xi \frac{T_R}{\xi^2} \quad (7)$$

$$T(r, z) = \frac{2 T_R}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \sin(\xi r)}{R} \xi \left[\frac{r}{\alpha \xi^2} - \frac{1}{(\alpha \xi^2)^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right] \quad (8)$$

con $\xi = \pi \frac{m}{R}$

b) Si $T_R(z) = T_R \exp(-b z)$

$$L^{-1} \left[\frac{(-1)^m \xi T_R}{(s + \alpha \xi^2)(s + b)} \right] = \frac{(-1)^m \xi T_R}{b - \alpha \xi^2} (\exp(-\alpha \xi^2 z) - \exp(-b z))$$

$$T(r, z) = \frac{2 T_R}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi \sin(\xi r)}{r} [\exp(-\alpha \xi^2 z) - \exp(-b z)] \quad (9)$$

donde $\xi = \frac{\pi m}{R}$.

7,9-2. Esfera con temperaturas periódicas

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

Para las condiciones de la Fig. 7,9-2 la solución es la correspondiente a 7,9-1(6)

$$L^{-1} \left[\frac{1 [(-1)^m \xi T_R \cos(\omega \tau)]}{s + \alpha \xi^2} \right] = L^{-1} \left[\frac{(-1)^{m+1} \xi T_R s}{(s + \alpha \xi^2)(s^2 + \omega^2)} \right] \quad (2)$$

y por la convolución de Laplace la ec. (2) vale

$$\bar{T}_F(\xi, \tau) = \frac{(-1)^m \xi T_R}{\xi^2 + \omega^2} \left[\alpha \xi^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) - \alpha \xi^2 \tau \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \right] \quad (3)$$

y con la nomenclatura de 7,2-2

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi r)}{r} \frac{(-1)^m \xi T_R}{(\xi^2 + \omega^2)} \left[\alpha \xi^2 \cos(\omega \tau) + \omega \sin(\omega \tau) - \alpha \xi^2 \tau \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \right] \quad (4)$$

donde $\xi = \frac{\pi m}{R}$

7,9-3. Esfera con convección y temperaturas periódicas

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r^2} (r T(r, \tau)) = \frac{r}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

con las condiciones indicadas en la Fig. 7,9-3.

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de

Fourier

$$\begin{aligned}
 -\xi_i \bar{f}_F^s(\xi_i, \tau) + \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\tau) \sin(\xi_i r) + \xi_i(r\tau) \cos(\xi_i r) \right]_0^R &= \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{f}_F^s}{d\tau} \\
 -\xi_i \bar{f}_F^s(\xi_i, \tau) + \alpha R \tau_0 \cos(\omega \tau) \sin(\xi_i R) &= \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{f}_F^s}{d\tau}
 \end{aligned} \quad (2)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(R^2 \xi_i^2 + (\alpha R - 1)^2) \sin(\xi_i r)}{[R^2 \xi_i^2 + \alpha R (\alpha R - 1)] r} \bar{f}_F^s(\xi_i, \tau) \quad (3)$$

donde ξ_i son las raíces de $R \xi_i \cot g(\xi_i R) + \alpha R - 1 = 0$

Resolviendo por la transformación de Laplace la ec. (2)

$$f(s) = \alpha R \tau_0 \sin(\xi_i R) \cdot \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(s + \alpha \xi_i^2)}$$

y por la convolución de Laplace

$$\bar{f}_F^s(\xi_i, \tau) = \alpha R \tau_0 \frac{\sin(\xi_i R)}{[\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2]} \left[\alpha \xi_i^2 \sin(\omega \tau) - \omega \cos(\omega \tau) - \omega \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \right] \quad (4)$$


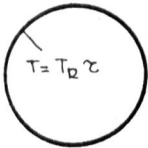
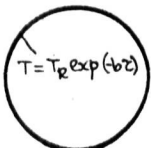
y sustituyendo en la ec. (3) con la nomenclatura de 7,2-2



$$\begin{aligned}
 T(r, \tau) &= 2 \alpha R \tau_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(R^2 \xi_i^2 + (\alpha R - 1)^2) \sin(\xi_i R) \sin(\xi_i r)}{[R^2 \xi_i^2 + \alpha R (\alpha R - 1)] [\omega^2 + (\alpha \xi_i^2)^2]} \cdot \\
 &\cdot \left[\alpha \xi_i^2 \sin(\omega \tau) - \omega \cos(\omega \tau) + \omega (\exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_i) - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau_f)) \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$

Ejemplo 7,9-3.

Una esfera de 2 cm de diámetro inicialmente a 400°C y propiedades $C_p = 0,20$ (kcal/kg°C), $\rho = 2300$ (kg/m³) $k = 2,1$ (kcal/h.m.°C) se calienta con un fluido cuya temperatura inicial es de 500°C que aumenta en forma lineal a 700°C en 15 minutos. El coeficiente de transmisión de calor es de 70 (kcal/h.m².°C). Se desea conocer:

a) Distribución de temperaturas en la esfera.

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|--|---|
|  <p data-bbox="142 394 289 418">Fig. 7,9-1</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T = T_R(z) \quad r=R \quad z > 0$ | $T(r,z) = \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\xi r)}{r} L^{-1} \left[\frac{L[-\xi (-1)^m T_R(z)]}{s + \alpha \xi^2} \right]$ <p data-bbox="743 252 1159 283">$L[\quad]$ = Transformada de Laplace</p> <p data-bbox="743 298 1094 329">$L^{-1}[\quad]$ = Inversión de Laplace</p> $\xi = \frac{\pi m}{R}$ |
|  <p data-bbox="142 646 326 670">Fig. 7,9-1(a)</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T = T_R z \quad r=R \quad z > 0$ | $T(r,z) = \frac{2T_R}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\xi r)}{r} \frac{\xi (-1)^m}{\alpha \xi^2} \left[z - \frac{1}{\alpha \xi^2} (1 - \exp(-\alpha \xi^2 z)) \right]$ $\xi = \frac{\pi m}{R}$ |
|  <p data-bbox="152 933 337 957">Fig. 7,9-1(b)</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T = T_R \exp(-bt z) \quad r=R, z > 0$ | $T(r,z) = \frac{2T_R}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\xi r)}{r} \xi (-1)^m \left[\exp(-\alpha \xi^2 z) - \exp(-bt z) \right]$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|---|
|  <p>Fig. 7,9-2</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T = T_R \cos(wz), \quad r = R, \quad z > 0$ | $T(r, z) = \frac{2 T_R}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi r)}{r} \frac{\xi (-1)^m}{[\omega^2 + (\xi \eta)^2]} \left[\alpha \xi^2 \cos(\omega z) + \omega \sin(\omega z) \right. \\ \left. + \alpha \xi^2 (\exp(-\alpha \xi^2 z_i) - \exp(-\alpha \xi^2 z_f)) \right]$ $\xi = \frac{\pi m}{R}$ |
|  <p>Fig. 7,9-3</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_r (T - t_0 \cos(\omega z))$ $r = R, \quad z > 0$ | $T(r, z) = 2 \alpha a_r t_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(R^2 \xi_i^2 + (a_r R - 1)^2) \sin(\xi_i R) \sin(\xi_i r)}{r [R^2 \xi_i^2 + a_r R (a_r - 1)] [\omega^2 + (\alpha \xi_i \eta)^2]} \left[\alpha \xi_i^2 \sin(\omega z) \right. \\ \left. - \omega \cos(\omega z) + \omega (\exp(-\alpha \xi_i^2 z_i) - \exp(-\alpha \xi_i^2 z_f)) \right]$ $\xi_i, \text{ raíces de } R \xi_i \alpha \eta (\xi_i R) + a_r R - 1 = 0$ |

- b) Flujos y gradientes térmicos.
- c) Velocidades de calentamiento.
- d) Calor acumulado.

Solución:

- a) Aplicando los criterios del apartado 7,9-3, la función \bar{T}_F de la ec. 7,9-3(4) es de la forma

$$\bar{T}_F^s(\xi_i, \tau) = \alpha a_r R t_0 \int_0^\tau \tau^* \exp(-\alpha \xi_i^2 (\tau - \tau^*)) d\tau^* = \alpha a_r \frac{R t_0}{\alpha \xi_i^2} \left[1 - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right]$$

donde $t_0 = 100^\circ\text{C}$ y aplicando la ec. 7,9-3(5).

- b) $\left(\frac{q}{S}\right) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_R$, en la superficie de la esfera con la ec. 7,9-3(5).
- c) $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_r$ diferenciando la ec. 7,9(3,5) con el valor \bar{T}_F^s de a)
- d) $\frac{Q(\tau)}{V} = \frac{\rho C_p}{R^2} \int_0^R T r dr$ donde T está dado por la ec. 7,9-3(5).

Bibliografía

- ANGLESIO, J.M., Une methode d'analyse des champs thermiques variables, Journées Internationales de la Transmission de la Chaleur, Société Française des Thermiciens, June, Paris, (1961).
- ARPACI, V.S., Conduction Heat Transfer, Addison Wesley Publ.Co., London (1966).
- AMOS, D.E. and CHEN, P.J., Transient Heat Conduction with Finite Element Wave Speeds, J.Appl.Mech. 37, 1145 (1970).
- BOLEY, B.A., Theory of Thermal Stresses, John Wiley and Sons., New York (1960).
- BOLEY, B.A., Heat Conduction in Solids and Thermoelasticity, Nucl.

- Eng. and Design, 18, 377-401 (1972).
- CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C., Conduction of Heat in Solids, Oxford at the Clarendon Press, 2nd Ed. London (1959).
- ENGLAND, G.L., Steady State in Concrete Structures Subjcted to Sustained an Cyclically varying Temperatures, Nucl.Eng. and Design 44, 97-107 (1977).
- GATEWOOD, B.E., Thermal Stresses with Applications to Airplanes Missiles, Turbines and Nuclear Reactors, McGraw-Hill, New York (1957).
- HALBERLAND, C. and KOHLER, F., Semianalitical Calculation of Temperature Transients in joined Structures, Warme und Stoffubertragung, 10 (1977).
- INGERSOL, L.R.-ZOBEL, O.J. and INGERSOLL, A.C., Heat Conduction with Engineering and Geological Applications, McGraw-Hill (1948).
- JAKOB, M., Heat Transfer, Vol. I, II, Jhon Wiley and Sons, New York
- KERN, J., On the average Heat Transfer Coefficient in Periodic Heat Flow I. Solid with negligible Thermal Resistance, Int.J.Heat Mass. Transfer, 19, 869-78 (1976).
- KERN, J., Heat Transfer in a Rotary Heat Exchanger, Int.J.Mass.Heat Transfer, 17, 981-90 (1974).
- LOH, N.T.H., Analitical Solutions for Rotary Matrix Wire Screen Heat Exchangers, J.Franklin Inst. 272, 191-207 (1961).
- LORENZINI, E. and SPIGA, M., Consequences of a Step Variation in Cooland Temperature on a Fuel Rod with Chadding, Nucl.Eng. and Design, 44, 323-30 (1977).
- MODEST, M.F. and TIEN, C.L., Thermal Analysis of Cyclic Cryogenic Regenerators, Int.J.Mass. Heat Transfer, 17, 37-49 (1974).
- NAHAVANDI, A.M. and WEINSTEIN, A Solution to the Periodic Heat Flow

Heat Regenerative Exchanger Problem., Appl.Scient.Research, A
10, 335-48 (1961).

VODICKA, V., Hollow Circular Cylinder under Periodic Fluctuations
of Temperature, App.Scient.Research A, 5, 327-37 (1956).

WILLMOT, A.J. and BURNS, A., Transient Response of Periodic Flow
Regenerators, Int.J.Heat Mass.Transfer, 20, 753-61 (1977).

WILLMOT, A.J. and CLARE HINCHCLIFFE, The Effect of Gas Heat Storage
Upon the Performance of the Thermal Regenerator, Int.Heat Mass.
Transfer, 19, 821-26 (1976).

CAPITULO 8

TRANSMISION DE CALOR POR CONDUCCION CON FOCOS Y CUERPOS EN MOVIMIENTO EN REGIMENES ESTACIONARIO Y TRANSITORIO

INTRODUCCION

Los aspectos térmicos que se desarrollan en éste capítulo estudian de una parte, problemas específicos no tratados anteriormente, tales como los puntos calientes o flujos térmicos su perfciales y de otra parte, múltiples aplicaciones entre las cuales pueden citarse:

- Recubrimientos metálicos.
- Tratamientos térmicos por inducción.
- Soldadura por arco, gases, haces electrónicos, laser.
- Almacenamiento de energía.
- Rozamientos en máquinas herramientas, ejes, planos, extrusión.
- Calentamiento aerodinámico.
- Solidificación.
- Reactores químicos y nucleares en condiciones transitorias.
- Cambios de fase.

Para fijar ideas consideremos el caso simple de una resistencia que genera calor por el paso de una corriente en régimen estacionario. Si en un determinado momento cambian las dimensiones de la sección en un punto por un efecto mecánico, la generación de calor también cambia y la resistencia altera su funcionamiento, que puede llegar a su fusión cuando la variación del calor generado es incompatible con el medio refrigerante. Este tipo de situaciones puede producirse también por cambios de fases

sólidas dentro del material o por corrosión en un medio ambiente agresivo. En consecuencia se desarrollan en un determinado tiempo focos térmicos que en el límite, pueden considerarse como puntuales e instantáneos. Cuando se trata de materiales menos perfectos como pueden ser catalizadores sólidos de reacciones químicas, la variación de focos térmicos pueden producirse por alteración del sólido o por la variación de velocidad en los fluidos. El resultado es un cambio de la velocidad de reacción con el consiguiente aumento de generación de calor que se propaga a través del medio según las circunstancias del fenómeno. Se trata de manantiales térmicos puntuales, lineales o superficiales funciones del tiempo y de la posición cuando los focos térmicos son de mayor potencia las posibilidades de tales fenómenos son mayores y sólo pueden disminuirse con una refrigeración adecuada o haciendo que el foco térmico trabaje a menor potencia. En ambos casos, el rendimiento disminuye, y el cálculo de régimen estacionario, se hace teniendo en cuenta los efectos de puntos calientes, que se introducen en los conocidos factores de seguridad y pueden disminuirse cuando se conocen los posibles fenómenos en el material o la experiencia de funcionamiento, siempre bajo la base de materiales con las mismas propiedades.

Las consideraciones anteriores se extienden a los casos de focos térmicos desarrollados por fricción, como sucede en el calentamiento de materiales con máquinas herramientas, en la acción de las zapatas de frenos en automóviles, rozamientos de superficies con fluidos, aviones, vehículos espaciales, variaciones de presión. Los manantiales térmicos pueden ser también puntuales, lineales o superficiales y su característica principal es que se localizan en la superficie de contacto. Otros casos análogos son la irradiación de las superficies por flujos térmicos de distinta naturaleza, tales como irradiación solar, llamas de combustión, tratamientos térmicos por inducción de alta frecuencia.

En la soldadura, los focos térmicos se mueven a una velocidad tal que el material a soldar alcanza su punto de fusión. La velocidad es tanto mayor cuanto más potente es el foco térmico y menor es la conductividad y el espesor de los materiales. Los focos térmicos pueden considerarse como puntuales, lineales o superficiales.

Los dos primeros se identifican con focos producidos por rayos la ser y los últimos con los métodos de soldadura clásicos.

Los problemas térmicos con cambios de fases tales como, so lidificación fusión o sublimación presentan una complejidad mayor debido al movimiento del plano de fase, entre dos o más componentes con propiedades térmicas distintas. Las ecuaciones son no lineales excepto en el caso de sólidos semiinfinitos en los que pue de admitirse la constancia del número de Fourier. Modernamente se están desarrollando expresiones a distintos casos utilizando las aproximaciones del cálculo variacional con condiciones de contorno variables cuando una de las fases se elimina del sistema, como sucede con la sublimación con separación del gas, y otras aplicaciones, el fenómeno puede tratarse como un manantial plano en movimiento, con las condiciones del medio que avanza en la direc-ción del foco térmico.

El tratamiento de los problemas anteriores, se logra en forma cómoda por medio de la función de Dirac. A partir de la ecua-ción general

$$\nabla (k \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} - Q \quad (1)$$

El foco térmico Q puede admitirse puntual e instantáneo y la ec. (1) se transforma en

$$\nabla (k \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} - Q \delta(x-x_1) \delta(y-y_1) \delta(z-z_1) \delta(\tau) \quad (2)$$

Las dimensiones de Q no son las correspondientes a (1) sino Q (Kcal) y la función de distribución de Dirac δ , se aplica en los puntos x_1, y_1, z_1 y tiempo $\tau \rightarrow 0$.

Análogamente para un plano instantáneo

$$\nabla (k \nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} - Q \delta(x-x_1) \delta(y-y_1) \delta(\tau) \quad (3)$$

donde las dimensiones de Q son para la ec. (3) Q (Kcal/m)

Las transformadas de Fourier o Hankel de las ec. (2), (3) son análogas a las desarrolladas en capítulos anteriores y las propiedades de la función δ , se indican en el Apéndice I. La transformada de Laplace

$$L[\delta] \equiv f(\delta) = \int_0^{\infty} (\delta) \exp(-s\tau) d\tau = 1$$

lo que simplifica los cálculos de la inversión.

Cuando el plano generador se sitúa en la superficie de los cuerpos se tienen las soluciones de flujos térmicos superficiales con ventajas sobre otros métodos.

Cuando se trata de manantiales continuos donde Q es función del tiempo, las soluciones son simplemente, convoluciones de tipo Laplace.

Cuando los cuerpos o focos térmicos se mueven a velocidad constante, las ec. (2) y (3) toman la forma

$$\nabla(k\nabla T) = \rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau \frac{\partial}{\partial x} (\delta(x - v_x \tau)) \right] \quad (4)$$

indicando que el plano generador de calor se mueve en la dirección del eje x . Las distribuciones de temperatura en régimen estacionario se obtienen por integración de ecuaciones en régimen transitorio.

En los fenómenos con cambio de estado, las ecuaciones son análogas, pero la posición de la interfase cumple la ecuación

$$k_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right)_x = k_2 \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right)_x + L \rho_2 \frac{dx(\tau)}{d\tau} \quad (5)$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las fases 1 y 2 en las cuales se cumplen la ecuación de transmisión de calor.

8,1-1. Manantiales puntuales instantáneos

Consideremos un sólido inicialmente a temperatura cerc, con

generación de calor Q en un punto L_x, L_y, L_z en un tiempo muy corto de tal manera que durante este tiempo de generación de calor, la temperatura en el sólido es cero excepto en el punto donde se genera calor. En las condiciones anteriores el sistema cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x-L_x) \delta(y-L_y) \delta(z-L_z) \delta(\tau) \quad (1)$$

donde δ es la función delta de Dirac. (véase Apéndice I-5), con las condiciones Fig. 8,1-1

$$T=0 \quad \begin{cases} -\infty < x < \infty & \tau < 0 \\ -\infty < y < \infty & \tau < 0 \\ -\infty < z < \infty & \tau < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$Q = c t_0 \quad x = L_x \quad y = L_y \quad z = L_z \quad \tau > 0$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada de Fourier (Apéndice I-2) definida por

$$L_F[T(x, y, z, \tau)] = f_F(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, y, z, \tau) \exp(i\xi x) dx \quad (3)$$

y teniendo en cuenta que la transformada de la función $\delta(x-L_x)$ vale

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-L_x) \exp(i\xi x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (4)$$

resulta

$$\xi^2 f_F(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \frac{\partial^2 f_F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 f_F}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_F}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(\eta-L_y) \delta(\zeta-L_z) \delta(\tau) \quad (5)$$

con la inversión

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_F(\xi, \eta, \zeta, \tau) \exp(-i\xi x) d\xi \quad (6)$$

Aplicando nuevamente la transformada de Fourier a la ec. (5)

$$-(\xi^2 + \eta^2) f_{F1}(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \frac{\partial^2 f_{F1}}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_{F1}}{\partial \tau} - \frac{Q}{2\pi k} \delta(\eta-L_y) \delta(\tau) \quad (7)$$

con la inversión

$$f_F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{F'}(\xi, \eta, \gamma, z) \exp(-ix\eta) d\eta \quad (8)$$

Aplicando nuevamente la transformada de Fourier a la ec. (7)

$$-(\xi^2 + \eta^2 + \gamma^2) f_{F''}(\xi, \eta, \gamma, z) + \frac{Q}{k} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} = \frac{1}{\alpha} \frac{df_{F''}}{dz} \quad (9)$$

Resolviendo la ec. (8) y teniendo en cuenta que $L[\delta(\tau)] = 1$

$$f_{F''} = A \exp(-\alpha \mu^2 z) + \frac{\alpha Q}{k} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-\alpha \mu^2 z) \quad (10)$$

donde $\mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + \gamma^2$

En $z=0$ $A=0$

$$f_{F''} = \frac{\alpha Q}{k} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-\alpha \mu^2 z) \quad (11)$$

Por la inversión de (9)

$$\begin{aligned} f_{F'}(\xi, \eta, \gamma, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha Q}{k} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-\alpha \mu^2 z - i\gamma z) d\gamma \\ &= \frac{\alpha Q}{2\pi} \frac{Q}{k} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha z}} \exp\left[-\frac{\alpha}{\xi^2 + \eta^2} + i^2 \frac{(z-L_z)^2}{4\alpha z}\right] \end{aligned} \quad (12)$$

y por las inversiones (8) y (6)

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{1}{8} \frac{Q'}{\rho C_p} \frac{1}{(\pi \alpha \tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{[(x-L_x)^2 + (y-L_y)^2 + (z-L_z)^2]}{4\alpha \tau}\right) \quad (13)$$

donde ρ es la densidad y C_p el calor específico

Casos particulares de la ec. (13) son:

- a) Si el manantial generador de calor es paralelo al eje z y pasa por las coordenadas L_x y L_y

$$T(x, y, z) = \frac{1}{4\pi \alpha \tau} \frac{Q'}{\rho C_p} \exp\left(-\frac{[(x-L_x)^2 + (y-L_y)^2]}{4\alpha \tau}\right) \quad (14)$$

$Q' \text{ (Kcal/m)}$

- b) Si el manantial generador de calor es un plano z, y que pasa por L_x

$$T(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha z}} \frac{Q'}{g_c p} \exp\left(-\frac{(x-Lx)^2}{4\alpha z}\right) \quad (15)$$

$Q' \text{ (Kcal/m}^2\text{)}$

- c) Si el manantial generador de calor es la superficie lateral de un cilindro de radio r se tiene $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la transformada de Fourier puede escribirse (véase Apéndice I-3)

$$f_F(\xi_1, \eta) = f_F(\xi_1, \xi_2) = \int_0^\infty r F(r) J_0(g r) dr \quad (16)$$

donde $\xi_1 = g \cos \varphi$ $\xi_2 = g \sin \varphi$ $x_1 = r \cos \theta$ $x_2 = r \sin \theta$

y así la transformada doble sucesiva de Fourier es para nuestro caso la transformada de Hankel de grado cero y la ec. (1) toma la forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{Q}{k} \delta(r-R_1) \delta(z) \quad (17)$$

donde δ es la función de Dirac

$$\int_0^\infty \delta(z) r \delta(r-R_1) J_0(\xi r) dr = R_1 J_0(\xi R_1) \delta(z) \quad (18)$$

Aplicando a la ec. (17) la transformadas de Hankel de grado cero

$$\xi^2 f_{H,0}(\xi, z) = \frac{df_{H,0}}{dz} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{Q_1}{2\pi k} J_0(\xi R_1) \delta(z) \quad (19)$$

donde $Q = Q_1/2\pi R_1$

Resolviendo la ec. (19) teniendo en cuenta que $L[\delta(z)] = 1$

$$f_{H,0}(\xi, z) = \frac{\alpha Q}{k} \exp(-\alpha \xi^2 z) \quad (20)$$

y por la inversión de Hankel y si $\alpha = k/g_c p$

$$\begin{aligned} T(r, z) &= \frac{\alpha Q_1}{2\pi k} \int_0^\infty \xi \exp(-\alpha \xi^2 z) J_0(\xi R_1) J_0(r \xi) d\xi \\ &= \frac{Q_1 R_1}{4\pi g_c p z} I_0\left(\frac{r R_1}{2\alpha z}\right) \exp\left[-\frac{(r^2 + R_1^2)}{4\alpha z}\right] \end{aligned} \quad (21)$$

- d) Si el manantial generador es un anillo de radio R_1 en $z = 0$ la ecuación es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(r-R_1) \delta(z) \delta(\tau) \quad (21a)$$

y la ec. (19) se transforma en

$$\xi^2 f_{H,0}(\xi, \eta, \tau) + \frac{\partial^2 f_{H,0}}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_{H,0}}{\partial \tau} - \frac{Q_1}{2\pi k} J_0(\xi R_1) \delta(z) \delta(\tau) \quad (22)$$

donde δ es la función delta de Dirac.

Aplicando a la ec. (22) la transformada de Fourier

$$-(\eta^2 + \xi^2) f_F(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{df_F}{d\tau} - \frac{Q_1}{2\pi k \sqrt{2\pi}} J_0(\xi R_1) \quad (23)$$

con la inversión

$$f_{H,0}(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_F(\xi, \eta, \tau) \exp(-i\eta z) dz \quad (24)$$

Resolviendo la ec. (19) con $Q_1 = 0$ en $\tau = 0$, $f(\xi) = 1$

$$f_F(\xi, \eta, \tau) = \frac{\alpha Q_1}{k (2\pi)^{3/2}} J_0(\xi R_1) \exp(-\alpha \sigma^2 \tau) \quad (25)$$

con $\sigma^2 = \xi^2 + \eta^2$

y por las inversiones (24) y (21)

$$T(r, z, \tau) = \frac{Q (kcal)}{8 (\pi \alpha \tau)^{3/2} g_p} \exp\left[-(r^2 + R_1^2 + z^2)/4\alpha\tau\right] I_0\left(\frac{R_1 r}{2\alpha\tau}\right) \quad (26)$$

- e) Si el manantial generador es un disco de radio R_0 en el plano $z = 0$, haciendo

$$Q_1 = \int_0^{R_0} 2\pi R_1 q dR_1$$

e integrando la ec. (26) respecto a R_1

$$T(r, z, \tau) = \frac{Q (kcal)}{8 g_p (\pi \alpha \tau)^{3/2}} \int_0^R \exp\left[-(r^2 + R_1^2 + z^2)/4\alpha\tau\right] I_0\left(\frac{R_1 r}{2\alpha\tau}\right) dR_1 \quad (27)$$

f) Manantial generador esférico de radio R_1

La solución se obtiene escribiendo la ec.913) en coordenadas polares

$$T(r, \tau) = \frac{Q R_1}{2\sqrt{\pi\alpha\tau} \cdot \rho c_p} \left[\exp\left[-\frac{(r-R_1)^2}{4\alpha\tau}\right] - \exp\left[-\frac{(r+R_1)^2}{4\alpha\tau}\right] \right] \quad (28)$$

$$Q \text{ (Kcal/m}^2\text{)}$$

Ejemplo 8,1-1.

En un sólido de grandes dimensiones se produce calor instantáneamente por cambios internos, localizado en la forma y posiciones siguientes:

- a) Puntual con $Q_1 = 0,20 \text{ (Kcal)}$
- b) En un plano con $Q_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ (Kcal/m}^2\text{)}$
- c) En una línea recta con $Q_3 = 5 \text{ (Kcal/m)}$
- d) En una superficie esférica de 2 mm de diámetro con $Q_4 = 2 \cdot 10^4 \text{ (Kcal/m}^2\text{)}$

Se desea conocer para los casos anteriores el volumen de material que alcanza temperaturas iguales o superiores a 500°C .

Datos: $k = 8 \text{ (Kcal/m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C)}$ $\rho = 5300 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ $c_p = 0,22 \text{ (Kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C)}$

Solución:

a) La ec.8,1-1(13) en coordenadas polares vale

$$T(r, \tau) = \frac{Q_1}{8(\pi\alpha\tau)^{3/2} \rho c_p} \exp\left[-\frac{r^2}{4\alpha\tau}\right]$$

donde el centro de coordenadas se sitúa en $L_x = L_y = L_z = r$

La máxima temperatura en función de τ se cumple para $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_r = 0$

$$\tau = r^2/6\alpha \quad \text{y} \quad T_{max} = \frac{Q_1}{8\rho c_p} \cdot \frac{1}{r^3} \left(\frac{6}{\pi e}\right)^{3/2} = 500 \text{ (} ^\circ\text{C)}$$

$$r^3 = \frac{0,20}{8.5300.0,22.500} \cdot \left(\frac{6}{\pi e}\right)^{3/2} = 2,53 \cdot 10^{-8} \text{ (m}^3\text{)} \quad r = 2,89 \text{ (m.m)}$$

$$V = 1,05 \text{ (mm}^3\text{)} \text{ tiempo para alcanzar } T \geq 500^\circ\text{C} \quad \tau = 2.02 \cdot 10^{-4} \text{ (h)} = 0,73 \text{ (s)}$$

b) Por la ec.8,1-1(15) con $L_x = 0$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_x = \frac{Q_2}{2\sqrt{\pi\alpha\tau} \rho c_p} \left[-\frac{1}{2\sqrt{\tau^3}} + \frac{x^2}{4\alpha\tau^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right] \exp\left[-\frac{x^2}{4\alpha\tau}\right] \quad \tau = \frac{x^2}{2\alpha}$$

$$T_{\max} = \frac{Q_2}{4\sqrt{2\pi} \rho c_p x} \exp\left[-\frac{1}{2}\right] = 500^\circ\text{C} \quad x = 10^{-3} \text{ (m)}$$

$$V = 2 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^3\text{/m}^2\text{)} \quad \text{y el tiempo } \tau = 0,26 \text{ (s)}$$

c) Por la ec.8,1-1(14) con $L_x = L_y = 0 \quad r^2 = x^2 + y^2$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_r = \frac{Q_3}{4\alpha\pi \rho c_p} \left[-\frac{1}{\tau^2} + \frac{r^2}{4\alpha\tau^3} \right] \quad \tau = r^2/4\alpha$$

$$T_{\max} = \frac{Q_3}{\pi \rho c_p r^2} \exp(-1) = 500 \quad r = 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{El volumen es un cilindro} = 3,14 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{m}}\right) \quad \tau = 0,13 \text{ (s)}$$

d) Por la ec.8,1-1(28)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_r = \frac{Q_4 R_1}{4\sqrt{\pi\alpha} \rho c_p r} \left[-\frac{1}{2\sqrt{\tau^3}} + \frac{(r-R_1)^2}{4\alpha\tau^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tau}} - \frac{(r+R_1)^2}{4\alpha\tau^2\sqrt{\tau}} \right] \exp\left[-\frac{(r-R_1)^2 + (r+R_1)^2}{4\alpha\tau}\right]$$

$$\tau = \frac{2rR_1}{\alpha} \quad T_{\max} = \frac{Q_4 R_1}{4\sqrt{2\pi} \rho c_p r^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = 500^\circ\text{C}$$

$$\text{y } r = 1,73 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

El volumen es el debido a una esfera hueca de 0,17 mm de radio exterior y 0,17 mm de radio interior

Ejemplo 8,1-1(a)

Entre dos bloques de acero yuxtapuestos se generan instantáneamente 0,37 (kcal) Si las propiedades del acero son tem

temperatura de fusión 1450°C , calor de fusión 64 (kcal/kg)
temperatura inicial 0°C se desea conocer:

- Distribución de temperatura en función del tiempo.
- Rendimiento térmico con relación a la fusión del material.

Repetir los cálculos para aluminio

Temperatura de fusión 660 , calor de fusión $q_2 \text{ (kcal/kg)}$

Solución:

- Aplicando la ec. 7,1-(13) en coordenadas esféricas y diferenciando esta ecuación respecto al tiempo se tiene

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_r = \frac{Q}{8(\pi \alpha \tau)^{3/2} \rho c_p} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha \tau}\right) \left(\frac{r^2}{4\alpha \tau^2} - \frac{3}{2\tau}\right)$$

La temperatura máxima se tiene en un tiempo tal que $\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_r = 0$
ó $r = r^2/6\alpha$ y sustituyendo en la ec. 8,1-(13)

$$T_{\max} = \frac{Q}{8 \rho c_p} \cdot \frac{1}{r^3} \left(\frac{6}{\pi e}\right)^{3/2}$$

y si $T_{\max} = 1450 (^{\circ}\text{C})$

$$r^3 = \frac{0,37}{8,014 \cdot 8700 \cdot 1450} \left(\frac{6}{\pi e}\right)^{3/2} = 1,54 \cdot 10^{-8} (\text{m}^3) \quad r = 2,48 \text{ (mm)}$$

y la distribución de temperatura en función del tiempo se complica por la presencia de una fase líquida cuyo volumen disminuye de volviendo el calor latente. Esta clase de problemas se estudia en el apartado. 8,8

Una solución aproximada se obtiene dando valores a obteniéndose distintos radios y valores de Q . Cuando el radio es próximo a cero el recinto líquido se encuentra en estado sólido a la temperatura de 1450°C y la distribución de temperaturas está dada por la ec. 7,1-13.

- Se define el rendimiento de fusión como la cantidad de material fundido al que se fundiría si no se perdiese calor.

Para una esfera de radio 2,48 mm la cantidad de calor consumida es

$$\frac{4}{3} \pi 1,58 \cdot 10^{-8} \cdot 7800 (0,14 \cdot 1450 + 64) = 0,136 \text{ (Kcal)}$$

y el rendimiento

$$\eta = \frac{0,136}{0,37} = 0,36$$

El rendimiento disminuye notablemente cuando el foco térmico es continuo así si 0,37 (Kcal) se hubiesen generado en 0,1 (s)

$$r = 1,8 \text{ (mm)} \quad \gamma \quad \eta = 0,067$$

c) Para Aluminio

$$r^3 = 7,28 \cdot 10^{-8} \text{ (m}^3\text{)} \quad r = 4,1 \text{ (mm)}$$

y el rendimiento de fusión

$$\eta = 0,51$$

8,1-2. Manantiales puntuales continuos

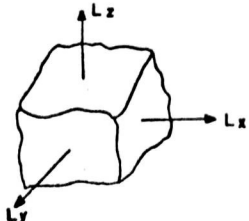
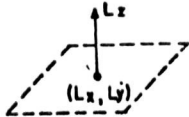
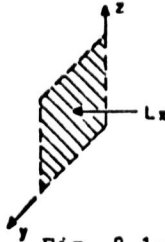
Consideremos un sólido donde en un punto de coordenadas L_x, L_y, L_z se genera una cantidad de calor $Q(\tau)$. De acuerdo con el apartado 8,1-1 cumple la ecuación

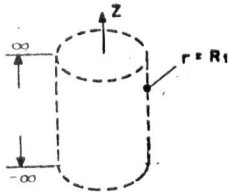
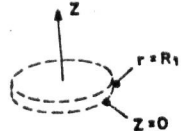
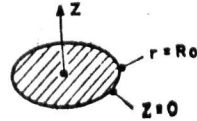
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q(\tau)}{k} \delta(x-L_x) \delta(y-L_y) \delta(z-L_z) \quad (1)$$

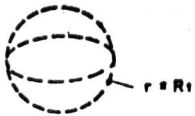
donde δ son las funciones delta de Dirac.

Si las condiciones son

$$\begin{aligned} T &= 0 & \tau < 0 \\ Q(\tau) & & x=L_x, \quad y=L_y, \quad z=L_z \end{aligned} \quad (2)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|---|
|  <p data-bbox="152 378 295 401">Fig. 8,1-1</p> | $T=0 \quad -\infty < x < \infty$ $\tau < 0 \quad -\infty < y < \infty$ $\tau < 0 \quad -\infty < z < \infty$ $Q, \tau > 0 \quad x=L_x$ $y=L_y$ $z=L_z$ | $T(x,y,z,\tau) = \frac{1}{8} \frac{Q}{\rho c_p (\pi \alpha \tau)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x-L_x)^2 + (y-L_y)^2 + (z-L_z)^2}{4\alpha\tau} \right]$ $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ |
|  <p data-bbox="155 647 337 671">Fig. 8,1-1(a)</p> | $T=0 \quad -\infty < x < \infty$ $\tau < 0 \quad -\infty < y < \infty$ $\tau < 0 \quad -\infty < z < \infty$ $Q(L_x, L_y), \tau > 0, \text{ Paralelo Eje Z.}$ | $T(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\alpha\tau \rho c_p} \exp \left[-\frac{(x-L_x)^2 + (y-L_y)^2}{4\alpha\tau} \right]$ |
|  <p data-bbox="159 927 341 951">Fig. 8,1-1(b)</p> | $T=0 \quad -\infty < x < \infty$ $\tau < 0 \quad -\infty < y < \infty$ $\tau < 0 \quad -\infty < z < \infty$ $Q(L_x), \tau > 0 \text{ Plano x,y}$ | $T(x,\tau) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi\alpha\tau} \rho c_p} \exp \left[-\frac{(x-L_x)^2}{4\alpha\tau} \right]$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|--|
|  <p>Fig. 8,1-1(c)</p> | $T=0 \quad 0 < r < \infty$ $z < \infty \quad -\infty < z < \infty$ <p>Q, superficie lateral $r = R_1 \quad z > 0$</p> | $T(r, z) = \frac{Q_1 R_1}{4\pi g_{cp} \tau} I_0\left(\frac{r R_1}{2\alpha \tau}\right) \exp\left[-\left(\frac{r^2 + R_1^2}{4\alpha \tau}\right)\right]$ $Q_1 = Q \cdot 2\pi R_1$ |
|  <p>Fig. 8,1-1(d)</p> | $T=0 \quad 0 < r < R$ $z < 0 \quad -\infty < z < \infty$ <p>Q, Anillo $r = R_1, z = 0$ $z > 0$</p> | $T(r, z, \tau) = \frac{Q_1}{8(\pi \alpha \tau)^{3/2} g_{cp}} I_0\left(\frac{r R_1}{2\alpha \tau}\right) \exp\left[-(r^2 + R_1^2 + z^2)/4\alpha \tau\right]$ $Q_1 = Q \cdot 2\pi R_1$ |
|  <p>Fig. 8,1-1(e)</p> | $T=0 \quad 0 < r < \infty$ $z < 0 \quad -\infty < z < \infty$ <p>Q Disco $r = R_1, z = 0$ $z > 0$</p> | $T(r, z, \tau) = \frac{q R_0}{2 g_{cp} \sqrt{\pi \alpha \tau}} \int_0^R \exp\left[-(r^2 + R_1^2 + z^2)/4\alpha \tau\right] I_0\left(\frac{R_1 r}{2\alpha \tau}\right) dR_1$ <p>en $r = 0$</p> $T(z, \tau) = \frac{q}{2 g_{cp} \sqrt{\pi \alpha \tau}} [1 - \exp(-R^2/4\alpha \tau)] \exp(-z^2/4\alpha \tau)$ $Q = \int_0^R 2\pi R_1 q dR_1$ |

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|---|
|  <p data-bbox="136 381 318 406">Fig. 8,1-1(f)</p> | $T=0 \quad 0 < r < \infty$ $z < 0$ $Q \quad \text{superficie esférica}$ $z > 0 \quad r = R_1$ | $T(r,z) = \frac{Q_1}{8\pi R_1 \rho C_p \sqrt{\pi \alpha z}} \left[\exp\left[-(r-R_1)^2/4\alpha z\right] - \exp\left[-(r+R_1)^2/4\alpha z\right] \right]$ $Q_1 = 4\pi R_1^2 Q.$ |

Aplicando el mismo procedimiento que en el apartado 8,1-1 se obtiene la ecuación

$$-\mu^2 f_{F''}(\xi, \eta, r, z) + \frac{Q(\tau)}{(2\pi)^{3/2} k} = \frac{1}{\alpha} \frac{df_{F''}}{d\tau} \quad (3)$$

Aplicando a la ec. (3) la transformación de Laplace

$$-\alpha \mu^2 f(s) + \frac{\alpha L[Q(\tau)]}{k (2\pi)^{3/2}} = s f(s) - A$$

y por la inversión $f(s)$

$$f_{F''} = \frac{A}{s + \alpha \mu^2} + \frac{\alpha}{(2\pi)^{3/2} k} L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \mu^2} \right] \quad (4)$$

Si $T=0$ en $\tau < 0$ y por la convolución de Laplace (Apéndice I-4 (4))

$$T(x, y, z, \tau) = \int_0^\tau [Q(\tau^*)] T(x, y, z)(\tau - \tau^*) d\tau^*$$

y por la ec. 8,1-1 (13)

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{1}{8 (\pi \alpha)^{3/2} g_0} \int_0^\tau \frac{Q(\tau^*)}{(\tau - \tau^*)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x-L_x)^2 + (y-L_y)^2 + (z-L_z)^2}{4\alpha(\tau - \tau^*)} \right] d\tau^* \quad (5)$$

Si $Q(\tau) = C_1 e$ poniendo $r^2 = (x-L_x)^2 + (y-L_y)^2 + (z-L_z)^2$

$$y (\tau - \tau^*)^{-1/2} = \tau_0$$

$$T(x, y, z, \tau_0) = \frac{Q_1}{4\pi \alpha r} \operatorname{ferc} \left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha \tau}} \right) \quad (6)$$

$$\text{y en } \tau = \infty \quad \operatorname{ferc} \left(\frac{r}{\sqrt{4\alpha \tau}} \right) = 1 \quad T(x, y, z) = \frac{Q_1}{4\pi \alpha r} \quad (7)$$

a) Análogamente para un manantial $Q(\tau)$ que pasa por L_x, L_y, L_z

$$T(x, y, z) = \frac{1}{4\pi \alpha g_0} \int_0^\tau \frac{Q'(\tau^*)}{(\tau - \tau^*)} \exp \left(-\frac{r^2}{4\alpha(\tau - \tau^*)} \right) d\tau^* \quad (8)$$

con $r^2 = (x-L_x)^2 + (y-L_y)^2$

y para $Q = C_1 e = Q_1$

$$T(r, \tau) = \frac{Q_1}{4\pi\alpha g_C} \int_{r^2/4\alpha\tau}^{\infty} \exp(-\tau_0) \cdot \frac{1}{\tau_0} d\tau_0 = -\frac{Q_1}{4\pi} I_e \left(-\frac{r^2}{4\alpha\tau} \right) \quad (9)$$

donde I_e es la integral exponencial (Apéndice I tabla I-8)

b) Para un manantial plano que pasa por el punto L_x

$$T(y, z, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^{\tau} \frac{Q'(\tau^*)}{(\tau - \tau^*)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(x-L_x)^2}{4\alpha(\tau - \tau^*)} \right] d\tau^* \quad (10)$$

Para $Q'(\tau) = Q_1 = Cte$

$$T(y, z, \tau) = \frac{Q_1}{g_C} \left(\sqrt{\frac{\tau}{\pi\alpha}} \exp \left[-\frac{(x-L_x)^2}{4\alpha\tau} \right] - \frac{(x-L_x)^2}{2\alpha} \operatorname{ferc} \left(\frac{(x-L_x)^2}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) \right) \quad (11)$$

c) Para un manantial esférico

$$T(r, \tau) = \frac{1}{8\pi\sqrt{\pi\alpha} R_1 g_C r} \int_0^{\tau} \left[\exp \left(-\frac{(r-R_1)^2}{4\alpha(\tau - \tau^*)} \right) - \exp \left(-\frac{(r+R_1)^2}{4\alpha(\tau - \tau^*)} \right) \right] \cdot \frac{Q'(\tau^*)}{(\tau - \tau^*)^{1/2}} d\tau^* \quad (12)$$

y si $Q(\tau) = Q_1 = Cte$

$$T(r, \tau) = \frac{Q_1}{\alpha R_1 g_C r} \left[2\sqrt{\frac{\alpha\tau}{\pi}} \left(\exp \left(-\frac{(r-R_1)^2}{4\alpha\tau} \right) - \exp \left(-\frac{(r+R_1)^2}{4\alpha\tau} \right) \right) - (r-R_1) \operatorname{ferc} \left(\frac{(r-R_1)}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) + (r+R_1) \operatorname{ferc} \left(\frac{(r+R_1)}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) \right] \quad (13)$$

8,2-1. Pared plana con manantial plano instantáneo

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x-x_1) \delta(\tau) \quad (1)$$

donde δ es la función delta de Dirac aplicada al plano instantáneo generador de calor x_1 $0 < x_1 < L_x$

Con las condiciones

$$\begin{array}{llll} T=0 & \text{en} & x=0 & x=L_x \\ T=0 & \text{en} & 0 < x < L_x & y \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{para } \tau > 0 \\ \text{" } \tau < 0 \end{array}$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier.

$$\xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, \tau) = \frac{d f_F^s}{d \tau} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{Q}{k} \int_0^{L_x} \delta(x-x_i) \operatorname{sen}(\xi x) \delta(\tau) dx \quad (2)$$

y por las propiedades de la función δ (Apéndice I-5)

$$\frac{Q}{k} \int_0^{L_x} \delta(x-x_i) \operatorname{sen}(\xi x) dx = \frac{Q}{k} \operatorname{sen}(\xi x_i) \delta(\tau) \quad (3)$$

donde $\xi = \frac{m\pi}{L_x}$ con la inversión

$$T(x, \tau) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\xi x) \bar{f}_F^s(\xi, \tau) \quad (4)$$

Resolviendo la ecuación (2) y si $L[\delta(\tau)] = 1$

$$\bar{f}_F^s(\xi, \tau) = \exp[-\alpha \xi^2 \tau] \left(A + \alpha \frac{Q}{k} \operatorname{sen}(\xi x_i) \right) \quad (5)$$

y si en $\tau < 0$ $A = 0$ por la inversión (4)

$$T(x, \tau) = \frac{2}{L_x} \frac{\alpha Q}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\xi x_i) \operatorname{sen}(\xi x) \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \quad (6)$$

b) Si el manantial es una línea perpendicular x , y dentro de la pared. Aplicando los criterios del apartado 8,1-1 con la tercera transformación de Fourier en la forma de la ec. 8,1-(14)

$$T(x, y, \tau) = \frac{Q'}{2\pi k L_x \tau} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\xi x_i) \operatorname{sen} x \cdot \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \exp\left(-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4\alpha \tau}\right) \quad (7)$$

donde Q' está expresada en (kcal)

Ejemplo 8,2-1.

Una placa plana de 5 mm de espesor tiene en las superficies una temperatura de 60°C. Cuando en el interior se genera calor uniformemente con $Q = 10^6$ (kcal/h m³) en régimen estacionario. En determinado momento el material genera $Q' = 0,93$ (kcal) en un punto interior situado a 1 mm de la pared se desea conocer:

- a) Distribución de temperaturas en régimen estacionario.
- b) Distribución de temperaturas en función del tiempo por efecto del foco térmico instantáneo, en el centro de la placa.

Datos: $k = 0,25 \text{ (Kcal/h.m}^\circ\text{C)}$ $\rho = 2300 \text{ (Kg/m}^3\text{)}$ $q = 0,17 \text{ (Kcal/Kg}^\circ\text{C)}$

Temperatura de fusión 125°C .

Solución:

a) En régimen estacionario $T - T_s = \frac{QL_x^2}{8k} - \frac{Qx^2}{2k}$ en $x=c$

$T_0 - T_s = \frac{QL_x^2}{8k}$ y si $T_s = 60 \text{ (}^\circ\text{C)}$

la temperatura en el centro de la placa

$$T_0 = 60 + \frac{10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 0,25} = 72,5 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

- b) Aplicando el método de superposición la temperatura en cualquier punto vale

$$T(x, y, z) = T_e(x, 0) + T_e'(x, y, z)$$

donde T_e es la temperatura del punto x en régimen estacionario y T_e' la temperatura en el mismo punto x por efecto del foco instantáneo, es decir la ec. 8,2-1(7). Para el centro de la tabla y en dirección normal al punto de generación instantánea $y=y_1=0$

$$T_e'(\frac{L_x}{2}, 0, z) = \frac{0,93}{6,28 \cdot 5 \cdot 0,25 z} \exp\left(-\frac{1,5^2 \cdot 10^{-6}}{4,63 \cdot 10^{-4} z}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{4}{5} \cdot \pi m\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \exp\left(-6,3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{m^2}{L_x^2} z\right)$$

donde z está expresado en horas.

Considerando los primeros términos de la serie

y haciendo $\frac{\partial T_e'}{\partial \tau} = 0$ se tiene la temperatura máxima para $\tau = 6,73$ segundos y

$$T_e' = 14 (^\circ\text{C}) \quad T\left(\frac{L_x}{2}, 0, 6,73(s)\right) = 72,5 + 14 = 86,5 (^\circ\text{C})$$

En forma análoga pueden calcularse las temperaturas en cualquier posición dentro de la placa.

8,2-2. Pared plana con manantial plano instantáneo y convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x-x_1) \delta(\tau) \quad (1)$$

con δ es la función delta de Dirac. Con las condiciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 & \text{en } x &= 0 & \text{para } \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} + a_1 T &= 0 & x &= L_x, \quad a_1 = \frac{h}{k} & \tau > 0 \\ T &= 0 & 0 < x < L_x & \tau < 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del coseno de Fourier

$$- \xi_i \bar{f}_F^c(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^c}{d \tau} - \frac{Q}{k} \int_0^{L_x} \delta(x-x_1) \cos(\xi_i x) \delta(\tau) dx \quad (3)$$

donde x_1 es el plano del manantial generador de calor y por las propiedades de la función δ

$$- \xi_i^2 \bar{f}_F^c(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F^c}{d \tau} - \frac{Q}{k} \cos(\xi_i x_1) \delta(\tau) \quad (4)$$

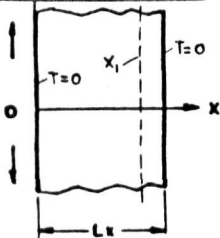
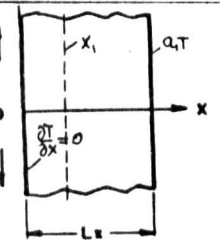
con la inversión

$$T(x, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_1^2)}{[L_x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1]} \bar{f}_F^c(\xi_i, \tau) \quad (5)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i \tan(\xi_i L_x) = a_1$ (Apéndice I, tabla I-3(5)). Resolviendo la ec. (4) con $A=0$ en $\tau=0$ y si

$$L[\delta(\tau)] = 1$$

$$\bar{f}_F^c(\xi_i, \tau) = \frac{\alpha Q}{k} \cos(\xi_i x_1) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (6)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|--|--|
|  <p>Fig. 8,2-1</p> | $T=0 \quad x=0 \quad x=L_x \quad z>0$ $T=0 \quad 0<x<L_x \quad z<0$ $Q \quad x=x_1 \quad z>0$ | $T(x,z) = \frac{2\alpha Q}{k L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\xi_m x) \sin(\xi_m x_1) \exp(-\alpha \xi_m^2 z)$ $\xi_m = \frac{\pi m}{L_x}$ |
|  <p>Fig. 8,2-2</p> | $T=0 \quad 0<x<L_x \quad z<0$ $\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad x=0 \quad z>0$ $\frac{\partial T}{\partial x} + a_1 T=0 \quad x=L_x \quad z>0$ $a_1 = \frac{h}{2}, \quad Q \quad x=x_1 \quad z>0$ | $T(x,z) = \frac{2\alpha Q}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_1^2) \cos(\xi_i x_1) \cos(\xi_i x)}{[L_x (\xi_i^2 + a_1^2) + a_1]} \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ $\xi_i \text{ Raíces de } \xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_1$ |

y por la inversión (5) y si $\alpha = k/gc_p$ propiedades del sólido

$$T(x, \tau) = \frac{2Q}{gc_p} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_1^2) \cos(\xi_i x)}{[x(\xi_i^2 + a_1^2) + a_1]} \cos(\xi_i x) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (8)$$

Ejemplo 8,2-2.

Una placa de 1 cm de espesor que se encuentra a 0°C se calienta a 2 mm de profundidad con un flujo térmico instantáneo de $5 \cdot 10^3 \text{ (Kcal/m}^2\text{)}$. El coeficiente de transmisión de calor al ambiente es de $30 \text{ (Kcal/hm}^2\text{ }^\circ\text{C)}$. Si la cara opuesta está aislada se desea conocer:

a) Distribución de temperatura en función de la posición y tiempo.

b) Calor almacenado en la placa en función del tiempo.

Datos: $k = 15 \text{ (Kcal/hm } ^\circ\text{C)}$ $\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ $c_p = 0,14 \text{ (Kcal/kg } ^\circ\text{C)}$

Solución:

a) Aplicando la ecuación 8,2-2(7), teniendo en cuenta que Q viene expresada en $\text{(Kcal/m}^2\text{)}$

$$\alpha = \frac{k}{gc_p} = 1,37 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\text{m}^2}{\text{h}} \right) \quad a_1 = \frac{h}{k} = \frac{30}{15} = 2$$

Por la tabla I-3(5), Apéndice I para $a_1 L_x = 2 \cdot 10^{-2}$

$$\xi_1 L_x = 0,14 \quad \xi_2 L_x = 3,147 \quad \xi_3 L_x = 6,286 \quad \xi_4 L_x = 9,42$$

$$T(x, y) = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 5}{1,04 \cdot 10^3} \sum_{i=1}^4 \frac{(\xi_i^2 + 4)}{[10^{-2}(\xi_i^2 + 4) + 2]} \cos(\xi_i \cdot 8 \cdot 10^{-3}) \exp(-1,37 \cdot 10^{-2} \xi_i^2 \tau)$$

$$T(x, y) \approx 585 \cos(14x) \exp[-2,68\tau]$$

Para el caso particular de la superficie aislada

$$T(0, \tau) = 585 \exp(-2,68\tau) \quad , \quad \tau = 5 \text{ (min)} \quad , \quad T(10^{-2}, 5/60) = 462 \text{ } ^\circ\text{C}$$

y para la superficie con convección

$$T(L_x, \tau) = 585.0,99 \exp[-2,68\tau] \quad \tau = 5(\text{min}) \quad T(10^{-2}, 5/60) = 462^{\circ}\text{C}$$

b)

$$Q(\tau) = \rho C_p L_x L_y L_z \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} T(x) dx \int_0^{\tau} T(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \frac{Q}{V}(\tau) &= 1,09 \cdot 10^3 \frac{1}{10^{-2}} \left(-\frac{1}{14} \sin(14L_x) \right) (-2,68 \exp(-2,68\tau)) 585 \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{m}^3} \right) \\ &= 1,7 \cdot 10^6 \exp(-2,68\tau) \end{aligned}$$

8,3-1. Rectángulo con manantiales instantáneos y manantiales con tínuos.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x-x_1) \delta(y-y_1) \delta(\tau).$$

(1)

donde δ son las funciones delta de Dirac. Si las condiciones son

$$T=0 \quad x=0 \quad x=L_x \quad \tau < 0$$

(2)

con Q en $x=x_1$

Procediendo como en el apartado 8,2-1 con dos dimensiones, por aplicación sucesiva de la transformada finita del seno de Fourier a la ec.(1)

$$-(\eta^2 + \xi^2) \tilde{T}_F'(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\tilde{T}_F'}{d\tau} - \frac{Q}{k} \sin(\xi x_1) \sin(\eta y_1) \delta(\tau) \quad (3)$$

con

$$\xi = \pi \frac{m}{L_x} \quad \eta = \pi \frac{n}{L_y}$$

Resolviendo la ec.(3) con las condiciones (2) $L[\delta(\tau)] = 1$

$$\bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z) = \frac{\alpha Q}{k} \sin(\eta y_1) \exp(-\alpha \eta^2 z) \quad (4)$$

y por las inversiones correspondientes a las dos transformaciones de Fourier

$$T(x, y, z) = \frac{4 Q \alpha}{k L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\xi x_1) \sin(\eta y_1) \sin(\xi x) \sin(\eta y) \exp(-\alpha \sigma^2 z) \quad (5)$$

donde $\sigma^2 = \eta^2 + \xi^2$ y con los valores de ξ y η dados anteriormente.

a) Si las temperaturas son

$$\begin{array}{llllll} T = T_{x_0} & x = 0 & z < 0 & , & T = T_{y_0} & y = 0 & z < 0 \\ T = T_{L_x} & x = L_x & z < 0 & & T = T_{L_y} & y = L_y & z < 0 \end{array}$$

la ec. (3) toma la forma

$$-(\eta^2 + \xi^2) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z) + \eta [T_{y_0} - (-1)^n T_{L_y}] + \frac{2\xi}{\eta} [T_{x_0} - (-1)^m T_{L_x}] = \frac{d\bar{f}_F^{s'}}{dz} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{Q}{k} \sin(\xi x_1) \sin(\eta y_1) \delta(z) \quad (6)$$

donde

$$\xi = \frac{n\pi}{L_x} \quad \eta = \frac{2(n+1)}{L_y}$$

y resolviendo la ec. (6) por transformación de Laplace con

$$L[\delta(z)] = 1$$

$$f_F^{s'}(\xi, \eta, z) = L^{-1} \left[\frac{\eta (T_{y_0} - (-1)^n T_{L_y}) + 2\xi/n (T_{x_0} - (-1)^m T_{L_x})}{s(s + \alpha \sigma^2)} + \frac{\alpha Q/k \sin(\xi x_1) \sin(\eta y_1)}{s + \alpha \sigma^2} \right]$$

o

$$\bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z) = L^{-1} \left[\frac{A_1 + A_2 s}{s(s + \alpha \sigma^2)} \right] = \frac{A_1}{\sigma^2 \alpha} [1 - \exp(-\alpha \sigma^2 z)] + A_2 \exp(-\alpha \sigma^2 z) \quad (7)$$

donde $\sigma^2 = \xi^2 + \eta^2$

$$T(x, y, z) = \frac{4Q}{k L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(\xi x) \sin(\eta y) \left[\exp(-\alpha \delta^2 z) \left(A_2 - \frac{A_1}{\delta^2 \alpha} \right) + \frac{A_1}{\delta^2 \alpha} \right] \quad (8)$$

b) Si el manantial es continuo $Q = Q(\tau)$ y la ec. (7) es de la forma

$$\bar{f}_F'(\xi, \eta, z) = L^{-1} \left[\frac{A_1}{s(s + \alpha \delta^2)} + \frac{\alpha}{k} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \delta^2} \right] \quad (8a)$$

donde $L[Q(\tau)]$ es la transformada de Laplace de la función y la ecuación (8) toma la forma general

$$T(x, y, z) = \frac{4}{L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) L^{-1} \left[\frac{L[A_1(\tau)]}{s(s + \alpha \delta^2)} + \frac{L[A_2(\tau)]}{s + \alpha \delta^2} \right] \quad (9)$$

como puede observarse la ec. (9) comprende un gran número de casos que incluyen temperaturas en $x = 0$ y $x = L_x$ función del tiempo, como ya se ha visto en los apartados del capítulo 7.

c) Si el manantial es un punto en el rectángulo aplicando una transformada de Fourier al eje Z y dos transformadas de Fourier en la forma anteriormente expuesta resulta como se ha visto en 8,1-1 el producto de soluciones y

$$T(x, y, z) = \frac{Q}{4\alpha z k L_x L_y} \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{4\alpha z}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(\xi x) \sin(\eta y) \left[\exp(-\alpha \delta^2 z) \left(A_2 - \frac{A_1}{\alpha \delta^2} \right) + \frac{A_1}{\alpha \delta^2} \right] \quad (9a)$$

Ejemplo 8,3-1.

Una barra prismática de $10.10 \text{ (cm}^2\text{)}$ de sección se calienta por inducción en dos caras contiguas, mientras que las otras dos caras permanecen a 0°C . Se desea conocer la distribución de temperaturas en función del tiempo a 0.5 mm de distancia de las superficies calentadas en los siguientes casos:

a) Calentamiento superficial instantáneo de $Q_1=10^3 \text{ (Kcal/m}^2\text{)}$

b) Calentamiento superficial durante 5 minutos

Datos: $k = 7,2 \text{ (Kcal/hm}\tau\text{)}$ $\rho = 6300 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ $C_p = 0,12 \text{ (Kcal/kg}\tau\text{)}$

Solución:

a) La barra puede tratarse como un cuadrante de una sección de $20,20 \text{ cm}^2$ con dos planos perpendiculares generadores de calor que pasan por el centro de la barra o su equivalente, una línea generando $Q_1 L_x \left(\frac{\text{Kcal}}{\text{m}}\right)$ perpendicular al centro de la sección.

Aplicando la ecuación 8,3-1(5) con $Q = Q_1 L_x$ $x_1 = y_1 = \frac{L_x}{2} = \frac{L_y}{2}$

$$x = 10,05 \quad \frac{x}{L_x} = \frac{10,05}{20} \quad y = 10,05 \quad \frac{y}{L_y} = \frac{10,05}{20}$$

$$T(10,05, y, z) = \frac{4Q_1}{\rho C_p L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \sin\left(\frac{10,05 \cdot \pi m}{20}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{20}\right) \exp\left(-\alpha \left(\left(\frac{\pi m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{L_y}\right)^2\right) z\right)$$

donde y se extiende desde 10,05 a valores inferiores a 20 puesto que en L_x y L_y $T=0$

Análogamente $T(x, 10,05, z)$ es la ecuación anterior sustituyendo x como variable e y como dato.

En el caso particular del centro y admitiendo $\frac{10,05}{20} \approx \frac{1}{2}$

$$T(10, 10, z) = \frac{4Q_1}{\rho C_p L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^4\left(\frac{\pi m}{2}\right) \exp\left[-\alpha 2 \left(\frac{\pi m}{0,2}\right)^2 z\right]$$

y sustituyendo valores resulte para $\gamma = 1(5)$

$$T(10, 10, 1/3600) = 10,5 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

b) La generación de calor Q de la ec.8,3-1(1) vale $Q\tau$ y desaparece el término $\delta(\tau)$. La transformada de Laplace de la ec.8,3-1(3) vale

$$-\alpha \sigma^2 f(s) = s f(s) + A - \frac{Q\alpha}{k} \cdot \frac{1}{s^2} \sin(sx_1) \sin(\eta y_1)$$

$$f(s) = \frac{1}{(s + \alpha \sigma^2)} \left[A + \frac{Q\alpha}{k} \cdot \frac{1}{s^2} \sin(sx_1) \sin(\eta y_1) \right]$$

y por la inversión de $f(s)$ con $A=0$ para $\tau=0$

$$\bar{f}_F^s(s, \eta, z) = \frac{Q\alpha}{k} \cdot \frac{1}{\alpha \sigma^2} \left[-\tau + \frac{1}{\alpha \sigma^2} (1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)) \right] \sin(sx_1) \sin(\eta y_1)$$

y finalmente la ec.8,3-1(5)

$$T(x, y, z) = \frac{4Q}{k L_x L_y \sigma^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(sx_1) \sin(\eta y_1) \sin(x\xi) \sin(\eta y) \cdot \left[\frac{1}{\alpha \sigma^2} (1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)) - \tau \right]$$

donde

$$Q = Q_1 \left(\text{Kcal} / \text{h m}^2 \right) L_x$$

En forma análoga al caso a)

$$T(x, \frac{10,05}{L_y}, z) = \frac{4Q_1}{k L_y \sigma^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{20}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n \cdot \frac{10,05}{20}}{2}\right) \cdot \left[\frac{1}{\alpha \sigma^2} (1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)) - \tau \right]$$

En el centro

$$T(10, 10, z) = \frac{4Q_1}{k L_y \sigma^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sin^4\left(\frac{\pi m}{2}\right) \left[\frac{1}{\alpha \sigma^2} (1 - \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)) - \tau \right]$$

8,3-2. Rectángulo con manantiales instantáneos, manantiales continuos y convección.

Cumple la ecuación:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x-x_1) \delta(y-y_1) \delta(\tau) \quad (1)$$

donde δ son las funciones delta de Dirac.

Para las condiciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} + a_x T &= 0 & x &= L_x & \tau > 0, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 & x &= 0 & \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} + a_y T &= 0 & y &= L_y & \tau > 0, & \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 & y &= 0 & \tau > 0 \\ T &= 0 & 0 < x < L_x & & 0 < y < L_y & & \tau < 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Q instantáneo en $x = x_1, y = y_1, \tau > 0$

En forma análoga al apartado 8,3-1 aplicando a la ec. (1) la transformada del coseno de Fourier resulta

$$-(\eta_j^2 + \xi_i^2) \bar{T}_F^{CI}(\xi_i, \eta_j, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F^{CI}}{d \tau} - \frac{Q}{k} \cos(\xi_i x_1) \cos(\eta_j y_1) \delta(\tau) \quad (3)$$

Resolviendo la ec. (3) con las condiciones (2) y si $L[\delta(\tau)] = 1$

$$\bar{T}_F^{CI}(\xi_i, \eta_j, \tau) = \frac{\alpha Q}{k} \sin(\eta_j y_1) \exp(-\alpha \sigma^2 \tau) \quad (4)$$

y por las inversiones correspondientes a las dos transformaciones de Fourier como en el apartado 8,2-2

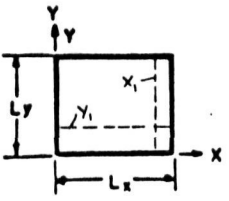
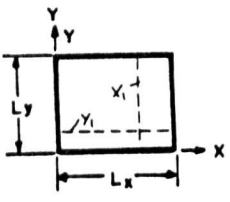
$$T(x, y, \tau) = \frac{4 Q \alpha}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2)(\eta_j^2 + a_y^2) \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y_1) \cdot \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \exp(-\alpha \sigma^2 \tau)}{L_x (\xi_i^2 + a_x^2) + a_x [L_y (\eta_j^2 + a_y^2) + a_y]} \quad (5)$$

donde ξ_i son las raíces de la ec. $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$

y $\eta_j, \eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = a_y$

$$\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$$

a) Para manantiales continuos $Q = Q(\tau)$ y para las mismas condiciones (2), por las transformadas de Laplace aplicadas a la ec. (3)

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|---|--|
|  <p>Fig. 8,3-1</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad 0 < y < L_y \quad z < 0$ $T=0 \quad x=0 \quad x=L_x \quad y=0 \quad y=L_y \quad z > 0$ $Q \quad x=x_i \quad y=y_i \quad z > 0$ | $T(x, y, z) = \frac{4\alpha Q}{k L_x L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\xi x_i) \sin(\xi x) \sin(\eta y_i) \sin(\eta y) \exp(-\alpha \sigma^2 z)$ $\xi = \pi \frac{m}{L_x} \quad \eta = \pi \frac{n}{L_y} \quad \sigma^2 = \xi^2 + \eta^2$ |
|  <p>Fig. 8,3-2</p> | $T=0 \quad 0 < x < L_x \quad 0 < y < L_y \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x=0 \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} + a_x T = 0 \quad x=L_x, \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial y} + a_y T = 0 \quad y=L_y, \quad z > 0$ $Q \quad x=x_i \quad y=y_i \quad z > 0$ | $T(x, y, z) = \frac{4\alpha Q}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2)(\eta_j^2 + a_y^2) \cos(\xi_i x_i) \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y_i) \cos(\eta_j y)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y]} \cdot \exp(-\alpha \sigma^2 z)$ <p> ξ_i raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$ η_j raíces de $\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = a_y$ </p> $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 \quad a_x = \frac{h_x}{k} \quad a_y = \frac{h_y}{k}$ |

$$f(s) = \frac{d}{k} \cos(\xi_i x_i) \cos(\eta_i y_i) \frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \sigma^2} \quad (6)$$

y la solución es la ec. (5) sustituyendo el término exponencial por la inversión $L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \sigma^2} \right]$

b) Para manantiales puntuales instantáneos en el punto, x_i, y_i

$$T(x, y, z) = \frac{Q}{4k\pi} \exp\left(-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4\alpha\tau}\right) \text{ expresión ecuación 8,3-2(5) sin } \frac{4\alpha\sigma^2}{k}$$

8,4-1. Paralelepípedo con manantiales instantáneos y manantiales continuos.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x-x_i) \delta(y-y_i) \delta(z-z_i) \delta(\tau) \quad (1)$$

donde δ es la función delta de Dirac.

$$\text{Si } T=0 \quad x=0, \quad x=L_x, \quad y=0, \quad y=L_y, \quad z=0, \quad z=L_z \quad \tau>0$$

y Q es un manantial instantáneo en los planos perpendiculares (2) a

$$x_i, y_i, z_i \quad y \quad T=0 \quad 0 < x < L_x \quad 0 < y < L_y \quad \tau < 0$$

Procediendo como en el caso del rectángulo, apartado 8,2-1 aplicando a la ec. (1) tres veces la transformada finita del seno de Fourier y teniendo en cuenta las propiedades de la función resulta

$$-(\xi^2 + \eta^2 + r^2) \bar{F}_F^{sin}(\xi, \eta, r, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{F}_F^{sin}}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \sin(\xi x_i) \sin(\eta y_i) \sin(r z_i) \delta(\tau) \quad (3)$$

$$\text{donde } \xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad \eta = \frac{\pi n}{L_y} \quad r = \frac{\pi p}{L_z} \quad 0 < x_i < L_x, \quad 0 < y_i < L_y, \quad 0 < z_i < L_z$$

La solución de la ec. (3) con las condiciones de 2 y si

$$L[\delta(\tau)] = 1 \quad (4)$$

$$\bar{F}_F^{sin}(\xi, \eta, r, \tau) = \frac{Q}{\alpha k} \sin(\xi x_i) \sin(\eta y_i) \sin(r z_i) \exp(-\alpha \mu^2 \tau)$$

donde $\mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + r^2$

Por las inversiones correspondientes a $\bar{f}_F^{s'}$ y $\bar{f}_F^{s''}$

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{8Q\alpha}{kL_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz) \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz) \exp(-\alpha \mu^2 \tau) \quad (5)$$

a) Si los manantiales existen por ejemplo en el plano solamente se tiene las ecuaciones

$$\begin{aligned} -\xi^2 \bar{f}_F^s(\xi, \eta, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^s}{\partial z^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^s}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \sin(\xi x) \delta(\tau) \\ -(\xi^2 + \eta^2) \bar{f}_F^{s'}(\xi, \eta, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^{s'}}{\partial z^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^{s'}}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \int_0^{L_y} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \delta(\tau) dy \\ -(\xi^2 + \eta^2 + r^2) \bar{f}_F^{s''}(\xi, \eta, r, \tau) &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^{s''}}{\partial \tau} - \frac{2Q}{k\eta} \sin(\xi x) \int_0^{L_z} \sin(rz) \delta(\tau) dz \end{aligned}$$

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{32Q\alpha}{kL_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin(\xi x) \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz) \exp(-\alpha \mu^2 \tau)}{\eta r} \quad (6)$$

con

$$\xi = \pi \frac{m}{L_x} \quad \eta = (2n+1) \frac{\pi}{L_y} \quad r = (2p+1) \frac{\pi}{L_z}$$

b) Manantiales continuos $Q = Q(\tau)$

La transformación de Laplace aplicada a la ec. (3)

$$f(s) = \frac{L[Q(\tau) A_1]}{s + \alpha \mu^2} \quad (7)$$

y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_F^{s''}(\xi, \eta, r, \tau) = A_1 L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \mu^2} \right] \quad (8)$$

$$A_1 = \frac{1}{\alpha k} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz)$$

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{8A_1}{\alpha k L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sin(\xi x) \sin(\eta y) \sin(rz) L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \mu^2} \right] \quad (9)$$

donde nuevamente el término $L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \mu^2} \right]$ permite la solución de distintos casos de $Q(\tau)$ realizándose la inversión por convolución de Laplace como se ha visto en los apartados anteriores sin excluir como es lógico las funciones periódicas obteniéndose las soluciones indicadas en el capítulo 7.

c) Si el manantial es un punto por la ec. 8,1-1(13)

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{Q}{(\rho c_p)^2 L_x L_y L_z} \left(\frac{\alpha}{\pi \tau} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}{4\alpha\tau} \right] \cdot \left[\text{Ec. (5)} \sin \frac{8Q\alpha}{k L_x L_y L_z} \right]$$

8,4-2. Paralelepípedo con manantiales instantáneos y manantiales continuos con convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \delta(x-x_1) \delta(y-y_1) \delta(z-z_1) \delta(\tau) \quad (1)$$

Para las condiciones

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial T}{\partial x} + a_x T = 0 & x = L_x, & \frac{\partial T}{\partial x} = 0 & x = 0 \quad \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} + a_y T = 0 & y = L_y & \frac{\partial T}{\partial y} = 0 & y = 0 \quad \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} + a_z T = 0 & z = L_z & \frac{\partial T}{\partial z} = 0 & z = 0 \quad \tau > 0 \\ T = 0 & 0 < x < L_x & 0 < y < L_y & \tau < 0 \end{array} \quad (2)$$

con Q en $x = x_1 \quad y = y_1 \quad z = z_1 \quad \tau > 0$

En forma análoga al apartado 8,3-2 aplicando a la ec. (1) la transformada finita del coseno de Fourier tres veces consecutivas se tiene

$$-(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \rho_1^2) \bar{T}_F^{(c)}(\xi_1, \eta_1, \rho_1, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{T}_F^{(c)}}{d \tau} - \frac{Q}{K} \cos(\xi_1 x_1) \cos(\eta_1 y_1) \cos(\rho_1 z_1) \delta(\tau) \quad (3)$$

Resolviendo (3) se tiene por las condiciones de (2) y $L[\delta(\tau)] = 1$

$$\bar{T}_F^{(c)}(\xi_1, \eta_1, \rho_1, \tau) = \frac{Q\alpha}{K} \cos(\xi_1 x_1) \cos(\eta_1 y_1) \cos(\rho_1 z_1) \exp(-\alpha \mu^2 \tau) \quad (4)$$

y por las inversiones de las transformadas finitas del coseno de Fourier

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{8 Q_0}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + a_x^2)(\eta_j^2 + a_y^2)(r_p^2 + a_z^2) \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \cos(r_p z)}{[L_x(\xi_i^2 + a_x^2) + a_x][L_y(\eta_j^2 + a_y^2) + a_y][L_z(r_p^2 + a_z^2) + a_z]} \cdot \cos(r_p z) \exp(-\alpha \mu^2 \tau) \quad (5)$$

con ξ_i son las raíces de $\xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = a_x$

$\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = a_y$

$r_p \operatorname{tg}(r_p L_z) = a_z$

Obsérvese que los coeficientes a_x, a_y, a_z se han admitido distintos para unificar la nomenclatura.

En muchos casos pueden tomarse iguales y en otros pueden ser iguales las caras contiguas.

a) En el caso de manantiales continuos puede escribirse

$$\bar{T}_F^{ca}(\xi_i, \eta_j, r_p, \tau) = A_1 L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \mu^2} \right] \quad (6)$$

donde $A_1 = \frac{\alpha}{k} \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y) \cos(r_p z)$ $L[Q(\tau)]$ es la transformada de Laplace de la función $Q(\tau)$ y L^{-1} la inversa de la función $f(s)$ y la solución

$$T(x, y, z, \tau) = [\text{Ec. (5) sustituyendo el término exponencial por } L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \mu^2} \right]] \quad (7)$$

Ejemplo 8.4-2.

Un bloque de hormigón de $16.16.16 \text{ (m}^3\text{)}$ genera calor por la hidratación de sus componentes, según la expresión $Q_0 \exp(-A\tau)$ donde $Q_0 \text{ (Kcal/h.m}^3\text{)}$ y A son constantes específicas para una composición determinada del hormigón. La temperatura inicial del

bloque es de 15°C y el coeficiente de transmisión de calor superficie-aire es de $20 \text{ (Kcal/hm}^2\text{ }^{\circ}\text{C)}$ Se desea conocer

- Distribución de temperaturas en función de la posición y del tiempo en el bloque.
- Temperatura en el punto central.
- Calor almacenado en función del tiempo.
- Gradientes máximos de temperatura.
- Distribución de temperaturas en función de la posición y tiempo por inserción en el bloque de manantiales de refrigeración lineales o planos.

Datos: $k = 1,3 \text{ (Kcal/hm}^2\text{ }^{\circ}\text{C)}$ $\rho = 2000 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ $c_p = 0,23 \text{ (Kcal/kg }^{\circ}\text{C)}$

Solución:

a) Teniendo en cuenta la distribución de temperaturas en régimen transitorio con generación de calor de un paralelepípedo con convección, apartado 6,4-2. La ecuación 6,4-2(5) toma la forma

$$-(\xi_i^2 + \eta_j^2 + \gamma_p^2) \bar{T}_F'' = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_F''}{d\tau} - \frac{Q_0}{\xi_i \eta_j \gamma_m k} \sin(\xi_i L_x) \sin(\eta_j L_y) \sin(\gamma_m L_z)$$

aplicando la transformación de Laplace

$$f(s) (s + \alpha \mu^2) = \frac{Q_0 A_1}{(s + A)}$$

y por inversión de $f(s)$

$$\begin{aligned} \bar{T}_F''(\xi_i^2, \eta_j^2, \gamma_p^2, \tau) &= \frac{A_1 Q_0}{(\alpha \mu^2 - A)} \left(\exp(-A\tau) - \exp(-\alpha \mu^2 \tau) \right) = \frac{Q_0 \alpha}{k \xi_i \eta_j \gamma_m (\alpha \mu^2 - A)} \\ &\cdot \sin(\xi_i L_x) \cdot \sin(\eta_j L_y) \cdot \sin(\gamma_m L_z) \left[\exp(-A\tau) - \exp(-\alpha \mu^2 \tau) \right] \end{aligned}$$

y la ec. 6,4-2(10) si $\xi_i = \eta_j = \gamma_m$ puesto que $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z; L_x = L_y = L_z$

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{8 Q_0 d}{k} Q_x^3 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\xi_j y) \cos(\xi_k z)}{[L_x (\xi_i^2 + a^2) + Q_x]^3 \cos^3(\xi_i L_x)} [\exp(-A \tau) - \exp(-a \mu^2 \tau)]$$

donde $\mu^2 = 3 \xi_i^2$ $a_x = \frac{h}{k}$

Por la tabla I-3(5) Apéndice I con $a_x = \frac{20}{1.3} = 15.38$ $a_x L_x = 123$

$\xi_1 L_x = 1.555$ $\xi_2 L_x = 4.665$ $\xi_3 L_x = 7.77$ $\xi_4 L_x = 10.8$ $d = 2.8 \cdot 10^{-3}$

$$T(x, y, z, \tau) = 62 Q_0 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\xi_j y) \cos(\xi_k z) [\exp(-A \tau) - \exp(-8.4 \cdot 10^{-3} \xi_i^2 \tau)]}{[8 (\xi_i^2 + 15.38^2) + 15.38] \cos^3(\xi_i L_x)}$$

expresándose τ (h), Q_0 (kcal/h m³) $T'(x, y, z, \tau) = 15(^{\circ}\text{C}) + T(x, y, z, \tau)$

b) En el punto central $x=y=z=0$

$$T(x, y, z, \tau) = 62 Q_0 \sum_{i=1}^4 \frac{\exp(-A \tau) - \exp(-8.4 \cdot 10^{-3} \xi_i^2 \tau)}{[8 (\xi_i^2 + 15.38^2) + 15.38] \cos^3(\xi_i L_x)}$$

c) $Q(\tau) = [\bar{T}(\tau) - 25(^{\circ}\text{C})] \frac{8 C_p L_x L_y L_z}{8}$

$$Q(\tau) = \frac{8.62 Q_0}{L_x L_y L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \tau \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\xi_j y) \cos(\xi_k z)}{[8 (\xi_i^2 + 15.38^2) + 15.38] \cos^3(\xi_i L_x)} \cdot [\exp(-A \tau) - \exp(-8.4 \cdot 10^{-3} \xi_i^2 \tau)] \cdot C_p L_x L_y L_z \cdot 8 \cdot dx dy dz d\tau$$

o

$$Q(\tau) = 1.82 \cdot 10^6 Q_0 \sum_{i=1}^4 \frac{\left(\frac{Q_x}{\xi_i}\right)^3}{\xi_i^2 [8 (\xi_i^2 + 15.38^2) + 15.38]} \left[\frac{\exp(-8.4 \cdot 10^{-3} \xi_i^2 \tau) - \exp(-A \tau)}{8.4 \cdot 10^{-3} \xi_i^2 - A} \right]$$

d) Los gradientes máximos de temperatura se producen en las proximidades de las superficies y para $\cos(\xi_j y) \cos(\xi_k z) = 1$ es decir

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(L_x, 0, 0, \tau)} = \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(0, L_y, 0, \tau)} = \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{(0, 0, L_z, \tau)} = -62 Q_0 \sum_{i=1}^4 \frac{Q_x}{\xi_i^2} \frac{[\exp(-A \tau) - \exp(-8.4 \cdot 10^{-3} \xi_i^2 \tau)]}{[8 (\xi_i^2 + 15.38^2) + 15.38] \cos^2(\xi_i L_x)}$$

e) Un manantial lineal puede conseguirse con un tubo metálico de pequeño diámetro frente a las dimensiones del bloque. Por el interior del tubo circula un fluido, normalmente agua. La cantidad de calor eliminada por el agua vale

$$dq = h \pi D (T_x - t_x) dx$$

donde h es el coeficiente de transmisión de calor desde la masa de hormigón al agua; D , el diámetro interior del tubo y t_x (°C) la temperatura del agua en la posición x . La conductividad térmica de los materiales metálicos es muy superior a la k del hormigón y la resistencia térmica es despreciable por lo cual h puede calcularse por una expresión del tipo

$$\frac{hD}{k} = 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,33}$$

donde las variables son las indicadas en el capítulo 1. Si la velocidad del agua es elevada y L_x es bajo, y sin recirculación, t_x puede admitirse constante para la longitud del tubo y la ecuación de q puede expresarse como un manantial lineal de refrigeración

Q_1 (kcal/m) = $q \cdot \Delta\tau_1 / L_x$ donde $\Delta\tau_1$ es el tiempo de permanencia en el tubo, es decir el volumen del tubo dividido por el caudal (m^3/h).

Aplicando el método de superposición la temperatura en cualquier posición del bloque es la suma algebraica, de las temperaturas debidas al caso a), y las temperaturas del manantial lineal.

Si el tubo tiene la posición $(0, \frac{L_y}{2}, \frac{L_z}{2})$, $(L_x, L_y/2, L_z/2)$ la distribución de temperaturas viene dada por una ecuación análoga a

8,4-2(7), con Q_1 , constante, y sin los términos $\cos(\eta_i y_i) \cos(\gamma_p z_i)$

Aplicando la transformación de Laplace a la ec.8,4-2(3) se tiene

$$-\mu^2 f(s) = s f(s) + B - \frac{Q}{k s} \cos(sx)$$

y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_F''(s; \eta_i, \gamma_p, \tau) = -\frac{Q Q_1}{k} \cos(sx) (1 - \exp(-\alpha \mu^2 \tau))$$

En régimen estacionario para el tubo

$$T_t(x, y, z) = \frac{8\alpha Q_1 a_x^3}{k} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{l=1}^4 \frac{\cos(\xi_i x) \cos(\xi_j L_x) \cos(\xi_l y) \cos(\xi_l z)}{[9(\xi_i^2 + 15,38^2) + 15,38] \cos^2(\xi_i L_x)} + t(^{\circ}C)$$

y la distribución de temperaturas en el bloque

$$T_1(x, y, z, \tau) = T(x, y, z, \tau) + 15(^{\circ}C) - T_t(x, y, z) - t(^{\circ}C)$$

si la temperatura del agua en el tubo se quiere poner en forma más exacta, se debe expresar $Q_1(x)$ ó $Q(\tau)$ en la ecuación de $T_t(x, y, z, \tau)$ Con $Q_1(x)$ se modifica la transformada del coseno de Fourier correspondiente a x , y la expresión de $T_t(x, y, z)$ se multiplica por el factor de transformación, teniendo en cuenta que el bloque se extiende a $(-L_x + L_x), (-L_y + L_y), (-L_z + L_z)$. Para $Q_1(\tau)$, aparece como $T_t(x, y, z, \tau)$ por la transformación de Laplace correspondiente a la función del tiempo.

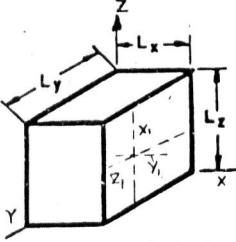
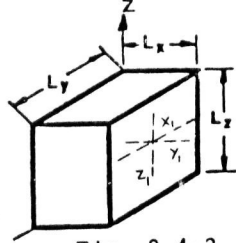
Con número de tubos superior a uno, se aplica el método de superposición a cada uno de ellos, tanto si se consideran en para lelo, como perpendiculares, o cualquier posición y forma dentro del bloque, siempre y cuando estos últimos casos puedan tratarse en forma analítica eligiendo los sistemas de coordenadas convenientes.

Si los tubos forman un plano pueden tratarse con la ecuación 8,4-2(7) modificada, es decir eliminando alguno de los términos $\cos(\xi_i x), \cos(\xi_j y)$ o $\cos(\xi_l z)$ y con las consideraciones anteriores sobre Q_1 y sus posibles variaciones con el tiempo o la distancia.

8,5-1. Cilindro infinito con manantiales instantáneos y manantiales continuos.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(r-R) \delta(\tau) \quad (1)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|--|
|  <p>Fig. 8,4-1</p> | $T=0 \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ 0 < y < L_y \\ z < 0 \quad 0 < z < L_z \end{array}$ $T=0 \quad \begin{array}{l} x=0 \quad x=L_x \\ y=0 \quad y=L_y \\ z=0 \quad z=L_z \end{array}$ $Q \quad x=x_1, y=y_1, z=z_1, \tau > 0$ | $T(x, y, z, \tau) = \frac{32\alpha Q}{k L_x L_y L_z} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sin(\xi x_1) \sin(\xi x) \sin(\eta y_1) \sin(\eta y) \cdot$ $\cdot \sin(r z_1) \sin(r z) \cdot \exp(-\alpha \mu^2 \tau)$ $\mu^2 = \xi^2 + \eta^2 + r^2 \quad \xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad \eta = \frac{\pi n}{L_y} \quad r = \frac{\pi p}{L_z}$ |
|  <p>Fig. 8,4-2</p> | $T=0 \quad \begin{array}{l} 0 < x < L_x \\ z < 0 \quad 0 < y < L_y \\ 0 < z < L_z \end{array}$ $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad x=y=z=0, \tau > 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = -\alpha_x T, \quad x=L_x, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha_y T, \quad y=L_y$ $\frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha_z T, \quad z=L_z; \quad Q, \quad x=x_1, y=y_1, z=z_1$ | $T(x, y, z, \tau) = \frac{8\alpha Q}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\xi_i^2 + \alpha_x^2)(\eta_j^2 + \alpha_y^2)(r_p^2 + \alpha_z^2)}{[\xi_i^2(\xi_i^2 + \alpha_x^2) + \alpha_x^2][\eta_j^2(\eta_j^2 + \alpha_y^2) + \alpha_y^2][r_p^2(r_p^2 + \alpha_z^2) + \alpha_z^2]} \cdot$ $\cdot \cos(\xi_i x_1) \cos(\xi_i x) \cos(\eta_j y_1) \cos(\eta_j y) \cos(r_p z_1) \cos(r_p z) \exp(-\alpha \mu^2 \tau)$ $\xi_i \text{ raíces de } \xi_i \operatorname{tg}(\xi_i L_x) = \alpha_x \quad \alpha_x = h_x/k$ $\eta_j \text{ raíces de } \eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_y) = \alpha_y \quad \alpha_y = h_y/k$ $r_p \text{ raíces de } r_p \operatorname{tg}(r_p L_z) = \alpha_z \quad \alpha_z = h_z/k$ $\mu^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2 + r_p^2$ |

donde δ son funciones delta de Dirac

$$\begin{array}{lll} T=0 & r=R_0 & \tau > 0 \\ T=0 & 0 < r < R & \tau < 0 \end{array} \quad (2)$$

Q manantial en la superficie lateral $r=R_1$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel de grado cero

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{f}_{H,0}}{d\tau} - \frac{Q}{k} \int_0^\infty r J_0(\xi_i r) \delta(r-R_1) \delta(\tau) dr \quad (3)$$

y por las propiedades de $\delta(r-R_1)$

$$-\frac{Q}{k} \int_0^\infty r J_0(\xi_i r) \delta(r-R_1) dr = -\frac{Q}{k} R_1 J_0(\xi_i R_1)$$

Resolviendo la ec. (3) y teniendo en cuenta que la transformada de Laplace de $\delta(\tau)$ vale la unidad

$$-\alpha \xi_i f(s) = s f(s) - A - \frac{\alpha Q}{k} R_1 J_0(\xi_i R_1)$$

por las condiciones (2) $A=0$ y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{\alpha Q}{k} R_1 J_0(\xi_i R_1) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (4)$$

con la inversión de la transformada de Hankel

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R_0)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) \quad (5)$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

Sustituyendo (4) en (5)

$$T(r, \tau) = \frac{2\alpha Q R_1}{k R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i R_1)}{J_1^2(\xi_i R)} J_0(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (6)$$

a) Si en $\tau < 0$ $T=T_1$ $0 < r < R$ $A=T_1$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z) = \left[T_1 + \frac{\alpha Q}{k} R_1 J_0(\xi_i R_1) \right] \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$$

$$T(r, z) = \frac{2\alpha Q}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \left(T_1 + \frac{\alpha Q}{k} R_1 J_0(\xi_i R_1) \right) \exp(-\alpha \xi_i^2 z) \quad (7)$$

b) Si el manantial es una línea paralela al eje z la solución es la ec. (6) con el valor de Q correspondiente a la línea.

c) Si el manantial es un punto localizado en (R_1, L_2) cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(r - R_1) \delta(z - L_2) \delta(\tau) \quad (8)$$

Aplicando a la ec. (8) sucesivamente la transformada finita de Hankel de grado cero y la transformada de Fourier y teniendo en cuenta las propiedades de las funciones δ

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + \frac{\partial \bar{f}_{H,0}}{\partial \tau} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} R_1 J_0(\xi_i R_1) \delta(z - L_2) \delta(\tau) \quad (9)$$

$$-(\xi_i^2 + \eta^2) f_F(\xi_i, \eta, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{df_F}{d\tau} - \frac{Q R_1}{k \sqrt{2\pi}} J_0(\xi_i R_1) \delta(\tau) \quad (10)$$

y por la transformación de Laplace con $L[\delta(\tau)] = 1$

$$f_F(\xi_i, \eta, \tau) = \left[A + \frac{\alpha Q R_1}{k \sqrt{2\pi}} J_0(\xi_i R_1) \right] \exp(-\alpha \tau^2) \quad (11)$$

Por la inversión de Fourier y con $T=0$ en $\tau < 0$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha Q R_1 J_0(\xi_i R_1) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \cdot \exp(-\alpha \eta^2 \tau - i(z - L_2)\eta) d\tau \quad (12)$$

y si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha \eta^2 \tau - i(z - L_2)\eta) \cdot d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha \tau}} \exp\left(-\frac{(z - L_2)^2}{4\alpha \tau}\right)$$

y con la inversión de la transformada de Hankel se obtiene finalmente

$$T(r, z, \tau) = \frac{\alpha Q}{2\pi k R_0^2 \sqrt{2\pi \tau}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i R_1) J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R_0)} \cdot \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \exp\left(-\frac{(z - L_2)^2}{4\alpha \tau}\right)$$

ξ_i , raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

- En el caso de manantiales continuos $Q=Q(\tau)$ y la transformada de Laplace $f(s)$ vale

$$f(s) = \frac{1}{s + \alpha \xi_i^2} [Q(\tau)]$$

y por las propiedades de la convolución de Laplace

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{\alpha R_i}{k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i R_i) J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \int_0^{\tau} Q(\tau^*) \exp(-\alpha \xi_i^2 (\tau - \tau^*)) d\tau^* \quad (14)$$

con soluciones para casos periódicos dados en el capítulo 7.

Ejemplo 8,5-1.

Un reactor químico de lecho fijo está formado por tubos de 20 mm de diámetro interior, en los cuales se aloja un catalizador constituido por pastillas sólidas porosas. En régimen estacionario, la generación de calor en el lecho puede admitirse uniforme y de valor 10^6 (Kcal/h m³) y la temperatura de la superficie interior del tubo alcanza 250°C. Se desea conocer la distribución de temperaturas en el lecho por las siguientes alteraciones:

- Generación en un radio del tubo, $r=1$ (mm), $Q=0,02$ (Kcal) en posición puntual e instantáneamente.
- Generación de 10^4 (Kcal/m) en una línea paralela al eje z de 3 mm de longitud en la posición $r=5$ (mm) e instantáneamente.
- Generación de 10^4 (Kcal/m²) en una superficie cilíndrica paralela al eje z de 3 mm de altura, en la posición $r=5$ (mm) e instantáneamente.
- Los casos a), b) y c) con las correspondientes generaciones de calor constantes en un tiempo de 0,7 segundos.

Datos: Conductividad térmica media del lecho 1 (Kcal/h m °C) densidad media 600 (kg/m³) calor específico $0,15$ (Kcal/kg °C)

Solución:

a) La distribución de temperaturas en régimen estacionario, de acuerdo con las expresiones para un cilindro infinito del capítulo 4

$$T = \frac{Q}{4k} (R^2 - r^2) + 250 = 2,5 \cdot 10^5 (10^{-4} - r^2) + 250$$

aplicando el método de superposición para $r = 10^{-3}$ (m) y en función del tiempo, teniendo en cuenta la ec. 8,5-1(13) con $Q = 2 \cdot 10^{-2}$ kcal

$$T(r, z, \tau) = 2,5 \cdot 10^5 (10^{-4} - 10^{-6}) + 250 + \frac{1,1 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2\pi \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{\pi \cdot 1,1 \cdot 10^{-2} \tau}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(10^{-3} \xi_i) J_0(\xi_i r)}{J_1^2(10^{-2} \xi_i)} \exp\left(-\frac{10^2 z^2}{4,1 \tau}\right) \cdot \exp(-1,1 \cdot 10^{-2} \xi_i^2 \tau)$$

Por la tabla I-3(3) del Apéndice I las raíces ξ_i

$$\xi_1 R = 2,404 \quad \xi_2 R = 8,65 \quad \xi_3 R = 11,79 \quad \xi_4 R = 14,93$$

En particular para el punto central $r=0$ $z=0$ y $\tau=1$ (s)

$$T(0, 0, 1/3600) \simeq 250 + 25 + 415 = 690 (^\circ\text{C})$$

b) Teniendo en cuenta que la línea generadora de calor es Q (kcal/m) la ec. 8,5-1(13) con el plano de simetría en $z = 1,5$ (mm); calor generado $Q \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}$ y $J_0(\xi_i R) = J_0(5 \cdot 10^{-3} \xi_i)$

$$T(r, z, \tau) = 2,5 \cdot 10^5 (10^{-4} - r^2) + 250 + \frac{0,015 \cdot 1,1 \cdot 10^{-2}}{2\pi \cdot 10^{-4} \sqrt{4,1 \cdot 10^{-2} \pi \tau}} \sum_{i=1}^4 \frac{J_0(5 \cdot 10^{-3} \xi_i) J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \cdot \exp(-1,1 \cdot 10^{-2} \xi_i^2 \tau) \cdot \exp\left(-\frac{(z - 1,5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10^2}{4,1 \tau}\right)$$

Para $r=0$ en el plano $z = 1,5$ (mm)

$$T(0, 1,5 \cdot 10^{-3}, 1/3600) = 250 + 25 + 132 = 407 (^\circ\text{C})$$

c) Por la ec. 8,5-1(6) aplicada a la región del cilindro de 3 mm de altura

$$T(r, z, \tau) = 2,5 \cdot 10^5 (10^{-4} - r^2) + 250 + \frac{2,3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4}{9 \varphi \cdot 10^{-2}} \sum_{i=1}^4 \frac{J_0(3 \cdot 10^{-3} \xi_i)}{J_1^2(10^{-2} \xi_i)} \cdot J_0(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)$$

y en $r=0$ $z=1$ (s)

$$T(0, 1/3600) = 250 + 25 + 246 = 521 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

d) Las expresiones de generación de calor son de la forma $Q\tau$ En la ec.8,5-1(1) no interviene la función $\delta(\tau)$ y la transformada de Laplace de la ec.8,5-1(3) vale

$$-\alpha \xi_i^2 f(s) = s f(s) - A - \frac{\alpha Q R_1}{k s^2} J_0(\xi_i R_1)$$

$$f(s) = \frac{A}{(s + \alpha \xi_i^2)} + \alpha R_1 \frac{Q}{k} \frac{J_0(\xi_i R_1)}{s^2} \frac{1}{\alpha \xi_i^2} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha \xi_i^2} \right) \right]$$

y por la inversión de $f(s)$ con $A=0$ en $\tau=0$

$$f_{n,0}(\xi_i, \tau) = \frac{Q R_1}{\xi_i^2 k} J_0(\xi_i R_1) \left[\tau - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right]$$

y las ecuaciones de los casos a), b) y c) se modifican con el término anterior, así, para el caso c)

$$T(r, \tau) = \frac{2 Q R_1}{k R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i R)}{\xi_i^2} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1^2(\xi_i R)} \left[\tau - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right]$$

donde τ_1 está limitada entre $0-0,7$ (s), Q (kcal/s m²)

8,5-2. Cilindro infinito con manantiales instantáneos manantiales continuos y convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(r-R_1) \delta(\tau) \quad (1)$$

donde δ son funciones delta de Dirac.

Con las condiciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} + \alpha r T &= 0 & r=R & \quad \tau > 0 & \quad \alpha r = \frac{hr}{k} & \quad (2) \\ T &= 0 & 0 < r < R & \quad \tau < 0 \end{aligned}$$

Q en el manantial instantáneo en la superficie lateral $r=R$ y $\tau > 0$ Aplicando a la ec.(1) la transformada finita de Hankel de grado cero y teniendo en cuenta las propiedades de $\delta(r-R)$

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{d\bar{f}_{H,0}}{d\tau} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{Q}{k} R_1 J_0(\xi_i R_1) \delta(\tau) \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r) \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau)}{(\xi_i^2 + \alpha^2) J_0^2(\xi_i R)} \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces positivas de $\xi_i J_1(\xi_i R) = \alpha r J_0(\xi_i R)$

Resolviendo la ec.(3) por transformadas de Laplace y teniendo en cuenta que $L[\delta(\tau)] = 1$

$$f(s) = \frac{\alpha Q R_1 J_0(\xi_i R_1)}{k} \frac{1}{s + \alpha \xi_i^2} - \frac{A}{s + \alpha \xi_i^2}$$

si $T=0$ en $\tau=0$ $A=0$ y por la inversión de $f(s)$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{\alpha Q R_1}{k} J_0(\xi_i R_1) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (5)$$

y sustituyendo en (4)

$$T(r, \tau) = \frac{2 \alpha Q R_1}{k R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i R_1) J_0(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{(\xi_i^2 + \alpha^2) J_0^2(\xi_i R)} \quad (6)$$

- Con manantiales continuos el segundo término del segundo miembro de la ec.(1) vale $-\frac{Q}{k} \delta(r-R)$ y

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{\alpha R_1 J_0(\xi_i R_1)}{k} L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right] \quad (7)$$

y la solución es

$$T(r, \tau) = [\text{Ec. (6) sustituyendo el término exponencial por } L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right]] \quad (8)$$

Ejemplo 8,5-2.

Una barra metálica de 4 cm de diámetro se calienta en régimen estacionario con un flujo térmico en la superficie de $5 \cdot 10^4 \text{ (kcal/h.m}^2\text{)}$ con un coeficiente de convección-radiación al medio que rodea la barra de $100 \text{ (kcal/h.m}^2\text{.}^\circ\text{C)}$. Se desea conocer la distribución de temperaturas en la barra en las condiciones:

a) Régimen estacionario.

b) Aumento de $10^3 \text{ (kcal/m}^2\text{)}$ en la superficie, instantánea mente.

c) Aumento de $10^3 \text{ (kcal/min.m}^2\text{)}$ durante 2 minutos

Datos: $k = 20 \text{ (kcal/h.m.}^\circ\text{C)}$ $\rho = 7800 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ $c_p = 0,13 \text{ (kcal/kg.}^\circ\text{C)}$

Solución:

a) En régimen estacionario se cumple la ec.8,5-2(1) sin los términos de tiempo. Las condiciones (2) se siguen cumpliendo puesto que la generación de calor en la superficie es adiabática. La ec.8,5-2(5) para $Q = \text{cte.}$ vale

$$\bar{T}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{\alpha Q R_i J_0(\xi_i R_i)}{k \frac{\alpha \xi_i^2}{2}} [1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)]$$

y si en régimen estacionario $\tau \rightarrow \infty$

$$T(r) = \frac{\alpha Q R_i}{k R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i R_i) J_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R) (\xi_i^2 + a^2)}$$

si la superficie generadora está en R

$$T(r) = \frac{\alpha Q}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R) (\xi_i^2 + a^2)}$$

y para un punto en la superficie $r = R$

$$T(R) = \frac{\alpha Q}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi_i^2 + a^2)}$$

$$a_r = \frac{h}{k} = 5$$

y por la tabla I-3(4) Apéndice I

$$a_r R = 5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0,1$$

$$\xi_1 R = 0,44 \quad \xi_2 R = 3,85 \quad \xi_3 R = 7,02 \quad \xi_4 R = 10,18$$

$$T(R) \approx \frac{10^5}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 509} = 491 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

b) Aplicando el método de superposición

$$T(r, \tau) = T_1(r) + T_2(r, \tau)$$

donde $T_1(r)$ se refiere a la temperatura en régimen estacionario
y $T_2(r, \tau)$ a la ec. 8,5-2(6) con $Q = Q_2 = 10^4 \text{ (kcal/m)}$ $R_1 = R$

$$T(r, \tau) = \sum \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i R)(\xi_i^2 + a_r^2)} \left[\frac{2Q_2 \alpha \xi_i^2}{kR} \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) - \frac{2Q}{kR} \right]$$

En particular para $r = R$ $\tau = 1 \text{ (s)}$

$$T(R, 1/3600) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{(\xi_i^2 + a_r^2)} \left[\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1,97 \cdot 10^{-2} \xi_i^2}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} \exp\left(-\frac{1,97 \xi_i^2}{3600}\right) + \frac{2,5 \cdot 10^4}{20 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \right]$$

$$\approx 93,6 + 491 = 584,6 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

c) Considerando $Q = 10^3 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{min} \cdot \text{m}^2} \right)$ en forma análoga al problema 8,5-1 puede escribirse para la distribución de temperaturas

$$T(r, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i R)(\xi_i^2 + a_r^2)} \left[\frac{2Q_2}{kR} \left(\tau_1 - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right) + \frac{2Q}{kR} \right]$$

y para $r = R$ $\tau = 2 \text{ (min)}$

$$T(R, 2/60) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{(\xi_i^2 + a_r^2)} \left[\frac{2 \cdot 10^3}{20 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \left(2 - \frac{1}{1,97 \cdot 10^{-2} \xi_i^2} (1 - \exp(-1,97 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2}{60} \xi_i^2)) \right) + \frac{10^5}{0,4} \right]$$

$$\approx 491 + 9,8 = 500,8 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

Ejemplo 8,5-2(a).

El eje de una rueda es un cilindro metálico de 10 cm de diámetro y 20 cm de longitud. En funcionamiento normal se genera por fricción $10^4 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h} \cdot \text{m}^2} \right)$ sobre la superficie lateral del cilindro.

La superficie lateral está prácticamente aislada mientras que las superficies que constituyen las bases del cilindro pierden calor al exterior con un coeficiente de $20 \text{ (Kcal/hm}^2\text{°C)}$. Se desea conocer la distribución de temperaturas en el cilindro en los siguientes casos:

a) Régimen estacionario.

b) Situación transitoria por frenado de la rueda produciendo sobre la superficie del eje un flujo térmico constante de $5 \cdot 10^5 \text{ (Kcal/hm}^2\text{)}$ durante 10 segundos

Datos: $k = 15 \text{ (Kcal/hm°C)}$ $\rho = 7800 \text{ (Kg/m}^3\text{)}$ $c_p = 0,14 \text{ (Kcal/Kg°C)}$

Solución:

a) La generación en la superficie del cilindro en régimen estacionario es la correspondiente al ejemplo 8,5-2 con $a_r = 0$ y ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

$$T(r, z) = \frac{2Q}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{\xi_i^2 J_0(\xi_i R)}$$

y para la temperatura en función de r, z véase 6,6-2,

$$T(r, z) = \frac{4Q}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_2 J_0(\xi_i r) \cos(\eta_j z)}{\sigma^2 J_0(\xi_i R) [L_2(\eta_j^2 + a_2^2) + a_2] \cos(\eta_j L_2)}$$

donde $\sigma^2 = \xi_i^2 + \eta_j^2$ $\eta_j \operatorname{tg}(\eta_j L_2) = a_2 = \frac{h_2}{k} = 1,33$

Por las tablas I-3(3) y I-3(5) del Apéndice I

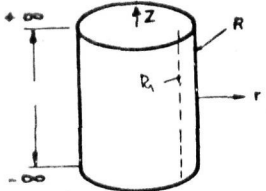
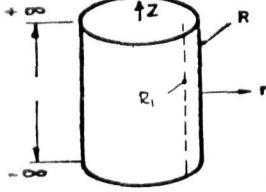
$$R \xi_1 = 3,83 \quad R \xi_2 = 7,01 \quad R \xi_3 = 10,17 \quad R \xi_4 = 13,32$$

$$L_2 a_2 = 0,133$$

$$\eta_1 L_2 = 0,35 \quad \eta_2 L_2 = 3,18 \quad \eta_3 L_2 = 6,30 \quad \eta_4 L_2 = 9,43$$

Para el caso particular $z = 0$ $r = R$

$$T(5 \cdot 10^{-2}, 0) = 4,5 \text{ (°C)}$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|--|---|---|
|  <p>Fig. 8,5-1</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T=0 \quad r=R \quad z > 0$ $Q \quad r=R \quad z > 0$ | $T(r,z) = \frac{2\alpha Q_1 R_1}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i R)}{J_1^2(\xi_i R)} J_0(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ <p>ξ_i raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$</p> |
|  <p>Fig. 8,5-2</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} + a_r T = 0, \quad r=R \quad z > 0$ $Q \quad r=R_1 \quad z > 0$ $a_r = \frac{hr}{k}$ | $T(r,z) = \frac{2\alpha Q R_1}{kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i R_1) J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + a_r^2) J_0^2(\xi_i R)} \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ <p>ξ_i raíces de $\xi_i J_1(\xi_i R) = a_r J_0(\xi_i R)$</p> |

b) En régimen transitorio con Q función del tiempo, $Q(\tau) = Q\tau$, la ecuación anterior se transforma en

$$T(r, z, \tau) = \frac{4Q}{kR} \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^4 \frac{J_0(\xi_i r) \cos(\eta_j z)}{6^2 J_0(\xi_i R) [L_2(\eta_j^2 + \alpha_i^2) + \alpha_i^2] \cos(\eta_j L_2)} \left[\tau - \frac{1}{\alpha_i^2} (1 - \exp(-\alpha_i^2 \tau)) \right]$$

donde τ_i se extiende de cero a 10 segundos.

La situación más desfavorable se produce a los 15 segundos en la zona menos refrigerada, es decir $r=R$ $z=0$

$$T(R, 0, 15s) \approx \frac{4,5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^4} = 562 (^\circ C)$$

asi pues el material se afecta notablemente dado que las temperaturas máximas son del orden de $300^\circ C$.

8,6-1. *Tubo infinito con manantiales instantáneos, manantiales continuos y convección.*

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(r-R) \delta(\tau) \quad (1)$$

donde δ son las funciones delta de Dirac. Con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & R_0 < r < R_e & \tau < 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} - \alpha_r T = 0 & r = R_0 & \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0 & r = R_e & \tau > 0 \end{array} \quad (2)$$

Q en la superficie lateral $r=R_1$ $\tau > 0$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel de grado cero en forma análoga a los apartados de tubos según las consideraciones del Apéndice I-3

$$-\xi^2 \bar{f}_{H,0}(\xi, \tau) = \frac{d\bar{f}_{H,0}}{d\tau} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{Q}{k} \int_{R_0}^{R_e} \delta(r-R) \delta(\tau) C_0(\xi; r) dr \quad (3)$$

donde

$$-\frac{Q}{k} \int_{R_0}^{R_1} \delta(r-R_1) \delta(\tau) J_0(\xi_i r) dr = -\frac{Q}{k} C_0(\xi_i R_1) \delta(\tau)$$

donde

$$C_0(\xi_i r) = R_1 [J_0(\xi_i R_1) Y_0'(\xi_i R_2) - Y_0(\xi_i R_1) J_0'(\xi_i R_2)]$$

y la ec. (3) toma la forma

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_{H,0}}{d\tau} - \frac{Q}{k} C_0(\xi_i R_1) \delta(\tau) \quad (4)$$

Resolviendo la ec. (4) con $T=0$ en $\tau=0$ y si $L[\delta(\tau)] = 1$

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \alpha \frac{Q}{k} C_0(\xi_i R_1) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (5)$$

y sustituyendo (5) en la ecuación de la inversión, Apéndice I-3 ec. (44)

$$T(r, \tau) = \frac{\alpha \pi Q^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_0(\xi_i R_1) \xi_i^2 [J_0'(\xi_i R_0) - \alpha r J_0(\xi_i R_0)]^2 C_0(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)}{[\xi_i J_0'(\xi_i R_0) - \alpha r J_0(\xi_i R_0)]^2 J_0'^2(\xi_i R_0) (\alpha r^2 + \xi_i^2)} \quad (6)$$

donde ξ_i son las raíces positivas de

$$J_0'(\xi_i R_0) [\xi_i Y_0'(\xi_i R_0) - \alpha r Y_0(\xi_i R_0)] = Y_0'(\xi_i R_0) [\xi_i J_0'(\xi_i R_0) - \alpha r J_0(\xi_i R_0)]$$

a) Para manantiales continuos la ec. (1) toma la forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q(\tau)}{k} \delta(r-R_1) \quad (7)$$

y la solución (5)

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, \tau) = \frac{\alpha}{k} C_0(\xi_i R_1) L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right] \quad (8)$$

y la solución

$$T(r, \tau) = \left[\text{ec. (6) sustituyendo el valor de } \bar{f}_{H,0} \text{ por la ec. (8)} \right]$$

b) En forma análoga para distintas condiciones se obtienen los resultados indicados en las Fig. (b) y (c) de la tabla 8,6-1.

Ejemplo 8,6-1.

La fabricación de tuberías por extrusión tiene lugar con generación de calor en las superficies interior y exterior de los tubos, por fricción con los elementos de la máquina de extrusión. En materiales orgánicos, conocidos como plásticos, es frecuente que el calentamiento, origina un aumento de temperatura suficiente para trabajar en condiciones óptimas sin que sea necesario calentamiento exterior. Se desea conocer el tiempo de contacto para que el tubo alcance una temperatura T_1 en las siguientes condiciones.

- a) Calentamiento adiabático en la superficie del tubo con un flujo térmico de Q_1 ($\text{kcal}/\text{h m}^2$)
- b) El mismo valor de Q_1 con la superficie interior adiabática y la exterior refrigerada con un coeficiente h ($\text{kcal}/\text{h m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$) de convección-radiación al exterior.

Datos: k, ρ, c_p R_e , radio exterior
 del tubo, R_o , radio interior del tubo.

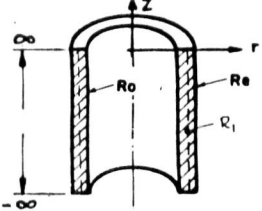
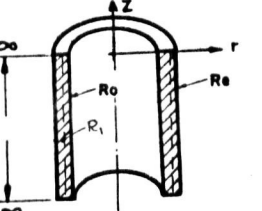
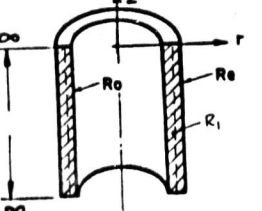
Solución:

- a) El problema puede tratarse como un tubo infinito que en una zona genera calor en las superficies externa e interna admitiendo que el efecto del resto de tubo es despreciable. Aplicando el método de superposición, la temperatura en un punto r tal que $R_o < r < R_e$ es la suma de las temperaturas debidas a la generación de calor en las superficies interna y externa consideradas independientes, es decir $T_1(r, \tau) = T_o(r, \tau) + T_e(r, \tau)$ como la generación de calor es adiabática, en la ec. 8,6-1(6) $q_r = 0$ y la superficie generadora de calor $R_i = R_o$ y $R_i = R_e$ y las raíces ξ_i son las mismas, cumpliendo la ecuación

$$J_0'(\xi_i R_e) Y_0'(\xi_i R_o) = Y_0'(\xi_i R_e) J_0'(\xi_i R_o)$$

o

$$J_1(\xi_i R_e) Y_1(\xi_i R_o) = Y_1(\xi_i R_e) J_1(\xi_i R_o)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|---|
|  | $T=0 \quad R_0 < r < R_e \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_e \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_r T \quad r = R_0 \quad z > 0$ $Q \quad r = R_i \quad z > 0$ | $T(r, z) = \frac{\alpha Q \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_0(\xi_i, R_e) \xi_i^2 [J_0'(\xi_i, R_0) - a_r J_0(\xi_i, R_0)]^2 C_0(\xi_i, r)}{[\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) - a_r J_0(\xi_i, R_0)]^2 - J_0'^2(\xi_i, R_e) [a_r^2 + \xi_i^2]} \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ <p>ξ_i raíces de</p> $J_0'(\xi_i, R_e) [\xi_i Y_0'(\xi_i, R_0) - a_r Y_0(\xi_i, R_0)] = Y_0'(\xi_i, R_e) [\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) - a_r J_0(\xi_i, R_0)]$ $C_0(\xi_i, R_i) = R_i [J_0(\xi_i, R_i) Y_0'(\xi_i, R_e) - Y_0(\xi_i, R_i) J_0'(\xi_i, R_e)]$ $C_0(\xi_i, r) = J_0(\xi_i, r) Y_0'(\xi_i, R_e) - Y_0(\xi_i, r) J_0'(\xi_i, R_e)$ |
|  | $T=0 \quad R_0 < r < R_e \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_0 \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r = R_e \quad z > 0$ $Q \quad r = R_i \quad z > 0$ | $T(r, z) = \frac{\alpha Q \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_0(\xi_i, R_e) \xi_i^2 [J_0'(\xi_i, R_e) + a_r J_0(\xi_i, R_e)]^2 C_0(\xi_i, r)}{[J_0'(\xi_i, R_0)]^2 [a_r^2 + \xi_i^2] - [\xi_i J_0'(\xi_i, R_e) + a_r J_0(\xi_i, R_e)]^2} \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ <p>ξ_i raíces de</p> $Y_0'(\xi_i, R_0) [\xi_i J_0'(\xi_i, R_e) + a_r J_0(\xi_i, R_e)] = J_0'(\xi_i, R_e) [\xi_i Y_0'(\xi_i, R_0) + a_r Y_0(\xi_i, R_0)]$ $C_0(\xi_i, R_i) = R_i [J_0(\xi_i, R_i) Y_0(\xi_i, R_0) - J_0'(\xi_i, R_0) Y_0(\xi_i, R_i)]$ $C_0(\xi_i, r) = J_0(\xi_i, r) Y_0'(\xi_i, R_0) - J_0'(\xi_i, R_0) Y_0(\xi_i, r)$ |
|  | $T=0 \quad R_0 < r < R_e \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -b_1 T \quad r = R_0 \quad z > 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = a_1 T \quad r = R_e \quad z > 0$ $Q \quad r = R_i \quad z > 0$ | $T(r, z) = \frac{\alpha Q \pi^2}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J_0'(\xi_i, R_e) + a_1 J_0(\xi_i, R_e)]^2 C_0(\xi_i, r) \exp(-\alpha \xi_i^2 z)}{[(a_1^2 + \xi_i^2) [\xi_i J_0'(\xi_i, R_0) - b_1 J_0(\xi_i, R_0)]^2 - (\xi_i^2 + \xi_i^2) [\xi_i J_0'(\xi_i, R_e) + a_1 J_0(\xi_i, R_e)]^2 }$ |

En la tabla I-3(a) Apéndice se indican los valores de ξ_i en función de R_e/R_o

Con estas consideraciones las temperaturas $T_o(r, \tau)$ y $T_e(r, \tau)$ indicadas en las ecuaciones de las figuras 8,6-1 y 8,6-1(a) toman la forma

$$T_1(r, \tau) = T_o(r, \tau) + T_e(r, \tau) = \frac{\pi^2 Q}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[J_o'^2(\xi_i R_o) C_o(\xi_i r) + C_o(\xi_i R_e)]}{\xi_i^2 [J_o'^2(\xi_i R_o) - J_o'^2(\xi_i R_e)]} \cdot C_o^*(\xi_i r) C_o(\xi_i R_e) \left[\tau - \frac{1}{\alpha \xi_i^2} (1 - \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau)) \right]$$

donde $C_o^*(\xi_i r) = C_o(\xi_i r)$ de la ecuación Fig. 8,6-1(a)

Para tiempos dados τ se tienen las temperaturas en función del radio, y en particular para el punto de menor temperatura que debe corresponder a la temperatura impuesta al material.

b) Procediendo en forma análoga al caso a) se tiene

$$T_1(r, \tau) = T_o(r, \tau) + T_e(r, \tau)$$

donde $T_o(r, \tau)$ es la misma que en el caso b) mientras que $T_e(r, \tau)$ viene dada por la ecuación correspondiente a la Fig. 8.6-1(a) siendo las raíces distintas a las de $T_o(r, \tau)$ y calculadas como en los casos de tubos de los capítulos anteriores. El valor de $C_o(\xi_i R_e)$ se sustituye por $C_o(\xi_i R_e)$

8,7-1. Esfera con manantiales instantáneos y manantiales continuos

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(r-R_i) \delta(\tau) \quad (1)$$

con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & 0 < r < R & \tau < 0 \\ T=0 & r=R_o & \tau > 0 \end{array}$$

Q manantial instantáneo en la superficie $r=R_1$

La ec. (1) puede escribirse

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) = \frac{r}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{rQ}{k} \delta(r-R_1) \delta(\tau) \quad (2)$$

aplicando a la ec. (2) la transformada finita del seno de Fourier

$$-\xi^2 \bar{T}_F(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_F}{d\tau} - \frac{QR_1}{k} \sin(\xi R_1) \delta(\tau) \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi r)}{r} \bar{T}_F(\xi, \tau) \quad (4)$$

donde $\xi = \frac{\pi m}{R}$

Resolviendo la ec. (3) por transformadas de Laplace y teniendo en cuenta que $L[\delta(\tau)] = 1$ y que $T=0$ en $\tau=0$

$$\bar{T}_F(\xi, \tau) = \frac{\alpha Q}{k} R_1 \sin(\xi R_1) \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \quad (5)$$

y sustituyendo en (4)

$$T(r, \tau) = \frac{2\alpha QR_1}{kR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi R_1)}{r} \sin(\xi r) \exp(-\alpha \xi^2 \tau) \quad (6)$$

a) Para manantiales continuos la ecuación (3) toma la forma

$$-\xi^2 \bar{T}_F(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_F}{d\tau} - \frac{R_1}{k} \sin(\xi R_1) Q(\tau)$$

$$\bar{T}_F(\xi, \tau) = L^{-1} \left[\frac{R_1 \alpha}{k} \sin(\xi R_1) \frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \xi^2} \right] = A, L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \xi^2} \right] \quad (7)$$

$$T(r, \tau) = \{ \text{Ec. (4) sustituyendo } \bar{T}_F \text{ por la ec. (7)} \}$$

8,7-2. Esfera con manantiales instantáneos y manantiales continuos, con convección.

Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(r-R_1) \delta(\tau) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) = \frac{r}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Qr}{k} \delta(r-R_1) \delta(\tau)$$

Con las condiciones

$$\begin{array}{lll} T=0 & 0 < r < R & \tau < 0 \\ \frac{\partial T}{\partial r} + a_r T = 0 & r = R_0 & \tau > 0 \end{array} \quad (2)$$

Q manantial en la superficie esférica $r=R_1$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del seno de Fourier como en el apartado 5,8-2 y teniendo en cuenta las propiedades de la función delta

$$-\xi_i^2 \bar{T}_F^s(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_F^s}{d\tau} - \frac{Q R_1}{k} \operatorname{sen}(\xi_i R_1) \delta(\tau) \quad (3)$$

con la inversión

$$T(r, \tau) = \frac{2}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[(a_r R - 1)^2 + R^2 \xi_i^2] \operatorname{sen}(\xi_i r) \bar{T}_F^s(\xi_i, \tau)}{r [(R \xi_i)^2 + a_r R (a_r R - 1)]} \quad (4)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) + a_r R - 1 = 0$
(Apéndice I, tabla I-3(6)).

Resolviendo (3) para $T=0$ $\tau=0$ y si $L[\delta(\tau)] = 1$

$$\bar{T}_F^s(\xi_i, \tau) = \frac{Q \alpha R_1}{k} \operatorname{sen}(\xi_i R_1) \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (5)$$

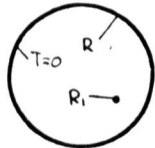
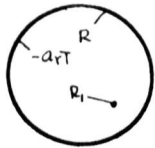
y sustituyendo en (4)

$$T(r, \tau) = \frac{2 \alpha Q R_1}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[(a_r R - 1)^2 + \xi_i^2 R^2] \operatorname{sen}(\xi_i R) \operatorname{sen}(\xi_i r)}{r [\xi_i^2 R^2 + a_r R (a_r R - 1)]} \exp(-\alpha \xi_i^2 \tau) \quad (6)$$

a) Con manantiales continuos la ec. (3) toma la forma

$$-\xi_i \bar{T}_F^s(\xi_i, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{T}_F^s}{d\tau} - \frac{R_1 Q(\tau)}{k} \operatorname{sen}(\xi_i R_1) \quad (7)$$

$$\bar{T}_F^s(\xi_i, \tau) = -\frac{R_1}{k} \operatorname{sen}(\xi_i R_1) L^{-1} \left[\frac{L[Q(\tau)]}{s + \alpha \xi_i^2} \right] \quad (8)$$

| Forma | Condiciones de contorno | Distribución de temperaturas |
|---|--|--|
|  <p>Fig. 8,7-1</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $T=0 \quad r=R \quad z > 0$ $Q \quad r=R_1 \quad z > 0$ | $T(r,z) = \frac{2\alpha Q R_1}{k R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi_m R_1)}{r} \sin(\xi_m r) \exp(-\alpha \xi_m^2 z)$ $\xi_m = \frac{\pi m}{R}$ |
|  <p>Fig. 8,7-2</p> | $T=0 \quad 0 < r < R \quad z < 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = -a_r T \quad r=R \quad z > 0$ $Q \quad r=R_1 \quad z > 0$ $a_r = \frac{hr}{k}$ | $T(r,z) = \frac{2\alpha Q R_1}{k R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[a_r R - 1]^2 + R^2 \xi_i^2}{[\xi_i^2 R^2 + a_r R(a_r R - 1)] r} \sin(\xi_i R_1) \sin(\xi_i r) \exp(-\alpha \xi_i^2 z)$ <p>Si raíces de $\xi_i R \operatorname{ctg}(\xi_i R) + a_r R - 1 = 0$</p> |

$$T(r, z) = [E_c(4) \text{ sustituyendo } \bar{f}_F^s \text{ por la ec. (8)}] \quad (9)$$

8.8. MANANTIALES GENERADORES DE CALOR EN MOVIMIENTO.

8,8-1. Sólido infinito

Consideremos un manantial puntual Q que se mueve en un sólido infinito en la dirección del eje z con una velocidad v que pasa por el punto $x=L_x$. La ecuación diferencial del sistema toma la forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x-L_x) \delta(y-L_y) \delta(z-v\tau) \quad (1)$$

donde δ son las funciones delta de Dirac.

Si inicialmente el sólido se encuentra a temperatura cero

$$T=0 \quad \text{en} \quad \begin{aligned} -\infty < x < \infty & \quad \tau < 0 \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada de Fourier, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-L_x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ -\xi^2 f_F(\xi, \eta, z, \tau) + \frac{\partial^2 f_F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_F}{\partial z^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_F}{\partial \tau} - \frac{Q}{k\sqrt{2\pi}} \delta(y-L_y) \delta(z-v\tau) \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando a la ec. (3) nuevamente la transformada de Fourier

$$-(\xi^2 + \eta^2) f_F(\xi, \eta, z, \tau) + \frac{\partial^2 f_F}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_F}{\partial \tau} - \frac{Q}{2\pi k} \delta(z-v\tau) \quad (4)$$

Y aplicando a la ec. (4) la transformada de Fourier, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\tau z) \delta(z-v\tau) dz &= \exp(i\tau v\tau) \\ -(\xi^2 + \eta^2 + \tau^2) f_{F''}(\xi, \eta, \tau, \tau) &= \frac{1}{\alpha} \frac{df_{F''}}{d\tau} - \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} k} \exp(i\tau v\tau) \end{aligned} \quad (5)$$

Resolviendo la ec. (5) por transformación de Laplace

$$f(s)(s + \alpha \mu^2) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} k} \cdot \frac{1}{s - i\gamma v}$$

y por la convolución de Laplace

$$f_{F1}(\xi, \eta, r, z) = \frac{\alpha Q}{(2\pi)^{3/2} k} \int_0^{\tau} \exp(-\alpha \mu^2(\tau - \tau^*)) \exp(i\gamma v \tau^*) d\tau^* \quad (6)$$

Por la inversión de f_{F1}

$$f_{F1}(\xi, \eta, z, \tau) = \frac{\alpha Q}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha \gamma^2(\tau - \tau^*)) \cdot \exp(-i\gamma(z - v\tau)) d\gamma \cdot \int_0^{\tau} \exp(-\alpha(\xi^2 + \eta^2)(\tau - \tau^*)) d\tau^* \quad (7)$$

y si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-a x^2 + b x + c] dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}\right]$$

o bien por las tablas del Apéndice I-2(1)13

$$f_{F1}(\xi, \eta, z, \tau) = \frac{\alpha Q}{8k(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha(\tau - \tau^*)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[i^2 \frac{z - v(\tau - \tau^*)^2}{4\alpha(\tau - \tau^*)}\right] \int_0^{\tau} \exp(-\alpha(\xi^2 + \eta^2)(\tau - \tau^*)) d\tau^* \quad (8)$$

y en forma análoga para las inversiones de las ec. (4) y (3)

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{\alpha Q}{8k(\alpha\pi)^{3/2}} \int_0^{\tau} \exp\left[-\frac{(x - Lx)^2 + (y - Ly)^2 + (z - v(\tau - \tau^*))^2}{4\alpha(\tau - \tau^*)}\right] \cdot \frac{d\tau^*}{(\tau - \tau^*)^{3/2}} \quad (9)$$

en particular si $Lx = Ly = 0$ $\tau^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$T(r, \tau) = \frac{\alpha Q}{8k(\alpha\pi)^{3/2}} \int_0^{\tau} \frac{\exp(vz/2\alpha) \exp[-(r^2 - v^2(\tau - \tau^*)^2)/4\alpha(\tau - \tau^*)]}{(\tau - \tau^*)^{3/2}} d\tau^* \quad (10)$$

La ec. (10) puede obtenerse directamente por el teorema de Duhamel o convolución de Laplace de las funciones de la ec. 8,1-1 (13).

Haciendo las transformaciones como en el apartado 7,1-1

$$\tau - \tau^* = \frac{r^2}{4\alpha d\xi}$$

con los límites $\xi = \frac{r}{2\sqrt{\alpha\tau}}$

para $\tau^* = 0$

y ∞ para $\tau^* = \tau$

$$T(r, \tau) = \frac{Q}{2rk(\pi)^{3/2}} \int_{r/2\sqrt{\alpha\tau}}^{\infty} \exp(VZ/2\alpha) \exp(-\xi^2 - (Vr/4\alpha\xi)^2) d\xi \quad (11)$$

En régimen estacionario $\tau \rightarrow \infty$ y la ecuación (11) se transforma en

$$T(r) = \frac{Q_1}{4k\pi r} \exp[-V(r-Z)/2\alpha] \quad (12)$$

a) Si el manantial se extiende a todo el eje Y , la ecuación es de acuerdo con 8,1-1(14) y la convolución de Laplace

$$T(x, z, \tau) = \frac{Q}{4\pi\alpha g_c p} \int_0^{\tau} \frac{\exp(VZ/2\alpha) \exp[-(x^2+z^2) - V^2(\tau-\tau^*)^2/4\alpha(\tau-\tau^*)]}{(\tau-\tau^*)} d\tau^*$$

y para régimen estacionario $\tau \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} T(x, z) &= \frac{2Q}{4\pi\alpha g_c p} \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{VZ}{2\alpha}\right) \exp\left[-\sqrt{x^2+z^2}\left(\xi + \left(\frac{V}{4\alpha}\right)^2 \frac{1}{\xi}\right)\right] \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \frac{Q}{2\pi k} \exp\left(\frac{VZ}{2\alpha}\right) \cdot K_0\left(\frac{V\sqrt{x^2+z^2}}{2\alpha}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

b) Si el manantial es un plano que se mueve en la dirección Z por la ecuación 8,1-1(15)

$$T(z, \tau) = \frac{Q}{\sqrt{\pi\alpha} g_c p} \int_0^{\tau} \frac{\exp(VZ/2\alpha)}{\sqrt{\tau-\tau^*}} \exp\left[-\frac{z^2}{4\alpha(\tau-\tau^*)} + \frac{V^2}{4\alpha}(\tau-\tau^*)\right] d\tau^*$$

Haciendo el cambio $\sqrt{\tau-\tau^*} = \frac{Z}{\sqrt{4\alpha}\xi}$ para $\tau = \infty$

$$T(z) = \frac{Q}{\sqrt{\pi\alpha} g_c p} \frac{Z}{2\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{\exp(VZ/2\alpha)}{\xi^2} \cdot \exp\left[-\xi^2 + \left(\frac{VZ}{4\alpha}\right)^2 \frac{1}{\xi^2}\right] d\xi = \frac{Q}{g_c p V} \quad (14)$$

y para valores de z negativos

$$T(z) = \frac{Q}{g_c p V} \exp\left(\frac{VZ}{\alpha}\right) \quad (15)$$

Ejemplo 8,8-1.

Dos bloques de acero inicialmente a 0°C y yuxtapuestos en un plano paralelo al eje z , se calientan por la línea del plano de unión $x=0$ $y=0$ $z=z$ con un manantial que genera $1(\text{kcal/s})$ y que se mueve con una velocidad de 5 cm/minuto . Si el material funde a 1500°C se desea conocer

- Dimensiones aproximadas de la soldadura si el manantial se supone puntual.
- Idem si el manantial se considera como una línea perpendicular al eje z de 4 mm de longitud.
- Idem si la temperatura inicial de los bloques es de 200°C .

Datos: $k = 15 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^{\circ}\text{C}} \right)$ $\rho = 7800 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$ $C_p = 0,12 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}} \right)$

Solución:

- Por integración de la ec.8,8-1(11) se tiene

$$T(r, z) = \frac{Q}{4\pi k r} \left[\text{erfc} \left(\frac{r - V_z \tau}{2\sqrt{\alpha \tau}} \right) + \exp \left(\frac{V_z^2}{\alpha} \right) \text{erfc} \left(\frac{r + V_z \tau}{2\sqrt{\alpha \tau}} \right) \right]$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $Q = 2 \left(\frac{\text{kcal}}{\text{s}} \right)$ $V_z = \frac{5}{6} \cdot 10^{-3} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$ $\alpha = 4,44 \cdot 10^{-6} (\text{m}^2/\text{s})$

Dando valores a r y se tienen las temperaturas en distintas posiciones. Así, para $x=y=z = 5 \cdot 10^{-3} (\text{m})$ $r = 0,86 \cdot 10^{-2} (\text{m})$, $\tau = 6 (\text{s})$

$$\frac{r - V_z \tau}{2\sqrt{\alpha \tau}} = 0,35 \quad \frac{r + V_z \tau}{2\sqrt{\alpha \tau}} = 1,32 \quad \exp \frac{5/6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{4,44 \cdot 10^{-6}} = 2,55$$

Por la tabla I-6 apéndice 1

$$\text{ferc}(0,35) = 1 - \text{fer}(0,35) = 0,52 \quad \text{ferc}(1,32) = 0,07$$

y sustituyendo en la ecuación primera

$$T = \frac{1 \cdot 3600 \cdot 10^2}{4\pi \cdot 15 \cdot 0,86} [0,52 + 2,55 \cdot 0,07] = 1554 (^{\circ}\text{C})$$

es decir que la zona de soldadura es un semicilindro de 5 mm de radio.

En régimen estacionario y para $x=y=z = 5 \cdot 10^{-3} (m)$

$$T = \frac{3600 \cdot 10^2}{4\pi \cdot 15.086} \exp\left[-\sqrt{2}(r-z)/2\alpha\right] = 2220 \exp\left[-\frac{5}{2} \cdot \frac{3.6}{2 \cdot 4.44}\right] = 1583 (^\circ C)$$

como puede observarse el aumento de temperatura es debido a la mayor temperatura de la masa del bloque.

b) La ecuación 8,8-1(13) en régimen no estacionario vale

$$T = \frac{Q}{4\pi k} \int_{-y_1}^{+y_1} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{x^2+z^2+(y-y_1)^2} - \sqrt{2}\tau}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) \left(1 + \exp \frac{\sqrt{2}\tau}{\alpha} \right) \frac{dy}{\sqrt{x^2+(y-y_1)^2+z^2}} \right]$$

y para régimen estacionario

$$T = \frac{Q}{4\pi k} \int_{-y_1}^{y_1} \frac{\exp\left[-\sqrt{2}(\sqrt{x^2+z^2+(y-y_1)^2} - z)\right]}{\sqrt{x^2+(y-y_1)^2+z^2}} dy_1$$

c) Las ecuaciones anteriores aumentan en 200°C extendiéndose la zona de soldadura.

8,8-2. Pared plana

Un manantial puntual de Q (Kcal/h) que se mueve en la dirección x con una velocidad V_x en la superficie de una pared de espesor L_y cumple la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x-V_x\tau) \delta(z) \delta(y) \quad (1)$$

donde δ son las funciones de Dirac. Con las condiciones

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad y=0 \quad y=L_y,$$

$$\begin{array}{lll} T=0 & 0 < x < \infty & \tau=0 \\ & 0 < y < \infty & \tau=0 \\ & 0 < z < \infty & \tau=0 \end{array} \quad (2)$$

es decir, las dos caras de la pared son adiabáticas.

Aplicando a la ec. (1) la transformada de Fourier respecto a z

$$-v^2 f_F(\xi, y, z, \tau) + \frac{\partial^2 f_F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_F}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_F}{\partial \tau} - \frac{Q}{k(2\pi)^{3/2}} \exp(i\xi v \tau) \delta(y-L_y) \quad (3)$$

Aplicando a (3) la transformada de Fourier y teniendo en cuenta 8,10-1(5)

$$-(\xi^2 + v^2) f_F(\xi, \eta, z, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_F}{\partial \tau} - \frac{Q}{k(2\pi)^{3/2}} \exp(i\xi v \tau) \quad (4)$$

Aplicando a (4) la transformada finita del coseno de Fourier

$$-(\xi^2 + \eta^2 + v^2) \bar{f}_F^c(\xi, \eta, \tau, z) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^c}{\partial \tau} - \frac{Q}{k(2\pi)^{3/2}} \exp(i\xi v \tau) \quad (5)$$

puesto que

$$\int_0^{L_y} \delta(y-L_y) \cos(\eta y) dy = 1$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^c(\xi, \eta, \tau, z) = \frac{1}{L_y} \left(\bar{f}_F^c(0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\eta y) \bar{f}_F^c(\xi, \eta, \tau, z) \right) \quad (6)$$

Resolviendo (5) por transformadas de Laplace

$$f(s) (s + \alpha \mu^2) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} k} \frac{1}{(s - i\xi v)}$$

y por la convolución de Laplace

$$\bar{f}_F^c(\xi, \eta, \tau, z) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} k} \int_0^{\tau} \exp[-\alpha \mu^2(\tau - \tau^*)] \exp(i\xi v \tau^*) d\tau^* \quad (7)$$

Por la inversión (6)

$$f_{F1}(\xi, \eta, \tau, z) = \frac{Q}{(2\pi)^{3/2} k_L y} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\eta y) \int_0^{\tau} \exp[-d \mu^2 (\tau - \tau^*)] \exp(i \xi v \tau^*) d\tau^* \right] \quad (8)$$

y por las inversiones correspondientes a f_F y f_F de acuerdo con el apartado 8,8-1

$$T(\eta, z, \tau) = \frac{Q}{4\pi k_L y} \int_0^{\tau} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\eta y) \exp(-d \eta^2 (\tau - \tau^*)) \right] \cdot \exp\left(-\frac{z^2 - (x - v_x(\tau - \tau^*))^2}{4d(\tau - \tau^*)}\right) \cdot \frac{d\tau^*}{(\tau - \tau^*)} \quad (9)$$

En régimen estacionario $\tau \rightarrow \infty$ y aplicando los resultados de las ecuaciones 8,8-1(12) y 8,8-1(13),

$$T(\eta, z) = \frac{Q}{2\pi k_L y} \left[K_0 \left(\frac{v_x \sqrt{x^2 + z^2}}{2d} \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_0 \left[v_x \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{2d} \left(1 + \left(\frac{2d\eta}{v_x} \right)^2 \right)^{1/2} \cos(\eta y) \right] \exp\left(\frac{v_x x}{2d}\right) \right] \quad (10)$$

donde $\eta = \frac{\pi m}{L_y}$

a) Si el manantial es una línea paralela al eje z por integración de (10) se tiene

$$T(x) = \frac{Q_1}{g \phi_L y v_x} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cos(\eta y)}{\left(1 + \left(\frac{2d\eta}{v_x} \right)^2 \right)^{1/2}} \exp \frac{v_x x}{2d} \left(1 - \left(1 + \left(\frac{2d\eta}{v_x} \right)^2 \right)^{1/2} \right) \right] \quad (11)$$

Ejemplo 8,8-2.

Una placa de espesor 0,1 mm se desea cortar en línea recta aplicando un haz de rayos laser con $Q = 0,032$ (Kcal/s). Se desea saber si para una velocidad del haz de 1 (mm/s) se produce el corte de la chapa.

Datos: $k = 70$ (Kcal/h m °C) $\rho = 10200$ (Kg/m³) $\phi = 0,08$ (Kcal/Kg °C)

Punto de fusión 2622°C.

Por integración de la ec. 8,8-2(9), en forma análoga al ejemplo 8,8-1

$$T(\eta, z, \tau) = \frac{Q}{4\pi k_L y} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z - v_x \tau}{2\sqrt{d\tau}}\right) + \exp\left(\frac{v_x x}{d}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z + v_x \tau}{2\sqrt{d\tau}}\right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\cos(\eta y) \cdot \right. \right]$$

$$\cdot \left(\operatorname{erfc} \frac{z - \tau \sqrt{v_x^2 + 4\alpha^2 \eta^2}}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) + \exp\left(\frac{v_x x}{\alpha}\right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z + \tau \sqrt{v_x^2 + 4\alpha^2 \eta^2}}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) \Bigg]$$

Dado que el espesor es muy pequeño, puede despreciarse la variación de T con y

$$T(z, \tau) = \frac{Q}{4\pi k L_y} \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{z - v_x \tau}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) + \exp\left(\frac{v_x x}{\alpha}\right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z + v_x \tau}{2\sqrt{\alpha\tau}} \right) \right)$$

Sustituyendo valores $z = 10^{-4}$ (m) $v_x = 10^{-4}$ (m/s) $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-5}$ (m²/s)
con tiempos inferiores a 1 s el paréntesis es aproximadamente 2, y

$$T = \frac{3,2 \cdot 10^{-2}}{2\pi \cdot 70} \cdot 10^4 \cdot 3,6 \cdot 10^3 = 2618 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

En régimen estacionario por la ec. 8,8-2(10) y despreciando los efectos sobre T en la dirección y

$$T = \frac{Q}{2\pi k L_y} k_0 (2,17 \cdot x) \exp(2,17x)$$

y así, para $x = 0,5$ (m)

$$T = 2618 k_0 (1,086) \exp(1,086) = 2932 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

8,8-3. Rectángulo.

Un manantial puntual de Q se mueve en la dirección x con la velocidad constante v_x . La distribución de temperaturas cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x - v_x \tau) \delta(y) \delta(z) \quad (1)$$

donde δ son las funciones de Dirac.

a) Para las condiciones

$$\begin{aligned} T=0 & \quad -\infty < x < \infty & 0 < y < L_y & 0 < z < L_z & \tau < 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 & \quad y=0, & y=L_y, & \frac{\partial T}{\partial z} = 0 & z=0 & z=L_z \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 & \quad x=L_x \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita del coseno de Fourier respecto a z

$$-V^2 \bar{f}_F^c(x, y, r, z) + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^c}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^c}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(y) \delta(x - V_x \tau) \quad (3)$$

con la inversión

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{\bar{f}_F^c(0)}{L_z} + \frac{2}{L_z} \sum_{p=1}^{\infty} \cos(rz) \bar{f}_F^c(x, y, r, \tau) \quad (4)$$

Aplicando a (3) la misma transformada respecto a y

$$-(r^2 + \eta^2) \bar{f}_F^{c'}(x, \eta, r, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_F^{c'}}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_F^{c'}}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(x - V_x \tau) \quad (5)$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^{c'}(x, y, r, \tau) = \frac{\bar{f}_F^{c'}(0)}{L_y} + \frac{2}{L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\eta y) \bar{f}_F^{c'}(x, \eta, r, \tau) \quad (6)$$

Aplicando a (5) la transformada de Fourier

$$-(\xi^2 + \eta^2 + r^2) f_F(\xi, \eta, r, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{df_F}{d\tau} - \frac{Q}{2\sqrt{\pi} \cdot k} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x) \delta(x - V_x \tau) dx \quad (7)$$

con la inversión

$$\bar{f}_F^{c'}(x, \eta, r, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi x) f_F(\xi, \eta, r, \tau) d\xi \quad (8)$$

Resolviendo (7) por transformación de Laplace

$$f(s) (s + \alpha \mu^2) = \frac{\alpha Q}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k(s - iV_x \xi)}$$

$$f(s) = \frac{\alpha Q}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} \exp[-\alpha \mu^2(\tau - \tau^*)] \exp(i\xi V_x \tau^*) d\tau^* \quad (9)$$

Sustituyendo en (8)

$$\bar{f}_F^{c'}(x, \eta, r, \tau) = \frac{\alpha Q}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi(x - V_x(\tau - \tau^*))) d\xi \int_0^{\tau} \exp(-\alpha \mu^2 \tau^*) d\tau^*$$

$$= \frac{\alpha Q}{2\pi k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{\tau} \exp\left(\frac{V_x x}{2\alpha}\right) \frac{\exp\left(-x^2 + \frac{V_x(\tau - \tau^*)^2}{4\alpha(\tau - \tau^*)}\right)}{(\tau - \tau^*)^{1/2}} \exp(-\alpha \mu^2 \tau^*) d\tau^* \quad (10)$$

y sustituyendo en las inversiones (6) y (4)

$$T(x, y, z) = \frac{\alpha Q}{2\pi k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \frac{1}{L_x L_y} \int_0^z \left[\left(1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos(\tau z) \exp(-\alpha \delta^2 \tau^*) \right) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\eta y) \cdot \exp(-\alpha \delta^2 \tau^*) \right) \right] \cdot \frac{\exp\left(\frac{V_x x}{2\alpha}\right)}{(\tau - \tau^*)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2 + V_x(\tau - \tau^*)^2}{4\alpha(\tau - \tau^*)}\right] d\tau^* \quad (11)$$

Teniendo en cuenta el desarrollo dado en 8,8-1(b) y para la dirección x , en régimen estacionario $\tau \rightarrow \infty$

$$T(x, y, z) = \frac{Q}{\alpha k V_x L_y L_z} \left[1 + \frac{2 V_x}{(\delta^2 + (V_x/2\alpha)^2)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\eta y) \exp\left(-x((\delta^2 + (V_x/2\alpha)^2)^{1/2} - (V_x/2\alpha))\right) \right] \left[1 + \frac{2 V_x}{(\delta^2 + (V_x/2\alpha)^2)^{1/2}} \sum_{p=1}^{\infty} \cos(\tau z) \exp\left(-x((\delta^2 + (V_x/2\alpha)^2)^{1/2} - (V_x/2\alpha))\right) \right] \quad (12)$$

8,8-4. Cilindro.

Un manantial de Q (m^3/s) se mueve en la dirección del eje z sobre la superficie lateral $r=R$ con una velocidad constante V_z . Cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} \delta(z - V_z \tau) \delta(r) \quad (1)$$

donde son las funciones de Dirac.

a) Para las condiciones

$$T=0 \quad 0 < z < \infty \quad 0 < r < R \quad \tau < 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\alpha r T \quad r=R \quad \tau > 0 \quad (2)$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel de grado cero teniendo en cuenta que

$$\int_0^R \frac{Q}{k} r J_0(\xi_i r) \delta(r) dr = \frac{Q}{k} R J_0(\xi_i R) \quad (3)$$

$$-\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) + \frac{\partial^2 \bar{f}_{H,0}}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{H,0}}{\partial \tau} - \frac{Q}{k} R J_0(\xi_i R) \quad (4)$$

Aplicando a (4) la transformada de Fourier

$$-(\xi_i^2 + \eta^2) \bar{f}_F(\xi_i, \eta, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{d \bar{f}_F}{d \tau} - \frac{Q}{k} \frac{R J_0(\xi_i R)}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\eta v_2 \tau) \quad (5)$$

Resolviendo la ec. (5)

$$\bar{f}_F(\xi_i, \eta, \tau) = \int_0^\tau \frac{\alpha Q R}{k \sqrt{2\pi}} J_0(\xi_i R) \exp[-\alpha(\xi_i^2 + \eta^2)(\tau - \tau^*)] \cdot \exp[-i\eta v_2(\tau - \tau^*)] d\tau^* \quad (6)$$

Por la inversión de Fourier

$$\bar{f}_{H,0}(\xi_i, z, \tau) = \frac{\alpha Q R J_0(\xi_i R)}{2 k \pi \sqrt{\alpha \pi}} \int_0^\tau \frac{\exp[-\alpha \xi_i^2(\tau - \tau^*) - (z - v_2(\tau - \tau^*))^2 / 4\alpha(\tau - \tau^*)]}{(\tau - \tau^*)^{1/2}} d\tau^* \quad (7)$$

Por la inversión de Hankel

$$T(r, z, \tau) = \frac{\alpha Q}{2\pi k R \sqrt{\alpha \pi}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + \alpha^2) J_0(\xi_i R)} \int_0^\tau \frac{\exp[-\alpha \xi_i^2(\tau - \tau^*) - (z - v_2(\tau - \tau^*))^2 / 4\alpha(\tau - \tau^*)]}{(\tau - \tau^*)^{1/2}} d\tau^* \quad (8)$$

En régimen estacionario $\tau \rightarrow \infty$

$$T(r, z) = \frac{Q}{2\pi k R \sqrt{\xi_i^2 + (\frac{v_2}{2\alpha})^2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i r)}{(\xi_i^2 + \alpha^2) J_0(\xi_i R)} \exp\left(-z \left(\sqrt{\xi_i^2 + \left(\frac{v_2}{2\alpha}\right)^2} - \frac{v_2}{2\alpha}\right)\right) \quad (9)$$

donde ξ_i son las raíces de $\xi_i J_1(\xi_i R) = \alpha r J_0(\xi_i R)$

b) Para $\alpha r = 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ en $r = R$ y la superficie exterior es adiabática y en las ecuaciones (9) y (10) ξ_i son las raíces de $J_1(\xi_i R) = 0$

Ejemplo 8,8-4.

Una barra de 2 cm de diámetro genera $10^6 \text{ (kcal/m}^3\text{)}$ en régimen estacionario con una temperatura en la superficie de 250°C . Repentinamente en las proximidades de la superficie se producen 115 (kcal/s.cm) en forma puntual y que se propaga en la dirección del eje z hasta una distancia de 1 cm y con una velocidad de 1 (cm/s) . Se desea conocer la distribución de temperaturas en las proximidades de la zona afectada por el régimen transitorio.

Datos: Los correspondientes al ejemplo 8,5-1 ;

Solución:

La situación más desfavorable corresponde al fenómeno considerado estacionario y adiabático. Por el método de superposición la temperatura en la barra es la suma de las temperaturas, en una determinada posición, de las correspondientes a regímenes estacionario y estacionario-adiabático.

Por la ec.8,8-4(a) con $\alpha_r=0$

$$T(r, z) = 250 + \frac{Q}{2\pi kR} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i R) (\xi_i^2 + \frac{V_z^2}{2\alpha})^{1/2}} \cdot \exp \left[-z \left(\sqrt{\xi_i^2 + \frac{V_z^2}{2\alpha}} - \frac{V_z}{2\alpha} \right) \right]$$

siendo ξ_i las raíces de $J_0'(\xi_i R) = 0$ dadas en la tabla I-3(3). Apéndice I

$$\xi_1 R = 3,82 \quad \xi_2 R = 7,01 \quad \xi_3 R = 10,17 \quad \xi_4 R = 13,32$$

En las distintas posiciones de z la más desfavorable corresponde a $z = 0$

$$T(r, 0) = \frac{115 \cdot 3600 \cdot 10^2}{2\pi} \sum_{i=1}^4 \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0(\xi_i R) \sqrt{\xi_i^2 + \frac{V_z^2}{2\alpha}}} + 250 \cdot \frac{10^6}{4} (R^2 - r^2)$$

Para las proximidades de la superficie $J_0(\xi_i r) \approx J_0(\xi_i R)$

$$T(r < R, 0) = 250 + 500 = 750 (^\circ\text{C})$$

8.9. CUERPOS EN MOVIMIENTO

8.9-1. Plano infinito en movimiento

Consideremos un plano que se mueve con una velocidad en la dirección perpendicular al eje x . Valores positivos de x corresponden a un aumento de volumen del cuerpo mientras que valores negativos corresponden a desaparición de volumen. Si la temperatura del plano en movimiento se mantiene constante T_0 mientras en el punto origen $T=0$ cumple la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{T}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - v_x \tau)] \quad (1)$$

donde δ es la función de Dirac.

Aplicando a la ecuación (1), la transformada de Fourier y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - a)] F(x) &= (-i) \frac{\partial F(a)}{\partial x} \\ L_F \left[\frac{\partial T(x)}{\partial x} \right] &= -i \xi f_F \end{aligned} \quad (2)$$

$$- \xi^2 f_F(\xi, \tau) = \frac{1}{\alpha} \frac{df_F}{d\tau} - \frac{i \xi T_0}{\alpha \sqrt{2\pi}} \exp(i \xi v_x \tau) \quad (3)$$

Resolviendo la ec. (3) por transformada de Laplace

$$f(s) (s + \alpha s^2) = - \frac{i \xi T_0}{\sqrt{2\pi} (s + i \xi v_x)}$$

y por la convolución de Laplace

$$f_F(\xi, \tau) = - \frac{i \xi T_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\tau \exp[-\alpha \xi^2 (\tau - \tau^*)] \exp[i \xi v_x (\tau - \tau^*)] d\tau^* \quad (4)$$

y por la inversión de Fourier

$$T(x, \tau) = - \frac{i \xi T_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\tau \exp[-\alpha \xi^2 (\tau - \tau^*)] \exp[-i \xi (x - v_x (\tau - \tau^*))] d\xi d\tau^*$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha \xi^2 (\tau - \tau^*)] \exp[-i \xi (x - v_x (\tau - \tau^*))] d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(\frac{v_x x}{2\alpha}\right) \exp\left[-\frac{x^2 - v_x^2 (\tau - \tau^*)^2}{4\alpha (\tau - \tau^*)}\right]$$

y por la ec. (2)

$$T(x, \tau) = \frac{T_0}{4\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}} \int_0^{\tau} x \exp\left(\frac{v_x x}{2\alpha}\right) \frac{\exp[-x^2 - v_x^2 (\tau - \tau^*)^2 / 4\alpha (\tau - \tau^*)]}{(\tau - \tau^*)^{3/2}} d\tau^* \quad (5)$$

$$= \frac{T_0}{2} \left[\operatorname{ferc}\left(\frac{x - v_x \tau}{2\sqrt{\alpha \tau}}\right) + \exp\left(\frac{v_x x}{\alpha}\right) \operatorname{ferc}\left(\frac{x + v_x \tau}{2\sqrt{\alpha \tau}}\right) \right] \quad (6)$$

a) En régimen estacionario $\tau \rightarrow \infty$ la ec. (5) toma la forma

$$T(x) = \frac{T_0}{\alpha \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{v_x x}{2\alpha}\right) \exp\left[-\xi^2 - \frac{(v_x x)^2}{(2\alpha \xi)^2}\right] d\xi$$

$$\text{y si } \int_0^{\infty} \exp[-a\xi^2 + b/\xi^2] d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-2\sqrt{ab})$$

$$T(x) = \frac{T_0}{\alpha} \exp\left(\frac{v_x x}{2\alpha}\right) \exp\left(-\frac{v_x x}{2\alpha}\right) = \frac{T_0}{\alpha} \quad (7)$$

y para valores negativos de v_x

$$T(x) = \frac{T_0}{\alpha} \exp\left(\frac{v_x x}{\alpha}\right) \quad (8)$$

b) Si en el cuerpo se genera calor o coexisten simultáneamente manantiales térmicos con el movimiento del sólido, la distribución de temperaturas se obtiene por superposición de las soluciones correspondientes consideradas aisladamente y para el mismo tiempo y posición.

Ejemplo 8,9-1.

Un bloque que puede considerarse como un sólido semiinfinito disminuye su espesor por sublimación en una corriente de gas que mantiene la superficie del bloque a 175°C . La velocidad de variación del espesor es 10 (cm/h) . Determinar la distribución de temperaturas si para $x \rightarrow \infty$ $T = 0 (^{\circ}\text{C})$

$$k = 0,1 \text{ (kcal/hm}^{\circ}\text{C)} \quad \rho = 900 \text{ (kg/m}^3\text{)} \quad C_p = 0,30 \text{ (kcal/kg}^{\circ}\text{C)}$$

Por la ec. 8,9-6

$$T(x, \tau) = \frac{175}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x - 0,1\tau}{2\sqrt{3,7 \cdot 10^{-3}\tau}} \right) + \exp(0,1x) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + 0,1\tau}{2\sqrt{3,7 \cdot 10^{-3}\tau}} \right) \right]$$

8,9-2. Plano finito en movimiento

El plano de dimensiones L_y, L_z se mueve con la velocidad V_x en la dirección del eje x . El paralelepípedo engendrado por el movimiento del plano aumenta o disminuye de volumen según sea la dirección de la velocidad. El sistema cumple la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta(x - V_x \tau) \right) \quad (1)$$

se pueden presentar las condiciones dadas en el caso de paralelepípedos.

a) Para las condiciones

$$\begin{aligned} T=0 & \quad -\infty < x < \infty & 0 < x < L_x & 0 < y < L_y & \tau < 0 \\ T=0 & \quad y=L_y & z=L_z & \tau > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y}=0 & \quad y=0 & \frac{\partial T}{\partial z}=0 & z=L_z & \tau > 0 \\ T=T_0 & \quad x-V\tau=0 \end{aligned} \quad (2)$$

Aplicando sucesivamente la transformada finita de Fourier a las direcciones z e y y la transformada de Fourier a la dirección x se tiene la ecuación

$$-(\xi^2 + \eta^2 + \tau^2) f_F(\xi, \eta, \tau, z) = \frac{1}{\alpha} \frac{df_F}{d\tau} - \frac{i\xi T_0}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp(i\xi\tau V_x) \quad (3)$$

Resolviendo la ec. (3)

$$f_F = -\frac{i \xi T_0}{4\sqrt{\pi} \alpha^{3/2}} \int_0^{\tau} \exp[-\alpha \mu^2(\tau-\tau^*)] \exp(i \xi V_x(\tau-\tau^*)) d\tau^* \quad (4)$$

Por la inversión de Fourier

$$f_F(\xi, \eta, \gamma, \tau) = \frac{T_0}{4\sqrt{\pi} \alpha^{3/2}} \int_0^{\tau} \frac{x \exp\left(\frac{V_x x}{2\alpha}\right) \exp\left(\frac{-x^2 - V_x^2(\tau-\tau^*)^2}{4\alpha(\tau-\tau^*)}\right) \exp(-\alpha \delta^2(\tau-\tau^*))}{(\tau-\tau^*)^{3/2}} d\tau^* \quad (5)$$

y por las inversiones de las transformadas finitas

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi} \alpha^{3/2} L_y L_z} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(\eta y) \sin(\gamma z)}{\eta \gamma} \cdot \int_0^{\tau} \frac{x \exp\left(-x - V_x(\tau-\tau^*)^2/4\alpha(\tau-\tau^*)\right) - \alpha \delta^2(\tau-\tau^*)}{(\tau-\tau^*)^{3/2}} d\tau^* \quad (6)$$

donde $\eta = \frac{\pi n}{y}$ $\gamma = \frac{\pi p}{L_z}$ $\delta^2 = \eta^2 + \gamma^2$

Haciendo el cambio de variables $\tau - \tau^* = \frac{x^2}{4\alpha \theta^2}$ la integral de (6) vale

$$\int_{x/2\sqrt{\alpha\tau}}^{\infty} 4\sqrt{\alpha} \exp\left[-\theta^2 - \left(\left(\frac{V_x}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{x\theta}{2}\right)^2\right) \frac{1}{\theta^2}\right] \exp\left(\frac{xV_x}{2\alpha}\right) d\theta$$

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{T_0}{\alpha L_y L_z} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(\eta y) \sin(\gamma z)}{\eta \gamma} \left[\operatorname{ferc}\left(\frac{x - (\tau V_x + x\theta/2)}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \exp\left(\frac{xV_x}{\alpha}\right) \operatorname{ferc}\left(\frac{x + \tau V_x + x\theta/2}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right) \right] \quad (7)$$

8,9-3. Plano circular en movimiento.

El plano de radio R se mueve con la velocidad V_z en la dirección de eje z . Siguiendo el mismo criterio del apartado 8,9-2; cumple la ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} + T \frac{\partial}{\partial x} [\delta(z - V_x \tau)] \quad (1)$$

a) Para las condiciones

$$\begin{aligned}
 T=0 & \quad 0 < r < R & -\infty < x < \infty & \quad z < 0 \\
 T=0 & \quad r=R & \quad z > 0 & \\
 T=T_0 & \quad z-V_z z=0 & &
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Aplicando a la ec. (1) la transformada finita de Hankel de grado cero y la transformada de Fourier

$$-(\xi^2 + \eta^2) \mathcal{L}_F(\xi, \eta, z) = \frac{1}{\alpha} \frac{d f_F}{dz} - \frac{i \xi T_0}{\alpha \sqrt{2\pi}} \exp(i \xi z V_z)
 \tag{3}$$

Por la inversión de Hankel y la inversión de Fourier

$$T(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} \int_0^z \frac{T_0}{4 \sqrt{\pi} \alpha^{3/2}} \frac{z \exp \left[-\frac{(z-V_z(z-\tau^*))^2}{4 \alpha (z-\tau^*)} - \alpha \xi_i^2 (z-\tau^*) \right]}{(z-\tau^*)^{3/2}} d\tau^*
 \tag{4}$$

donde ξ_i son las raíces de $J_0(\xi_i R) = 0$

Teniendo en cuenta el desarrollo de 8,9-2

$$T(r, z) = \frac{2 T_0}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_1(\xi_i R)} \left[\operatorname{ferc} \left(\frac{z - (V_z z + z \xi_i^2 / 2)}{2 \sqrt{\alpha z}} \right) + \exp \left(\frac{z V_z^2}{\alpha} \right) \operatorname{ferc} \left(\frac{z + V_z z + z \xi_i^2 / 2}{2 \sqrt{\alpha z}} \right) \right]
 \tag{5}$$

8.10. CUERPOS EN MOVIMIENTO CON CAMBIOS DE ESTADO

8.10.1. Plano infinito.

Consideremos un cuerpo en estado líquido a temperatura superior a la temperatura de fusión T_s que ocupa la región $-\infty < x < 0$ mientras que la región $0 < x < \infty$ está ocupada por cuerpo sólido de la misma sustancia.

La situación anterior se mantiene para $z < 0$. Para $z > 0$ la transmisión de calor de la región líquida 2 a la región

sólida 1 produce solidificación de una parte del líquido dando origen a un desplazamiento del plano infinito yz de la interfase sólido-líquido en la dirección positiva del eje ox

En la interfase se cumple

$$k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_x - k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_x = L \rho_2 \frac{dx(\tau)}{d\tau} \quad (1)$$

donde x corresponde a la posición de la interfase L , es el calor latente y ρ_2 la densidad del líquido. La ec.(1) es un balance de energía en un espesor dx del plano en movimiento.

Las ecuaciones de transmisión de calor en las regiones 1 sólido y 2 líquida toman la forma

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{\alpha_1} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{\partial T_2}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{\alpha_2} - \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \right) \frac{1}{\alpha_2} \frac{dx(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial x} [\tau \delta(x - v(\tau)\tau)] \quad (3)$$

donde $\delta(\)$ es la función δ de Dirac. La solución de (2) y (3) con la ec.(3) conducen a la solución del problema. Para ello hay que tener en cuenta la forma no lineal de la ecuación (3) y de la ec.(1) que en definitiva es el principio de superposición. Lo que implica la linealización de las expresiones de (1). En el capítulo 5 se han obtenido las expresiones de semejanza en régimen no estacionario

$$T(x, \tau) = T_0 F \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 \tau}} \right) = T_0 F \left(\frac{1}{2\sqrt{F_0}} \right)$$

donde F_0 es el número adimensional de Fourier = $\alpha_2 \tau / x^2$

Aplicando el criterio de semejanza si $\beta = \frac{x_1}{2\sqrt{\alpha_1 \tau}} = \frac{x_2}{2\sqrt{\alpha_1 \tau}}$

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \beta \sqrt{\frac{\alpha_1}{\tau}} \quad \text{y} \quad v(\tau) \tau = \beta \sqrt{\alpha_1 \tau}$$

Aplicando a la ec.(3) la transformada de Fourier en forma análoga al apartado 8,9-1 y por la convolución de Laplace teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_2 F(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} A F(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^0 F(\xi) d\xi$$

$$T_2(x, \tau) = t_L - A \int_0^{\tau} \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 \tau}} + \beta \left(\frac{q_1 - q_2}{q_2} \right) \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right) \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right) d\tau \quad (4)$$

en el plano de solidificación $x_2 = 0$ $T_2 = T_f$

$$T_f = t_L - \operatorname{erfc} \left(\beta \frac{q_1}{q_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right) \quad (5)$$

$$A = \frac{(t_L - T_f)}{\operatorname{erfc} \left(\beta \frac{q_1}{q_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \right)} \quad (6)$$

análogamente para T_1

$$T_1(x, \tau) = B \operatorname{erf} \left(\frac{x_1}{2\sqrt{\alpha_1 \tau}} \right) = B \operatorname{erf}(\beta) \quad (7)$$

en el plano de solidificación $T_1(x_1, \tau) = T_f$

$$B = \frac{T_f}{\operatorname{erf}(\beta)} \quad (8)$$

y por la ec. (1)

$$\frac{\exp(-\beta^2) - (t_L - T_f) k_2 \exp(-\beta^2 (q_1^2 \alpha_1 / q_2^2 \alpha_2)) \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}}{\operatorname{erf}(\beta)} = \frac{L \beta \alpha_1 q_1 \sqrt{\pi}}{T_f k_1} \quad (9)$$

Por (9) se determina el valor de β y a partir de éste último la relación $\frac{dx(\tau)}{d\tau}$

La ec. (9) se aplica fácilmente a distintos casos de importancia cambiando las variables que intervienen en el fenómeno:

- Fusión de un sólido. El subíndice 1 es la fase líquida y el 2 la fase sólida, L es el calor de fusión.
- Cambios de fase en estado sólido, los subíndices 1 y 2 se refieren a fases sólidas de distintas propiedades y L es nuevamente el calor de transformación.

- c) Cambios de fase con capas de distintas propiedades tér
micas yuxtapuestas.
- d) En procesos tales como fusión con eliminación del lí-
quido que se forma o sublimación las ecuaciones son
las obtenidas en el apartado 8,9.
- e) Soluciones aproximadas pueden obtenerse admitiendo rég-
imen estacionario. Así en el caso de un líquido a tem
peratura constante $dT_2/dx_2 \approx 0$ y si en la región de
sólido se cumple $k_1(dT_1/dx_1) = k_1(T_f/x)$ la ec. (1)
toma la forma

$$k_1 \frac{T_f}{x} = L \rho \frac{dx}{d\tau} \quad x^2 = \frac{2k_1 T_f}{L \rho} \tau \quad (10)$$

- f) Cuando las propiedades térmicas son variables la solu-
ción del problema se tiene por solución numérica de las
ecuaciones (1), (2) y (3).
- g) En el caso de convección en la superficie se cumple

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\right)_0 = -\frac{h}{k} T_0 \quad \text{y si} \quad \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \approx 0$$

las ecuaciones (1), (2) y (3) pueden resolverse por mé
todos numéricos o métodos aproximados de integración
conocidos como ecuaciones de balance térmico. La ec. (2)
puede escribirse para la capa de sólido que se forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (11)$$

Por integración entre los extremos

$$\int_0^x \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} T dx = \frac{d}{d\tau} \int_0^x T dx \quad (12)$$

Sustituyendo por los valores de $\frac{\partial T}{\partial x}$ en x y 0

$$\alpha_1 \frac{h}{k} T_0 + \alpha_1 L \rho \frac{dx}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \int_0^x T dx \quad (13)$$

$$d_1 \frac{h}{k} \tau T_0 + \alpha_1 L \rho x = \int_0^x T dx \quad (14)$$

Tomando $x(\tau)$ un polinomio de segundo orden con las constantes que satisfagan las ec.91) y (2) se obtiene $T(x, \tau)$

Ejemplo 8,10-1.

Se desea conocer la velocidad de solidificación de una masa de cinc en estado líquido a 500°C cuando en uno de los extremos se mantiene una temperatura de 0°C .

Solución:

Las propiedades del cinc en estado líquido pueden admitirse constantes entre el punto de fusión 419°C y 500°C

Calor latente $24,1 \text{ (kcal/kg)}$

Análogamente para el sólido entre $0-419^\circ\text{C}$

$$c_{p1} = 0,109 \text{ (kcal/kg}^\circ\text{C)} \quad \rho_1 = 7130 \text{ (kg/m}^3\text{)} \quad k_1 = 82 \text{ (kcal/h m}^\circ\text{C)}$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{k_2}{\rho_2 c_{p2}} \right) = 0,060 \text{ (m}^2\text{/h)} \quad \alpha_1 = 0,105 \text{ (m}^2\text{/h)}$$

aplicando la ec.8,10-4(9)

$$\frac{\exp(\beta^2)}{\text{erfc}(\beta)} = \frac{81,059 \exp(-1,85\beta^2) \cdot 1,32}{419 \text{ erfc}(1,36\beta)} = 0,52 \beta \sqrt{\pi}$$

Resolviendo esta ecuación por aproximaciones con datos de la tabla I-6, Apéndice I

$$\beta \approx 1,85$$

$$x = 2 \beta \sqrt{\alpha_1 \tau} = 1,43 \sqrt{\tau} \text{ (m}/\sqrt{\text{h}}\text{)}$$

Bibliografia

- AHMADI, G., Heat Conduction in Solids with Random Initials Condi
tions, J.Heat Transfer Trans. ASME 474-6 November (1974).
- ANDERSON, C.A. and ZIENKIEWICZ, O.C., Spontaneous Ignition Finite
Elements Solutions and Transient Conditions, Trans.ASME 398-404,
August (1974).
- BOLEY, B.A., The Analysis of Problems of Heat Conduction and Mee-
ting High Temperature Structures and Materials, 260-315. Perga
mon Press, New York (1964).
- BOLEY, B.A., A General Starting Solution for Melting and Solidi-
fying Slabs, Int.I.Eng.Science, 6, 89 (1968).
- BARRET, P.R., The Variance of the Temperature Distribution in a
Reactor Shell.
- BORIS RUBINSKY and AVRAHAM SITZER, Analitical Solutions to the
Heat Equation Involving a Moving Boundary with Aplication to
the Change of Phase Problem, J.Heat Transfer, 100, 2 (1978).
- BURCH, D.M. et al., Transient Temperature Distribution within Po
rous Slabs Subjeted to Sudden Transpiration Heating.
- CARSLAW, H.S. and JAEGER, J.C., Conduction of Heat in Solids, Ox-
ford at the Clarendon Press, 2nd Ed. London (1959).
- CRANK, J., The Mathematics of Diffusion, Oxford at the Clarendon
Press. London (1956).
- CRANK, J., Two Methods for the Numerical Solution of Moving Boun
dary Problems in Diffusion and Heat Flow Quat. J. Mech. 10,
220-31 (1957).
- CONTRERAS, W., and THORSEN, R.S., Transient Melting of a Solid
Heated by a Condensing Saturated Vapor Case I, negligible in-
terface curvature, J.Heat Transfer Trans.ASME, 97, 570 (1975).

CROWLEY, A.B., Numerical Solutions of Stefan Problems, Int.J.

Heat Mass.Transfer, 21, 2 (1978).

CHO, S.H. and SUNDERLAND, J.E., Heat Conduction Problems with Melting or Freezing, J. Heat Transfer Trans. ASME, 91 c 421-6 (1969).

DARDEL YVES, La Transmision de la chaleur au cours de la solidification, du rechauffage et de la trempe de l'acier. Revue de Metalurgie, 25 Rue de Clichy, Paris IX^e (1964).

DUNN, J.C. and NICKELL, R.E., Reentry Thermal Analysis of Variable Thickness Spherical Vehicles. Fundamentals of Spacecraft Thermal Design ed. by J.W.Lucas, MIT Press, 319-31, Cambridge Mass. (1972).

EPSTEIN, M. et al. Melting Heat Transfer in Steady Laminar Flow over a Flat Plate, H.Heat Transfer, 98, 531 (1976).

FINLAYSON, P.C. and SCHOFIELD, J.S., Heating for Forging in a batch tipe Furnace, J.Iron Strel Inst. 193, 238-52 (1959).

CILTON, A.B., Methods for Calculating Radiation Induced Heat Generation. Nucl.Eng.and Design, 18, 401-13 (1972).

FONTANA, M.H., Core Melt through as a consequence of Failure of Emergency core cooling, Nuclear Safety, 9, 14-24 (1968).

GHENOT, M.R., Contribution au probleme de la source colorifique mobile sur une tole. Journes Internationales de la Transmission de la chaleur. Societe Francaise del Termiciens 686-99. Juin, 1961, 3 Rue Henry Heine, Paris 16^e.

GOODMAN, T.R., The Heat Balance Integral and its applications to problemes involving a change of Phase. Trans.ASME 80, 335-42 (1958).

GOODMAN, T.R., The Heat Balance Equation further considerations and refinements. Trans.ASME, J.Heat Transfer 83, 83-6 (1961).

- HECKMAN, R.C., Thermal Diffusivity Finite Pulse Time Corrections
Sandia Laboratories Research Report SC-RR-710820, May (1971).
- HUGHES, P.J., KLEIN, S.A., Packed Bed Thermal Storage Models for
Solar Air Heating and Cooling Systems, Trans.ASME J.of Heat
Transfer, 98, 336 (1976).
- HIEBER, C.A. and MASH, E.J., Natural Convection above a line Heat
Source, higher order effects and estabiltiy, Int.J.Heat Mass.
Transfer, 18, 1473 (1975).
- HOWATSON, A.M. and TOPHAM, D.R., The inestability of Electric Arcs
Burning Axially in acelerated flow. J.Physics D.Appl.Phys., 9
1101 (1976).
- JAEGER, R.E. and NICKELL, R.E., Thermal Shock resistance Zirconia
Nozzles for continuos Copper Casting Material Science Research
5 Ed. W.W.Kriegel, Plenum Publ. Co. 163-84, New York (1972).
- KERN, J. and HANSEN, J.O., Transient Heat Conduction in Cylindri-
cal Systems with an axially Moving Boundary, Int.J.Heat Mass.
Transfer.
- KERN, J., A simple and apparently safe solution to the generalized
Stefan Problem, Int.J.Heat Mass.Transfer, 20, 467-74 (1977).
- KAUFMAN, Y.I. and GERSTEN, A., Simultaneous Heating and Tempera-
ture Measurements by a Infrared Laser Beam, App.Optics, 15,
353 (1976).
- KRASNOW, M.L. et al.. Calculo variacional Editorial MIR, Moscú
(1976).
- KUIKEN, H.K., Solidification of a Liquid on a Moving Sheet, Int.
J.Heat Mass Transfer, 20, 309-14 (1977).
- LANDAU, H.G., Heat Conduction in a Melting Solid. Quaterly App.
Math. 8, 150, 81-94.
- LAHOUD, A. and BOLEY, A.B., Some Considerations of the Melting of

- Reactor Fuel Plates and Rods, Nucl.Eng.and Design, 32, 1-19 (1975).
- LELLAND, A. WEAVER, Laser Applications, p. 201-36. Monte Ross, Ed. Academic Press, New York (1971).
- MALMUTH, N.D., Transient Heat Conduction of a Moving Point Source with Change of State. Int.J.Heat Mass Transfer, 19, 349 (1976).
- MERKER, G.P. et al. Calculation of the temperature Field around a Buried Point and Line Source respectively when the Boundary Condition is Newton's Law, Warme und Stoffurbertragung, 10, (1977).
- MAINER, M.J. and THOMPSON, H.A., Non Furier Effects at High Flux Trans.ASME J. Heat Transfer, 95, 284 (1973).
- NISHIMURA, M. et al., Heat Transfer Accompanied by Melting in a Fixed Bed of Granular Solids, Int.Chem.Eng. 16, 169 (1976).
- SFEIR, A.A. and CLUMPNER, J.A., Continuos Casting of Cylindrical Ingots. Trans.ASME, J.Heat Transfer, 29, February (1977).
- SECRIT, D.A. and HORNBECK, R.W., An analysis of Heat Transfer and Fade in Disk Brakes, J.Eng.Ind. 98, 385 (1976).
- SCHMIDT, F.W. and SZEGO, J., Transient Response of Solid Sensible Heat Thermal Storage Units. J.Heat Transfer, 98, 471 (1976).
- SHAMSUNDAR, N. and SPARROW, E.M., Storage of Thermal Energy by Solid-Liquid Phase Change Temperature Drop and Heat Flow, J. Heat Transfer 541-43, November (1974).
- STOLZ, G., PASKHKISS, V., BONILLA, C.F. and ACEVEDO, G., Thermal Considerations in Oil Quenching, J.Iron Steel Inst. 193, 116-23 (1959).
- SNO-ANTILLA, A.J. and COTTON, I., The Effect of Stabilizing Temperature Gradient on Heat Transfer from a Molten Fuel Layer with Volumetrical Heating, J.Heat Transfer 97, 544 (1975).

- TORVICK, P.J., Predictions of Melt through times for Laser Heating
AIAAJ-14, 417 (1976).
- TOREN, M. et al. Melting and Evaporation Phenomena During Elec-
tric Erosion, J.Heat Transfer, 97, 576 (1975).
- VERMA, A., et al., Thermal Energy Storage in inorganic salts, Can.
J.Chem.Eng., 54, 285 (1976).
- WENTWORTH, W.E., Simple Thermal Decomposition Reactions for Stora-
ge of Solar Thermal Energy, Solar Energy, 18, 205 (1976).

APENDICE I

| | | |
|--------|---|-----|
| I-1 | Funciones de Bessel; ecuaciones de recurrencia | 672 |
| I-1(1) | Tabla de Funciones de Bessel | 680 |
| I-1(2) | Tabla de Funciones de Bessel | 683 |
| I-2 | Transformadas de Fourier | 684 |
| I-2(1) | Tabla de transformadas de Fourier | 693 |
| I-2(2) | Tabla de transformadas del seno de Fourier | 695 |
| I-2(3) | Tabla de transformadas del coseno de Fourier | 679 |
| I-2(4) | Tabla de transformadas finitas del seno de Fourier | 702 |
| I-2(5) | Tabla de transformadas finitas del coseno de Fourier | 703 |
| I-3 | Transformadas de Hankel | 704 |
| I-3(1) | Tabla de transformadas de Hankel | 707 |
| I-3(2) | Tabla de transformadas finitas de Hankel | 719 |
| I-3(3) | Tabla de raíces de las funciones de Bessel | 720 |
| I-3(4) | Tabla de raíces de la ec, $M_n J_1(M_n) = C J_0 M_n$ | 721 |
| I-3(5) | Tabla de raíces de la ec. $M_n \operatorname{tg}(M_n) = C$ | 722 |
| I-3(6) | Tabla de raíces de la ec. $M_n \operatorname{ctg}(M_n) + C = 1$ | 723 |
| I-3(7) | Tabla de raíces de la ec. $J_0(M_n) Y_0(AM_n) = Y_0(M_n) J_0(AM_n)$ | 724 |
| I-3(8) | Tabla de raíces de la ec. $M_n \operatorname{ctg}(M_n) + C = 0$ | 725 |
| I-3(9) | " " " " " " | 726 |
| I-4 | Transformadas de Laplace | 727 |
| I-4(1) | Tabla de transformadas de Laplace | 732 |
| I-5 | Función impulso o delta de Dirac $\delta(x)$ | 740 |
| I-6 | Función de error | 742 |
| I-6(1) | Tabla de función de error | 743 |
| I-7 | Tabla de función gamma | 745 |
| I-8 | Tablas de integrales $I_s(x); I_c(x); I_e(x)$ | 746 |

APENDICE I-1

FUNCIONES DE BESSEL

1. Ecuaciones de Bessel

La ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (1)$$

es conocida como ecuación diferencial de Bessel de orden n cuya solución es

$$\begin{aligned} y &= C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x) & \text{para } n \neq 0, 1, 2, \dots \\ y &= C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) & \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. $J_n(x)$ y $Y_n(x)$ son las funciones de Bessel de primera y segunda clase respectivamente de grado cero, orden n y argumento x dadas por las series infinitas

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \dots \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n/2)^{n-2k}}{k! \Gamma(n-k+1)} \\ J_{-n}(x) &= \frac{x^{-n}}{2^{-n} \Gamma(1-n)} \left[1 - \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2-2n)(4-2n)} - \dots \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)} \end{aligned}$$

donde Γ es la función gamma dada por

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} [e^{-x} x^{n-1}] dx = n! \quad n > 0 \quad (4)$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} [e^{-x} x^n] dx = n! \quad \begin{aligned} n &= 0, 1, 2, \dots \\ \text{con } 0! &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Para $n < 1$

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad (6)$$

Si $n \neq 0, 1, 2, \dots$ $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son soluciones independientes de la ec. (1) pero si $n = 0, 1, 2, \dots$

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) \quad (7)$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \dots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^3 \cdot 4^2 \cdot 6} - \dots \quad (8)$$

Las funciones $Y_n(x)$ son también series infinitas que tienen la forma

$$Y_n(x) = A J_n(x) \int \frac{dx}{x [J_n(x)]^2} + B J_n(x) \quad (9)$$

o

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi x)} \quad \text{para } n \neq 0, 1, 2, \dots$$

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

si $n = 0, 1, 2, \dots$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \phi(k) + \phi(n+k) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \quad (11)$$

donde $\gamma = 0,5772156 \dots$ conocida como constante de Euler

$$\phi(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \quad \phi(0) = 0$$

Para $n = 0$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] J_0(x) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^3 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots \right] \quad (12)$$

y para $n = 0, 1, 2, \dots$ $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$

2. Ecuación de Bessel modificada

La ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 - n^2)y = 0 \quad (14)$$

se conoce como ecuación de Bessel modificada cuya solución es de la forma

$$\begin{aligned} y &= C_1 I_n(x) + C_2 I_{-n}(x) && \text{para } n \neq 0, 1, 2, \dots \\ y &= C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) && \text{para todo } n \\ y &= C_1 I_n(x) + B I_n(x) \int \frac{dx}{x I_n^2(x)} && \text{todo } n \end{aligned} \quad (15)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= i^{-n} J_\nu(ix) = \exp\left(-\frac{in\pi}{2}\right) J_{-n}(ix) = \frac{x^{-n}}{2^n \Gamma(1-n)} \left[1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \dots \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(k+1-n)} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} I_{-n}(x) &= i^n J_{-n}(ix) = \exp\left(\frac{in\pi}{2}\right) J_n(ix) = \frac{x^{-n}}{2^n \Gamma(1-n)} \left[1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \dots \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(k+1-n)} \end{aligned} \quad (17)$$

Para $n = 0, 1, 2, \dots$ se cumple

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \quad (18)$$

Para $n \neq 0, 1, 2, \dots$ $I_{-n}(x)$ y $I_n(x)$ son independientes.

Las expresiones de $I_0(x)$ e $I_1(x)$ son

$$\begin{aligned} I_0(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4!} + \dots \\ I_1(x) &= \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \\ I_0'(x) &= I_1(x) \end{aligned} \quad (19)$$

Para las funciones $K_n(x)$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin \pi} [I_{-n}(x) - I_n(x)] \quad \text{para } n \neq 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

$$K_n(x) = \lim_{p \rightarrow \nu} \frac{\pi}{2 \sin(\pi p)} [I_{-p}(x) - I_p(x)] \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Si $n = 0, 1, 2, \dots$

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} \left[\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right] I_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k-1)! \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-n} + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k}}{k! (n+k)!} [\phi(k) + \phi(n+k)] \quad (21)$$

donde

$$\phi(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \quad \phi(0) = 0$$

Para $n=0$

$$K_0(x) = - \left[\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right] I_0(x) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \dots \quad (22)$$

y para $n = 0, 1, 2, \dots$ se cumple la relación

$$K_{-n}(x) = K_n(x) \quad (23)$$

3. Funciones de Bessel generalizadas

La identificación de una ecuación diferencial con las ecuaciones de Bessel puede hacerse por comparación con ecuaciones de Bessel generalizadas.

Una ecuación de este tipo es

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + [(1-2a)x - 2bx^2] \frac{dy}{dx} + [c^2 d^2 + x^{2c} + b^2 x^2 - b(1-2a)x + a^2 - c^2 d^2] y = 0 \quad (24)$$

con la solución

$$y = x^a \exp(bx) [C_1 J_n(dx^c) + C_2 Y_n(dx^c)] \quad (25)$$

La comparación de la ecuación problema con la ec. (24) se sigue la solución a partir de la ec. (25).

Otra ecuación generalizada es:

$$\frac{d}{dx} (x^p \frac{dy}{dx}) + (ax^q + bx^r) y = 0 \quad (26)$$

con las soluciones

$$y = x^{p/q} [C_1 J_n(wx^{1/q}) + C_2 Y_n(wx^{1/q})] \quad n \neq 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

$$y = x^{p/q} [C_1 J_n(wx^{1/q}) + C_2 Y_n(wx^{1/q})] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

La identificación de la ec. 926) con la ec. (1) conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha p + 2\beta - \alpha + 1 &= 1 & \alpha q + 2\alpha - \alpha p - 2 &= 0 & \alpha r - \alpha p + 2\alpha - 2 &= 0 \\ \alpha &= \frac{2}{2-p+q} & \beta &= \frac{1-p}{2-p+q} & n &= \frac{\sqrt{(1-p)^2 - 4b}}{2-p+q} & w^2 &= a\alpha^2 & k &= p-2 \end{aligned}$$

así la ec. (26) es la ec. (1) si $r = p-2$ o $b=0$

Cuando se trata de ecuaciones diferenciales del tipo

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (ix^2 + n^2) y = 0 \quad (29)$$

La solución general es

$$y = A [Ber_n(x) + iBei_n(x)] + B [ker_n(x) + kei_n(x)] \quad (30)$$

donde A y B son constantes arbitrarias y $Ber_n(x)$, $Bein(x)$, $kern(x)$

$Kein(x)$, las funciones reales imaginarias de las funciones

$$Ber_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k! \Gamma(n+k+1)} \cos \frac{(3n+2k)\pi}{4} \quad (31)$$

$$Bein(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k! \Gamma(n+k+1)} \sin \frac{(3n+2k)\pi}{4} \quad (32)$$

Para $n=0$

$$Ber_0(x) = 1 - \frac{(x/2)^2}{2!^2} + \frac{(x/2)^8}{4!^2} + \dots$$

$$Be_{i0}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2} + \frac{(x/2)^{10}}{5!^2} - \dots \quad (33)$$

$$kern(x) = - \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] Ber_n(x) + \frac{1}{4} \pi Bein(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)! (x/2)^{2k-n}}{k!} \cdot \cos \frac{(3n+2k)\pi}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} [\phi(k) + \phi(n+k)] \cos \frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

$$Kein(x) = - \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] Bein(x) - \frac{1}{4} \pi Ber_n(x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[n-k-1] (x/2)^{2k-n}}{k!} \cdot \sin \frac{(3n+2k)\pi}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k! (n+k)!} [\phi(k) + \phi(n+k)] \sin \frac{(3n+2k)\pi}{4} \quad (34)$$

$$\quad (35)$$

donde $\phi(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$

Para $n=0$

$$Ker_0(x) = - \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] Ber_0(x) + \frac{\pi}{4} Be_{i0}(x) + 1 - \frac{(x/2)^2}{2!^2} (1 + \frac{1}{2}) + \frac{(x/2)^8}{4!^2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) - \dots \quad (36)$$

$$Ke_{i0}(x) = - \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right] Be_{i0}(x) - \frac{\pi}{4} Ber_0(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \dots \quad (37)$$

4. Fórmulas de recurrencia.

- (1) $J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu-1}(x)$
- (2) $I_{\nu+1}(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{2\nu}{x} I_{\nu}(x)$
- (3) $x I'_{\nu}(x) + \nu I_{\nu}(x) = x I_{\nu-1}(x)$
- (4) $x I'_{\nu}(x) - \nu I_{\nu}(x) = x I_{\nu+1}(x)$
- (5) $x K'_{\nu}(x) + \nu K_{\nu}(x) = -x K_{\nu-1}(x)$
- (6) $x K'_{\nu}(x) - \nu K_{\nu}(x) = -x K_{\nu+1}(x)$
- (7) $x J'_{\nu}(x) + \nu J_{\nu}(x) = x J_{\nu-1}(x)$
- (8) $x J'_{\nu}(x) - \nu J_{\nu}(x) = -x J_{\nu+1}(x)$
- (9) $x Y'_{\nu}(x) + \nu Y_{\nu}(x) = -x Y_{\nu-1}(x)$
- (10) $x Y'_{\nu}(x) - \nu Y_{\nu}(x) = -x Y_{\nu+1}(x)$
- (11) $J_{\nu}(x) Y'_{\nu}(x) - Y_{\nu}(x) J'_{\nu}(x) = \frac{2}{\pi x}$
- (12) $I_{\nu}(x) K'_{\nu}(x) - K_{\nu}(x) I'_{\nu}(x) = -\frac{1}{x}$
- (13) $I_{\nu}(x) K_{\nu+1}(x) + K_{\nu}(x) I_{\nu+1}(x) = \frac{1}{x}$
- (14) $J_{\nu}(x \exp(k\pi i)) = \exp(\nu k\pi i) J_{\nu}(x)$
- (15) $Y_{\nu}(x \exp(k\pi i)) = \exp(-\nu k\pi i) Y_{\nu}(x) + 2i \sin(\nu k\pi) \operatorname{ctg}(\pi\nu) J_{\nu}(x)$
- (16) $K_{\nu}[x \exp(\pm \frac{\pi i}{2})] = \pm \frac{\pi i}{2} \exp(\mp \frac{\nu \pi i}{2}) [-J_{\nu}(x) \pm i Y_{\nu}(x)]$
- (17) $K_{-\nu}(x) = K_{\nu}(x)$
- (18) $K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp(-x)$
- (19) $I_{\nu}(x \exp(\pm \frac{\pi i}{2})) = \exp(\pm \nu \pi i) J_{\nu}(x)$
- (20) $\int_0^{\infty} \eta J_0(r\eta) \exp(-a^2\eta) d\eta = \frac{1}{2a} \exp(-r^2/4a)$
- (21) $\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp[-\eta - \frac{x^2}{4\eta}] \frac{d\eta}{\eta} = K_0(x) \quad \operatorname{Re}(x^2) > 0$
- (22) $\frac{d}{dx} [x^{\nu} J_{\nu}(x)] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$
- (23) $\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$

$$(24) \quad \frac{d}{dx} [x^\nu I_\nu(x)] = x^\nu I_{\nu-1}(x)$$

$$(25) \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} I_\nu(x)] = x^{\nu-1} I_{\nu+1}(x)$$

$$(26) \quad \frac{d}{dx} [x^\nu K_\nu(x)] = -x^\nu K_{\nu-1}(x)$$

$$(27) \quad \frac{d}{dx} [x^{\nu-1} K_\nu(x)] = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x)$$

$$(28) \quad Y'_0(x) = -Y_0(x)$$

TABLA I-1(1). Funciones de Bessel

| x | $J_0(x)$ | $J_1(x)$ | $Y_0(x)$ | $Y_1(x)$ | $I_0(x)$ | $I_1(x)$ | $K_0(x)$ | $K_1(x)$ |
|--------|----------|----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | $-\infty$ | $-\infty$ | 1,0000 | 0,0000 | $+\infty$ | $+\infty$ |
| 0,05 | 0,9993 | 0,0249 | -1,9793 | -12,7898 | 1,0006 | 0,0250 | 3,1142 | 19,9096 |
| 0,10 | 0,9975 | 0,0499 | -1,5342 | -6,4589 | 1,0025 | 0,0500 | 2,4270 | 9,8538 |
| 0,15 | 0,9943 | 0,0747 | -1,2707 | -4,3636 | 1,0056 | 0,0752 | 2,0300 | 6,4775 |
| 0,20 | 0,9900 | 0,0995 | -1,0811 | -3,3238 | 1,0100 | 0,1005 | 1,7527 | 4,7759 |
| 0,25 | 0,9844 | 0,1240 | -0,9315 | -2,7041 | 1,0156 | 0,1259 | 1,5415 | 3,7470 |
| 0,30 | 0,9776 | 0,1483 | -0,8072 | -2,2931 | 1,0226 | 0,1516 | 1,3724 | 3,0559 |
| 0,35 | 0,9696 | 0,1723 | -0,7003 | -2,0004 | 1,0308 | 0,1776 | 1,2327 | 2,5591 |
| 0,40 | 0,9604 | 0,1960 | -0,6060 | -1,7808 | 1,0404 | 0,2040 | 1,1145 | 2,1843 |
| 0,45 | 0,9500 | 0,2193 | -0,5214 | -1,6095 | 1,0512 | 0,2307 | 1,0129 | 1,8915 |
| 0,50 | 0,9384 | 0,2422 | -0,4445 | -1,4714 | 1,0634 | 0,2578 | 0,9244 | 1,6564 |
| 0,55 | 0,9257 | 0,2647 | -0,3738 | -1,3571 | 1,0770 | 0,2855 | 0,8465 | 1,4635 |
| 0,60 | 0,9120 | 0,2867 | -0,3085 | -1,2603 | 1,0920 | 0,3137 | 0,7775 | 1,3028 |
| 0,65 | 0,8971 | 0,3081 | -0,2476 | -1,1767 | 1,1084 | 0,3424 | 0,7158 | 1,1667 |
| 0,70 | 0,8812 | 0,3290 | -0,1906 | -1,1032 | 1,1263 | 0,3718 | 0,6605 | 1,0502 |
| 0,75 | 0,8642 | 0,3492 | -0,1371 | -1,0375 | 1,1456 | 0,4019 | 0,6105 | 0,9495 |
| 0,80 | 0,8462 | 0,3688 | -0,0868 | -0,9781 | 1,1665 | 0,4328 | 0,5653 | 0,8617 |
| 0,85 | 0,8273 | 0,3877 | -0,0392 | -0,9236 | 1,1889 | 0,4645 | 0,5242 | 0,7846 |
| 0,90 | 0,8075 | 0,4059 | 0,0056 | -0,8731 | 1,2129 | 0,4971 | 0,4867 | 0,7165 |
| 0,95 | 0,7867 | 0,4233 | 0,0480 | -0,8258 | 1,2386 | 0,5306 | 0,4524 | 0,6559 |
| 1,00 | 0,7652 | 0,4400 | 0,0882 | -0,7812 | 1,2660 | 0,5651 | 0,4210 | 0,6019 |
| 1,05 | 0,7428 | 0,4559 | 0,1262 | -0,7387 | 1,2952 | 0,6007 | 0,3921 | 0,5534 |
| 1,10 | 0,7196 | 0,4709 | 0,1621 | -0,6981 | 1,3261 | 0,6374 | 0,3656 | 0,5097 |
| 1,15 | 0,6957 | 0,4850 | 0,1960 | -0,6589 | 1,3589 | 0,6754 | 0,3411 | 0,4703 |
| 1,20 | 0,6711 | 0,4982 | 0,2280 | -0,6211 | 1,3937 | 0,7146 | 0,3185 | 0,4345 |
| 1,25 | 0,6459 | 0,5106 | 0,2582 | -0,5843 | 1,4304 | 0,7552 | 0,2976 | 0,4021 |
| 1,30 | 0,6200 | 0,5220 | 0,2865 | -0,5485 | 1,4692 | 0,7973 | 0,2782 | 0,3725 |
| 1,35 | 0,5937 | 0,5324 | 0,3130 | -0,5134 | 1,5102 | 0,8409 | 0,2603 | 0,3455 |
| 1,40 | 0,5668 | 0,5419 | 0,3379 | -0,4791 | 1,5533 | 0,8860 | 0,2436 | 0,3208 |
| 1,45 | 0,5395 | 0,5504 | 0,3610 | -0,4454 | 1,5988 | 0,9329 | 0,2281 | 0,2981 |
| 1,50 | 0,5118 | 0,5579 | 0,3852 | -0,4123 | 1,6467 | 0,9816 | 0,2138 | 0,2773 |
| 1,55 | 0,4837 | 0,5644 | 0,4022 | -0,3797 | 1,6970 | 1,0322 | 0,2004 | 0,2582 |
| 1,60 | 0,4554 | 0,5699 | 0,4204 | -0,3475 | 1,7499 | 1,0848 | 0,1879 | 0,2406 |
| 1,65 | 0,4267 | 0,5743 | 0,4370 | -0,3159 | 1,8055 | 1,1394 | 0,1763 | 0,2243 |
| 1,70 | 0,3979 | 0,5777 | 0,4520 | -0,2847 | 1,8639 | 1,1963 | 0,1655 | 0,2093 |
| 1,75 | 0,3690 | 0,5801 | 0,4654 | -0,2539 | 1,9252 | 1,2555 | 0,1553 | 0,1959 |
| 1,80 | 0,3399 | 0,5815 | 0,4774 | -0,2236 | 1,9835 | 1,3171 | 0,1459 | 0,1826 |
| 1,85 | 0,3109 | 0,5818 | 0,4878 | -0,1938 | 2,0570 | 1,3813 | 0,1371 | 0,1707 |
| 1,90 | 0,2818 | 0,5811 | 0,4968 | -0,1644 | 2,1277 | 1,4482 | 0,1288 | 0,1595 |
| 1,95 | 0,2528 | 0,5794 | 0,5043 | -0,1354 | 2,2018 | 1,5179 | 0,1211 | 0,1494 |
| 2,00 | 0,2238 | 0,5767 | 0,5103 | -0,1070 | 2,2795 | 1,5906 | 0,1138 | 0,1398 |
| 2,05 | 0,1951 | 0,5730 | 0,5150 | -0,0790 | 2,3610 | 1,6664 | 0,1071 | 0,1310 |
| 2,10 | 0,1666 | 0,5682 | 0,5182 | -0,0516 | 2,4462 | 1,7455 | 0,1007 | 0,1227 |
| 2,15 | 0,1383 | 0,5626 | 0,5202 | -0,0248 | 2,5356 | 1,8280 | 0,0948 | 0,1150 |
| 2,20 | 0,1103 | 0,5559 | 0,5207 | 0,0014 | 2,6291 | 1,9140 | 0,0892 | 0,1079 |
| 2,25 | 0,0827 | 0,5483 | 0,5200 | 0,0271 | 2,7270 | 2,0039 | 0,0840 | 0,1012 |

| x | $J_0(x)$ | $J_1(x)$ | $Y_0(x)$ | $Y_1(x)$ | $I_0(x)$ | $I_1(x)$ | $K_0(x)$ | $K_1(x)$ |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 2.30 | 0.0555 | 0.5398 | 0.5180 | 0.0522 | 2.8296 | 2.0978 | 0.0791 | 0.0949 |
| 2.35 | 0.0287 | 0.5304 | 0.5148 | 0.0767 | 2.9369 | 2.1957 | 0.0745 | 0.0891 |
| 2.40 | 0.0025 | 0.5201 | 0.5104 | 0.1004 | 3.0492 | 2.2981 | 0.0702 | 0.0837 |
| 2.45 | -0.0232 | 0.5090 | 0.5048 | 0.1235 | 3.1668 | 2.4050 | 0.0661 | 0.0785 |
| 2.50 | -0.0483 | 0.4970 | 0.4980 | 0.1459 | 3.2898 | 2.5167 | 0.0623 | 0.0738 |
| 2.55 | -0.0729 | 0.4843 | 0.4902 | 0.1675 | 3.4185 | 2.6334 | 0.0587 | 0.0694 |
| 2.60 | -0.0968 | 0.4708 | 0.4813 | 0.1883 | 3.5532 | 2.7553 | 0.0554 | 0.0652 |
| 2.65 | -0.1199 | 0.4565 | 0.4714 | 0.2084 | 3.6942 | 2.8828 | 0.0522 | 0.0613 |
| 2.70 | -0.1424 | 0.4416 | 0.4605 | 0.2276 | 3.8416 | 3.0161 | 0.0492 | 0.0577 |
| 2.75 | -0.1641 | 0.4259 | 0.4486 | 0.2460 | 3.9959 | 3.1554 | 0.0464 | 0.0543 |
| 2.80 | -0.1850 | 0.4097 | 0.4359 | 0.2635 | 4.1573 | 3.3010 | 0.0438 | 0.0511 |
| 2.85 | -0.2051 | 0.3928 | 0.4223 | 0.2801 | 4.3261 | 3.4533 | 0.0413 | 0.0481 |
| 2.90 | -0.2243 | 0.3754 | 0.4079 | 0.2959 | 4.5027 | 3.6126 | 0.0390 | 0.0452 |
| 2.95 | -0.2426 | 0.3574 | 0.3927 | 0.3107 | 4.6875 | 3.7791 | 0.0368 | 0.0426 |
| 3.00 | -0.2600 | 0.3390 | 0.3768 | 0.3246 | 4.8807 | 3.9533 | 0.0347 | 0.0401 |
| 3.05 | -0.2765 | 0.3201 | 0.3602 | 0.3376 | 5.0829 | 4.1355 | 0.0327 | 0.0378 |
| 3.10 | -0.2920 | 0.3009 | 0.3431 | 0.3496 | 5.2944 | 4.3262 | 0.0309 | 0.0355 |
| 3.15 | -0.3066 | 0.2812 | 0.3253 | 0.3606 | 5.5157 | 4.5256 | 0.0292 | 0.0335 |
| 3.20 | -0.3201 | 0.2613 | 0.3070 | 0.3707 | 5.7472 | 4.7342 | 0.0276 | 0.0316 |
| 3.25 | -0.3327 | 0.2411 | 0.2882 | 0.3797 | 5.9893 | 4.9525 | 0.0260 | 0.0298 |
| 3.30 | -0.3443 | 0.2206 | 0.2690 | 0.3878 | 6.2426 | 5.1809 | 0.0246 | 0.0281 |
| 3.35 | -0.3548 | 0.2000 | 0.2495 | 0.3949 | 6.5076 | 5.4199 | 0.0232 | 0.0265 |
| 3.40 | -0.3643 | 0.1792 | 0.2296 | 0.4010 | 6.7848 | 5.6701 | 0.0219 | 0.0250 |
| 3.45 | -0.3727 | 0.1583 | 0.2094 | 0.4061 | 7.0748 | 5.9318 | 0.0207 | 0.0235 |
| 3.50 | -0.3801 | 0.1373 | 0.1890 | 0.4101 | 7.3782 | 6.2058 | 0.0196 | 0.0222 |
| 3.55 | -0.3864 | 0.1164 | 0.1684 | 0.4132 | 7.6956 | 6.4925 | 0.0185 | 0.0209 |
| 3.60 | -0.3917 | 0.0954 | 0.1477 | 0.4153 | 8.0276 | 6.7927 | 0.0175 | 0.0197 |
| 3.65 | -0.3960 | 0.0745 | 0.1269 | 0.4165 | 8.3751 | 7.1068 | 0.0165 | 0.0186 |
| 3.70 | -0.3923 | 0.0538 | 0.1060 | 0.4166 | 8.7386 | 7.4357 | 0.0156 | 0.0176 |
| 3.75 | -0.4014 | 0.0332 | 0.0852 | 0.4158 | 9.1189 | 7.7800 | 0.0147 | 0.0166 |
| 3.80 | -0.4025 | 0.0128 | 0.0645 | 0.4141 | 9.5168 | 8.1404 | 0.0139 | 0.0157 |
| 3.85 | -0.4026 | -0.0073 | 0.0438 | 0.4114 | 9.9332 | 8.5177 | 0.0132 | 0.0148 |
| 3.90 | -0.4018 | -0.0272 | 0.0233 | 0.4078 | 10.3689 | 8.9127 | 0.0124 | 0.0140 |
| 3.95 | -0.3999 | -0.0468 | 0.0030 | 0.4033 | 10.8248 | 9.3264 | 0.0118 | 0.0132 |
| 4.00 | -0.3971 | -0.0660 | -0.0169 | 0.3979 | 11.3019 | 9.7594 | 0.0111 | 0.0124 |
| 4.05 | -0.3933 | -0.0848 | -0.0366 | 0.3916 | 11.8011 | 10.2129 | 0.0105 | 0.0117 |
| 4.10 | -0.3886 | -0.1032 | -0.0560 | 0.3845 | 12.3235 | 10.6877 | 0.0099 | 0.0111 |
| 4.15 | -0.3830 | -0.1212 | -0.0751 | 0.3767 | 12.8703 | 11.1849 | 0.0094 | 0.0105 |
| 4.20 | -0.3765 | -0.1386 | -0.0937 | 0.3680 | 13.4424 | 11.7056 | 0.0089 | 0.0099 |
| 4.25 | -0.3692 | -0.1555 | -0.1119 | 0.3585 | 14.0412 | 12.2508 | 0.0084 | 0.0093 |
| 4.30 | -0.3610 | -0.1719 | -0.1296 | 0.3483 | 14.6679 | 12.8219 | 0.0079 | 0.0088 |
| 4.35 | -0.3520 | -0.1876 | -0.1467 | 0.3375 | 15.3239 | 13.4199 | 0.0075 | 0.0083 |
| 4.40 | -0.3422 | -0.2027 | -0.1633 | 0.3259 | 16.0104 | 14.0462 | 0.0071 | 0.0079 |
| 4.45 | -0.3317 | -0.2172 | -0.1793 | 0.3137 | 16.7290 | 14.7021 | 0.0067 | 0.0074 |
| 4.50 | -0.3205 | -0.2310 | -0.1947 | 0.3010 | 17.4811 | 15.3892 | 0.0064 | 0.0070 |

| x | $J_0(x)$ | $J_1(x)$ | $Y_0(x)$ | $Y_1(x)$ | $I_0(x)$ | $I_1(x)$ | $K_0(x)$ | $K_1(x)$ |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 4.55 | -0.3086 | -0.2441 | -0.2094 | 0.2876 | 18.2684 | 16.1088 | 0.0060 | 0.0066 |
| 4.60 | -0.2961 | -0.2565 | -0.2234 | 0.2737 | 19.0926 | 16.8625 | 0.0057 | 0.0063 |
| 4.65 | -0.2830 | -0.2681 | -0.2367 | 0.2593 | 19.9553 | 17.6520 | 0.0054 | 0.0059 |
| 4.70 | -0.2693 | -0.2790 | -0.2493 | 0.2445 | 20.8584 | 18.4790 | 0.0051 | 0.0056 |
| 4.75 | -0.2551 | -0.2891 | -0.2612 | 0.2292 | 21.8039 | 19.3453 | 0.0048 | 0.0053 |
| 4.80 | -0.2404 | -0.2985 | -0.2723 | 0.2135 | 22.7936 | 20.2528 | 0.0046 | 0.0050 |
| 4.85 | -0.2252 | -0.3070 | -0.2825 | 0.1975 | 23.8299 | 21.2034 | 0.0043 | 0.0047 |
| 4.90 | -0.2097 | -0.3146 | -0.2920 | 0.1812 | 24.9147 | 22.1993 | 0.0041 | 0.0045 |
| 4.95 | -0.1938 | -0.3215 | -0.3007 | 0.1646 | 20.0506 | 23.2426 | 0.0039 | 0.0042 |
| 5.00 | -0.1776 | -0.3275 | -0.3085 | 0.1478 | 27.2398 | 24.3356 | 0.0036 | 0.0040 |
| 5.1 | -0.1443 | -0.3371 | -0.3216 | 0.1137 | 29.79 | 26.68 | 0.0033 | 0.0036 |
| 5.2 | -0.1103 | -0.3432 | -0.3313 | 0.0792 | 32.58 | 29.25 | 0.0029 | 0.0032 |
| 5.3 | -0.0758 | -0.3460 | -0.3374 | 0.0445 | 35.65 | 32.08 | 0.0026 | 0.0029 |
| 5.4 | -0.0412 | -0.3453 | -0.3402 | 0.0101 | 39.01 | 35.18 | 0.0023 | 0.0025 |
| 5.5 | -0.0068 | -0.3414 | -0.3395 | 0.0238 | 42.69 | 38.59 | 0.0021 | 0.0023 |
| 5.6 | 0.0270 | -0.3343 | -0.3354 | 0.0568 | 46.74 | 42.33 | 0.0019 | 0.0020 |
| 5.7 | 0.0599 | -0.3241 | -0.3282 | 0.0887 | 51.17 | 46.44 | 0.0017 | 0.0018 |
| 5.8 | 0.0917 | -0.3110 | -0.3177 | 0.1192 | 56.04 | 50.95 | 0.0015 | 0.0016 |
| 5.9 | 0.1220 | -0.2951 | -0.3044 | 0.1481 | 61.38 | 55.90 | 0.0013 | 0.0014 |
| 6.0 | 0.1506 | -0.2767 | -0.2882 | 0.1750 | 67.23 | 61.34 | 0.0012 | 0.0013 |
| 6.1 | 0.1773 | -0.2559 | -0.2694 | 0.1998 | 73.66 | 67.32 | 0.0011 | 0.0012 |
| 6.2 | 0.2017 | -0.2329 | -0.2483 | 0.2223 | 80.72 | 73.89 | 0.0010 | 0.0010 |
| 6.3 | 0.2238 | -0.2081 | -0.2251 | 0.2422 | 88.46 | 81.10 | 0.0009 | 0.0009 |
| 6.4 | 0.2433 | -0.1816 | -0.1999 | 0.2596 | 96.96 | 89.03 | 0.0008 | 0.0008 |
| 6.5 | 0.2601 | -0.1538 | -0.1732 | 0.2732 | 106.3 | 97.74 | 0.0007 | 0.0007 |

TABLA I-1(2). FUNCIONES DE BESSEL, BER(x), BEI(x), KER(x), KEI(x)

Función de Bessel Ber(x)

| x. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0. | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9990 | 0.9980 | 0.9962 |
| 1. | 0.9844 | 0.9771 | 0.9676 | 0.9554 | 0.9401 | 0.9211 | 0.8979 | 0.8700 |
| 2. | 0.7517 | 0.6987 | 0.6377 | 0.5680 | 0.4890 | 0.4000 | 0.3001 | 0.1887 |
| 3. | -0.2214 | -0.3855 | -0.5644 | -0.7584 | -0.9680 | -1.1936 | -1.4353 | -1.6938 |
| 4. | -2.5634 | -2.8843 | -3.2195 | -3.5679 | -3.9283 | -4.2991 | -4.6784 | -5.0639 |
| 5. | -6.2301 | -6.6107 | -6.9802 | -7.3344 | -7.6674 | -7.9736 | -8.2466 | -8.4794 |
| 6. | -8.8583 | -8.8491 | -8.7561 | -8.5688 | -8.2762 | -7.8669 | -7.3287 | -6.6492 |
| 7. | -3.6329 | -2.2571 | -0.6737 | 1.1308 | 3.1695 | 5.4550 | 7.9994 | 10.814 |
| 8. | 20.974 | 24.957 | 29.245 | 33.840 | 38.738 | 43.936 | 49.423 | 55.187 |
| 9. | 73.936 | 80.576 | 87.350 | 94.208 | 101.10 | 107.95 | 114.70 | 121.26 |

Función de Bessel Bei(x)

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0. | 0.0000 | 0.02500 | 0.01000 | 0.02250 | 0.04000 | 0.06249 | 0.08998 | 0.1224 |
| 1. | 0.2496 | 0.3017 | 0.3587 | 0.4204 | 0.4867 | 0.5576 | 0.6327 | 0.7120 |
| 2. | 0.9723 | 1.0654 | 1.1610 | 1.2585 | 1.3575 | 1.4572 | 1.5569 | 1.6557 |
| 3. | 1.9376 | 2.0228 | 2.1016 | 2.1723 | 2.2334 | 2.2832 | 2.3199 | 2.3413 |
| 4. | 2.2927 | 2.2309 | 2.1422 | 2.0236 | 1.8726 | 1.6860 | 1.4610 | 1.1946 |
| 5. | 0.1160 | -0.3467 | -0.8658 | -1.4443 | -2.0845 | -2.7890 | -3.5597 | -4.3986 |
| 6. | -7.3347 | -8.4545 | -9.6437 | -10.901 | -12.223 | -13.607 | -15.047 | -16.538 |
| 7. | -21.239 | -22.848 | -24.456 | -26.049 | -27.609 | -29.116 | -30.548 | -31.882 |
| 8. | -35.017 | -35.667 | -36.061 | -36.159 | -35.920 | -35.298 | -34.246 | -32.714 |
| 9. | -24.718 | -20.724 | -15.976 | -10.412 | -3.9693 | 3.4106 | 11.787 | 21.218 |

Función de Bessel Ker(x)

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0. | | 2.4205 | 1.7331 | 1.3372 | 1.0626 | 0.8559 | 0.6931 | 0.5614 |
| 1. | 0.2867 | 0.2228 | 0.1686 | 0.1235 | 0.08513 | 0.05293 | 0.02603 | 0.03691 |
| 2. | -0.04166 | -0.05111 | -0.05834 | -0.06367 | -0.06737 | -0.06969 | -0.07083 | -0.07097 |
| 3. | -0.06703 | -0.06468 | -0.06198 | -0.05903 | -0.05590 | -0.05264 | -0.04932 | -0.04597 |
| 4. | -0.03618 | -0.03308 | -0.03011 | -0.02726 | -0.02456 | -0.02200 | -0.01960 | -0.01734 |
| 5. | -0.01151 | -0.019865 | -0.018359 | -0.016989 | -0.015749 | -0.014632 | -0.013632 | -0.012740 |
| 6. | -0.016530 | -0.011295 | 0.013191 | 0.016991 | 0.011017 | 0.011278 | 0.011488 | 0.011653 |
| 7. | 0.011922 | 0.011951 | 0.011956 | 0.011940 | 0.011907 | 0.011860 | 0.011800 | 0.011731 |
| 8. | 0.011486 | 0.011397 | 0.011306 | 0.011216 | 0.011126 | 0.011037 | 0.0109511 | 0.0108675 |
| 9. | 0.016372 | 0.015681 | 0.015030 | 0.014422 | 0.013855 | 0.013330 | 0.012846 | 0.012402 |

Función de Kei(x)

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0. | -0.7854 | -0.7769 | -0.7581 | -0.7331 | -0.7038 | -0.6716 | -0.6374 | -0.6022 |
| 1. | -0.4950 | -0.4601 | -0.4262 | -0.3933 | -0.3617 | -0.3314 | -0.3026 | -0.2752 |
| 2. | -0.2024 | -0.1812 | -0.1614 | -0.1431 | -0.1262 | -0.1107 | -0.09644 | -0.08342 |
| 3. | -0.05112 | -0.04240 | -0.03458 | -0.02762 | -0.02145 | -0.01600 | -0.01123 | -0.007077 |
| 4. | 0.02198 | 0.04386 | 0.016194 | 0.07661 | 0.08826 | 0.019721 | 0.01038 | 0.01083 |
| 5. | 0.01119 | 0.01105 | 0.01082 | 0.01051 | 0.01014 | 0.019716 | 0.019255 | 0.018766 |
| 6. | 0.017216 | 0.016696 | 0.016183 | 0.015681 | 0.015194 | 0.014724 | 0.014274 | 0.013846 |
| 7. | 0.012700 | 0.012366 | 0.012056 | 0.011770 | 0.011507 | 0.011267 | 0.011048 | 0.0108498 |
| 8. | 0.013696 | 0.012440 | 0.011339 | 0.010438 | -0.014449 | -0.011149 | -0.011742 | -0.012233 |
| 9. | -0.013192 | -0.013368 | -0.013486 | -0.013552 | -0.013574 | -0.013557 | -0.013508 | -0.013430 |

APENDICE I-2

TRANSFORMADAS DE FOURIER

1. Series de Fourier

Una función $F(x)$ puede expresarse por una serie infinita de la forma

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad (1)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

a_n y b_n se conocen como coeficientes de Fourier. Para una función de intervalo $2L$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (4)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

La serie (1) puede ponerse en forma compleja

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(inx) \quad (7)$$

donde

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \exp(-inx) dx \quad n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots \quad (8)$$

Si $F(x)$ es una función par $F(x) = F(-x)$ y si es integrable en el intervalo $(-L, L)$

$$\int_{-L}^L F(x) dx = 2 \int_0^L F(x) dx \quad (9)$$

Si $F(x)$ es una función impar $F(x) = -F(-x)$

$$\int_{-L}^L F(x) dx = 0$$

En las series de Fourier de funciones pares aparecen sólo los términos del coseno mientras que en las funciones impares aparecen sólo los términos en seno. La función $F(x)$ cumple las condiciones de Dirichlet es decir $F(x)$ tiene solamente un número finito de máximos y mínimos en el intervalo de la función y un número finito de discontinuidades en el citado intervalo.

La identidad de Parseval establece

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L (F(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (10)$$

y por el teorema de Lebesgue-Rieman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L F(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (12)$$

2. Integral de Fourier

La ec. (1) puede escribirse

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^L F(u) \left(\cos\left(\frac{k\pi u}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{k\pi u}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) du \right] \quad (13)$$

Si

$$2L \rightarrow \infty \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx = 0 \quad \frac{\pi}{L} \rightarrow 0$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\xi=0}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} F(u) \cos \xi(x-u) d\xi du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \xi(x-u) d\xi du \quad (14)$$

La ec. (14) se conoce como integral de Fourier y para su aplicación debe cumplir las condiciones de Dirichlet y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx$$

sea absolutamente convergente.

La ec. (14) puede expresarse en la forma

$$F(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_L \exp(i\xi x) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi u) F(u) du d\xi \quad (15)$$

$$F(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin L(x-u)}{(x-u)} F(u) du \quad (16)$$

Las ec. (14), (15) y (16) pueden escribirse

$$F(x) = \int_0^{\infty} [a(u) \cos(xu) + b(u) \sin(xu)] du \quad (17)$$

donde

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos(ux) dx \quad b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sin(ux) dx$$

Para $F(x)$ par

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(ux) dx \int_0^{\infty} F(u) \cos(ux) du \quad (18)$$

Para $F(x)$ impar

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(ux) dx \int_0^{\infty} F(u) \sin(ux) du \quad (19)$$

3. Transformada de Fourier

Se define la transformada de Fourier de una función $F(x)$ que cumple las condiciones de Dirichlet y convergencia absoluta de su integral $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx$

$$L[F(x)] \equiv f_F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \exp(i\xi x) dx \quad (20)$$

y su ecuación de inversión

$$F(x) = f_F^{-1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp(-ix\xi) d\xi \quad (21)$$

Para las derivadas de la función $F(x)$ se tiene

$$L_F \left[\frac{dF(x)}{dx} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} F(x) \exp(i\xi x) dx = \left[\frac{F(x)}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\xi x) \right]_{-\infty}^{\infty} - i\xi f_F(\xi)$$

y si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = 0$

$$L \left[\frac{dF(x)}{dx} \right] = -i\xi f_F(\xi) \quad (22)$$

y en forma análoga la derivada n

$$L_F \left[\frac{d^n F(x)}{dx^n} \right] = (-i\xi)^n f_F(\xi) \quad (23)$$

Si $\frac{d^{n-1} F(x)}{dx^{n-1}} \rightarrow 0$ para $|x| \rightarrow \infty$

Para una función de dos variables $F(x, y)$ la transformada de Fourier puede escribirse

$$L[F(x, y)] \equiv f_F(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) \exp(i\xi x) dx \quad (24)$$

con la inversión

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_F(\xi, \eta) \exp(-i\xi x) d\xi \quad (25)$$

y análogamente

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \exp(i\eta y) dy \quad (26)$$

con la inversión

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \exp[-i(\xi x + \eta y)] d\xi d\eta \quad (27)$$

Las ecuaciones anteriores pueden extenderse a m variables

$$L[F(x_1, x_2, \dots, x_m)] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2, \dots) \exp[i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots)] dx_1 \dots dx_m \quad (28)$$

y la inversión

$$F(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}m} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \xi_2, \dots) \exp[-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots)] d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m \quad (29)$$

4. Convolución de Fourier

Si $f_{F_1}(\xi)$ y $f_{F_2}(\xi)$ son las transformadas de Fourier de $F_1(x)$ y $F_2(x)$ se denomina convolución de Fourier $F_1(x) * F_2(x)$ a la transformada del producto $F(x) F(x)$ es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{F_1}(\xi) f_{F_2}(\xi) \exp(-i\xi x) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta) F_2(x-\eta) d\eta = F_1(x) * F_2(x) \quad (30)$$

puesto que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta) F_2(x-\eta) d\eta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f_{F_2}(\xi) \exp[-i\xi(x-\eta)] d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{F_2}(\xi) \exp(-i\xi x) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta) \exp(i\xi \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f_{F_1}(\xi) f_{F_2}(\xi) \exp(-i\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (31)$$

En el caso $x=0$ y $F_1(\eta) = F_2(-\eta) = F(\eta)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_F(\xi)]^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\eta)]^2 d\eta \quad (32)$$

conocida como relación de Parseval para las transformadas de Fourier.

5. Transformadas del seno de Fourier

Se define la transformada del seno de Fourier de la función $F(x)$

$$L_F^s[F(x)] \equiv f_F^s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x) \sin(\xi x) dx \quad (33)$$

y su inversión

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_F^s(\xi) \sin(x\xi) d\xi \quad (34)$$

y para las derivadas de $F(x)$

$$L_F^s\left[\frac{dF(x)}{dx}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dF(x)}{dx} \sin(\xi x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[F(x) \sin(\xi x) \right]_0^{\infty} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi \int_0^{\infty} F(x) \cos(\xi x) dx$$

y si $F(x) = 0$ si $x \rightarrow \infty$

$$L_F^s\left[\frac{dF(x)}{dx}\right] = -\xi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x) \cos(\xi x) dx = -\xi f_F^c(\xi) \quad (35)$$

donde $f_F^c(\xi)$ es la transformada del coseno de Fourier, análogamente

$$L_F^s\left[\frac{d^2F(x)}{dx^2}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{dF(x)}{dx} \sin(\xi x) \right]_0^{\infty} - \xi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dF(x)}{dx} \cos(\xi x) dx$$

y si $\frac{dF(x)}{dx} = 0$ para $x = \infty$

$$L_F^s\left[\frac{d^2F(x)}{dx^2}\right] = -\xi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[F(x) \cos(\xi x) \right]_0^{\infty} - \xi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(\xi x) dx = \xi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} F(0) - \xi^2 f_F^s(\xi) \quad (36)$$

6. Transformadas del coseno de Fourier

Se define la transformada del coseno de Fourier de la función $F(x)$

$$L_F^c[F(x)] \equiv f_F^c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x) \cos(\xi x) dx \quad (37)$$

con la inversión

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_F^c(\xi) \cos(\xi x) d\xi \quad (38)$$

y para las derivadas de $F(x)$

$$L_F^c \left[\frac{dF(x)}{dx} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dF(x)}{dx} \cos(\xi x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[F(x) \cos(\xi x) \right]_0^{\infty} + \xi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x) \sin(\xi x) dx$$

y si $F(x) = 0 \quad x \rightarrow \infty$

$$L_F^c \left[\frac{dF(x)}{dx} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F(0) + \xi f_F^s(\xi) \quad (39)$$

análogamente

$$L_F^c \left[\frac{d^2 F(x)}{dx^2} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{dF(x)}{dx} \cos(\xi x) \right]_0^{\infty} + \xi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dF(x)}{dx} \sin(\xi x) dx$$

y si $\frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad x \rightarrow \infty$

$$L_F^c \left[\frac{d^2 F(x)}{dx^2} \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} F'(0) - \xi^2 f_F^c(\xi) \quad (40)$$

En general si $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{d^{m-1} F(x)}{dx^{m-1}} \right] = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{d^{m-1} F(x)}{dx^{m-1}} \right] = A_{m-1}$

$$f_F^{(m),c} = -A_{m-1} + \xi f_F^{(m-1),s}(\xi) \quad (41)$$

y para las transformadas del seno

$$f_F^{(m),s}(\xi) = -\xi f_F^{(m-1),c}(\xi) \quad (42)$$

y de (41) y (42)

$$f_F^{(m),c}(\xi) = -A_{m-1} - \xi^2 f_F^{(m-2),c} \quad (43)$$

$$f_F^{(m),c}(\xi) = \xi A_{m-2} - \xi^2 f_F^{(m-2),s} \quad (44)$$

Igual que para las transformadas de Fourier, las transformadas del seno y coseno de Fourier se pueden aplicar a múltiples variables y así para el caso de dos variables

$$L_F^s [F(x, y)] \equiv f_F^s(\xi, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(x, y) \cdot \sin(\xi x) dx \quad (45)$$

$$L_F^c [F(x, y)] \equiv f_F^c(\xi, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(x, y) \cos(\xi x) dx \quad (46)$$

con las inversiones

$$F(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_F^s(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi \quad (47)$$

$$F(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_F^c(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \quad (48)$$

análogamente

$$L_F^s [f_F^s(\xi, y)] \equiv f_F^s(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_F^s(\xi, y) \sin(\eta y) dy \quad (49)$$

$$L_F^c [f_F^c(\xi, y)] \equiv f_F^c(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_F^c(\xi, y) \cos(\eta y) dy \quad (50)$$

y

$$F(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f_F^s(\xi, \eta) \sin(\xi x) \sin(\eta y) d\xi d\eta \quad (51)$$

$$F(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f_F^c(\xi, \eta) \cos(\xi x) \cos(\eta y) d\xi d\eta \quad (52)$$

$$f_F^s(\xi, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_F^s(\xi, \eta) \sin(\eta y) d\eta \quad (53)$$

$$f_F^c(\xi, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_F^c(\xi, \eta) \cos(\eta y) d\eta \quad (54)$$

La convolución de Fourier es también aplicable a las transformadas del seno y coseno de Fourier.

Si $f_{F_1}^c(\xi)$ y $f_{F_2}^c(\xi)$ son las transformadas del coseno de Fourier de las funciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_{F_1}^c(\xi) f_{F_2}^c(\xi) \cos(x\xi) d\xi &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_{F_1}^c(\xi) \cos(x\xi) d\xi \int_0^{\infty} F_2(\eta) \cos(\xi\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} F_2(\eta) d\eta \int_0^{\infty} f_{F_1}^c(\xi) [\cos((x-\eta)\xi) + \cos((x+\eta)\xi)] d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F_2(\eta) [F_1(x-\eta) + F_1(x+\eta)] d\eta \end{aligned}$$

(55)

Análogamente para el caso de las transformadas del seno y coseno de Fourier

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_{F_1}^c(\xi) f_{F_2}^s(\xi) \sin(x\xi) d\xi &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_{F_1}^c(\xi) \sin(x\xi) d\xi \int_0^{\infty} F_2(\eta) \sin(\eta\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} F_2(\eta) d\eta \int_0^{\infty} f_{F_1}^c(\xi) [\cos((x-\eta)\xi) - \cos((x+\eta)\xi)] d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} F_2(\eta) [F_1(x-\eta) - F_1(x+\eta)] d\eta \end{aligned}$$

(56)

Para $F_1(x) = F_2(x)$ y $x=0$ en la ec. (55)

$$\int_0^{\infty} [f_{F_1}^c(\xi)]^2 d\xi = \int_0^{\infty} [F_1(\eta)]^2 d\eta \quad (57)$$

y para la transformada del seno

$$\int_0^{\infty} [f_{F_1}^s(\xi)]^2 d\xi = \int_0^{\infty} [F_1(\eta)]^2 d\eta \quad (58)$$

TABLA I-2 (1)

Transformadas de Fourier

| $f_F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \exp(-i\xi x) dx$ | $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_F(\xi) \exp(ix\xi) d\xi$ |
|---|--|
| $f_F(\xi)$ | $F(x)$ |
| (1) $\sqrt{2\pi} \delta(\xi)$ | 1 |
| (2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ | $\delta(x)$ |
| (3) $\frac{1}{ \lambda \sqrt{2\pi}} \exp(-i\mu\xi/\lambda)$ | $\delta(\lambda x + \mu) \quad \lambda \neq 0$ |
| (4) $(i\xi)^n / \sqrt{2\pi}$ | $\delta^n(x)$ |
| (5) $2\pi i^{-n} \delta^n(\xi)$ | x^n |
| (6) $\frac{2 \sin(b\xi)}{\xi}$ | $\begin{matrix} 1 & x < b \\ 0 & x > b \end{matrix}$ |
| (7) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{b} \exp(-b \xi)$ | $\frac{1}{x^2 + b^2} \quad \operatorname{Re}(b) > 0$ |
| (8) $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{i\xi}{b} \exp(-b \xi)$ | $\frac{x}{x^2 + b^2} \quad \operatorname{Re}(b) > 0$ |
| (9) $i^n \xi^n f_F(\xi)$ | $F^n(x)$ |
| (10) $i^n \frac{d^n f_F(\xi)}{d\xi^n}$ | $x^n F(x)$ |
| (11) $\frac{1}{b} f_F\left(\frac{\xi - \gamma}{b}\right)$ | $F(bx) \exp(i\gamma x)$ |
| (12) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{b} \frac{1}{(b^2 + \xi^2)}$ | $\exp(-b x)$ |
| (13) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2bi\xi}{(b^2 + \xi^2)}$ | $x \exp(-b x)$ |
| (14) $\frac{1}{a\sqrt{2}} \exp(-\xi^2/4a^2)$ | $\exp(-a^2 x^2)$ |
| (15) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \xi < a, 0, \xi > a$ | $\frac{\sin(ax)}{x}$ |
| (16) $\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\exp[ia(\omega + \xi)] - \exp[ib(\omega + \xi)]}{\xi} \right)$ | $\begin{matrix} \exp(i\omega x) & a < x < b \\ 0 & x < a, x > b \end{matrix}$ |
| (17) $\frac{i}{\sqrt{2\pi}(\omega + \xi + a)}$ | $\exp(-ax + i\omega x), \begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$ |
| (18) $\frac{1}{ \xi }$ | $\frac{1}{ x }$ |
| (19) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(1-s)}{ \xi ^{1-s}} \sin(\pi s/2)$ | $x^{-s} \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ |
| (20) $\frac{[(a^2 + \xi^2)^{1/2} + a]^{1/2}}{(a^2 + \xi^2)^{1/2}}$ | $\frac{\exp(-a x)}{\sqrt{ x }}$ |
| (21) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cosh(a/2) \cosh(\xi/2)}{\cosh(\xi) + \cosh(a)}$ | $\frac{\cosh(ax)}{\cosh(\pi x)} \quad \pi < a < \pi$ |

$$\begin{aligned}
 & f_F(\xi) \\
 (22) \quad & \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{\sinh(a)}{\cosh(\xi) + \cosh(a)} \\
 (23) \quad & \sqrt{2}\pi^3 \exp(\pi\xi) [1 + \exp(\pi\xi)]^2 \\
 (24) \quad & \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} J_0(a\xi) \\
 (25) \quad & \frac{\sqrt{\pi}}{2} J_0(a\sqrt{b^2 - \xi^2}) \quad \begin{array}{l} |\xi| > b \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} |\xi| > b \\ |\xi| < b \end{array} \\
 (26) \quad & \frac{\sqrt{\pi}}{2} J_0(a\sqrt{b^2 + \xi^2}) \\
 (27) \quad & \frac{\sqrt{\pi}}{2} J_0(a\sqrt{\xi^2 - b^2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F(x) \\
 & \frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)} \quad -\pi < a < \pi \\
 & \frac{x}{\cosh(x)} \\
 & \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{0} \quad \begin{array}{l} |x| > a \\ |x| < a \end{array} \\
 & \frac{\sin[b\sqrt{a^2 + x^2}]}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\
 & \frac{\cos[b\sqrt{a^2 + x^2}]}{\sqrt{a^2 + x^2}}, |x| < a; |x| > a, 0 \\
 & \frac{\cosh[b\sqrt{a^2 - x^2}]}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad |x| < a \\
 & 0 \quad |x| > a
 \end{aligned}$$

TABLA I-2 (2)

Transformadas del seno de Fourier

| $f_F^s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x) \operatorname{sen}(\xi x) dx$ | $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_F^s(\xi) \operatorname{sen}(x\xi) d\xi$ |
|---|--|
| $f_F^s(\xi)$ | $F(x)$ |
| (1) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1 - \cos(\xi a))}{\xi}$ | 1 $0 < x < a$ 0 $x > a$ |
| (2) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi}$ | $\frac{1}{x}$ |
| (3) $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| (4) $2\sqrt{\xi}$ | $x^{-3/2}$ |
| (5) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp(-a\xi)$ | $\frac{x}{a^2 + x^2}$ |
| (6) $\frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \xi \exp(-a\xi) \quad \xi > 0$ | $\frac{x}{(a^2 + x^2)^2}$ |
| (7) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2} (1 - \exp(-a\xi)) \quad \xi > 0$ | $\frac{x}{x(a^2 + x^2)}$ |
| (8) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi K_0(a\xi)$ | $\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \operatorname{Re} a > 0$ |
| (9) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi^{n-1} \Gamma(1-n) \cos(n\pi/2)$ | $x^{-n} \quad 0 < \operatorname{Re} n < 2$ |
| (10) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\xi}{a^2 + \xi^2}$ | $\exp(-ax)$ |
| (11) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2a\xi}{(a^2 + \xi^2)^2}$ | $x \exp(-ax)$ |
| (12) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} (n-1)! \frac{\operatorname{sen}[n \operatorname{arctg}(\xi/a)]}{\sqrt{(a^2 + x^2)^n}}$ | $x^{n-1} \exp(-ax)$ |
| (13) $\frac{1}{2^{3/2}} \frac{\xi}{a^3} \exp(-\xi^2/4a^2)$ | $x \exp(-a^2 x^2)$ |
| (14) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg}(\xi/a)$ | $x \exp(-ax)$ |
| (15) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \log \left[\frac{1+\xi}{1-\xi} \right]$ | $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ |
| (16) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \xi \quad 0 < \xi < \pi; \xi = \pi, 0$ | $\frac{\operatorname{sen} \pi x}{1-x^2}$ |
| (17) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{\sqrt{\xi}} J_1(2a\sqrt{\xi})$ | $\operatorname{sen}(a^2/x) \quad a > 0$ |
| (18) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} Y_0(2a\sqrt{\xi}) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} K_0(2a\sqrt{\xi})$ | $\frac{\operatorname{sen}(a^2/x)}{x}$ |
| (19) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-a\xi)}{\xi}$ | $\operatorname{arctg}(x/a) \quad a > 0$ |
| (20) 0 $\xi < a$ $\sqrt{\frac{\pi}{8}} \quad \xi = a$ $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \xi > a$ | $\frac{\cos(ax)}{x}$ |

| | $f_F^s(s)$ | $F(x)$ |
|------|---|--|
| (21) | $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi s}{2a}\right)$ | $\operatorname{csc}(ax)$ |
| (22) | $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\beta} \frac{\sinh(\pi s/\beta)}{\cosh(\pi s/\beta) + \cos(\pi a/\beta)}$ | $\frac{\cosh(ax)}{\sinh(\beta x)} \quad 0 < a < \beta$ |
| (23) | $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\beta} \frac{\sin(\pi a/2\beta) \sin(\pi s/2\beta)}{\cosh(\pi s/\beta) + \cos(\pi a/\beta)}$ | $\frac{\sinh(ax)}{\cosh(\beta x)} \quad 0 < a < \beta$ |

TABLA I-2(3)

Transformadas del coseno de Fourier

| $f_F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(x) \cos(\xi x) dx$ | $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_F(\xi) \cos(x\xi) d\xi$ |
|---|--|
| $f_F(\xi)$ | $F(x)$ |
| (1) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{\xi}$ | $\begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ |
| (2) $\frac{\pi}{2a} \exp(-a\xi)$ | $\frac{1}{x^2 + a^2}$ |
| (3) $\frac{b}{\xi^2 + b^2}$ | $\exp(-ax)$ |
| (4) $\frac{\Gamma(n) \cos(n \arctan(\xi/a^2))}{(\xi^2 + a^2)^{n/2}}$ | $x^{n-1} \exp(ax)$ |
| (5) $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-\xi^2/4a)$ | $\exp(-ax^2)$ |
| (6) $\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}$ | $x^{-1/2}$ |
| (7) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(1+\xi^2)}$ | $\exp(-x)$ |
| (8) $\exp(-\xi^2)$ | $\exp(-x^2)$ |
| (9) $\frac{\exp(-a\xi) - \exp(-b\xi)}{\pi \xi}$ | $\ln \left(\frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \right)$ |
| (10) $\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \xi < a \\ \frac{\pi}{4} & \xi = a \\ 0 & \xi > a \end{cases}$ | $\frac{\sin(ax)}{x}$ |
| (11) $\frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\xi^2/2) - \sin(\xi^2/2)]$ | $\sin(x^2/2)$ |
| (12) $\sqrt{\frac{\pi}{8a}} [\cos(\xi^2/4a) - \sin(\xi^2/4a)]$ | $\sin(ax^2)$ |
| (13) $\frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\xi^2/2) + \sin(\xi^2/2)]$ | $\cos(x^2/2)$ |
| (14) $\sqrt{\frac{\pi}{8a}} [\cos(\xi^2/4a) + \sin(\xi^2/4a)]$ | $\cos(bx^2)$ |
| (15) $\frac{1}{1+\xi^2}$ | $\operatorname{sech}(\pi x)$ |
| (16) $\frac{\pi \xi^{n-1} \sec(n\pi/2)}{2 \Gamma(n)}$ | x^{-n} |
| (17) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin(a(1-\xi))}{1-\xi} + \frac{\sin(a(1+\xi))}{1+\xi} \right]$ | $\begin{cases} \cos(x) & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ |
| (18) $\frac{\pi}{2a} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi \xi}{2a}\right)$ | $\operatorname{sech}(bx)$ |
| (19) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cosh(\sqrt{\pi} \xi/2)}{\cosh(\sqrt{\pi} \xi)}$ | $\frac{\cosh(\sqrt{\pi} x/2)}{\cosh(\sqrt{\pi} x)}$ |
| (20) $\sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} [\cos(2a\sqrt{\xi}) - \sin(2a\sqrt{\xi})]$ | $\frac{\exp(-a\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ |

2. TRANSFORMADAS FINITAS DE FOURIER

1. Transformadas finitas del seno de Fourier

Si la función $F(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo $0 \leq x \leq L_x$ y se define $\bar{f}_F^s(\xi)$ dada por

$$\bar{L}_F^s[F(x)] \equiv \bar{f}_F^s(\xi) = \int_0^{L_x} F(x) \sin(\xi x) dx \quad (1)$$

donde $\xi = \pi \frac{m}{L_x}$ la teoría de las series de Fourier establece

$$F(x) = \frac{2}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(x \xi) \bar{f}_F^s(\xi) \quad (2)$$

y para las derivadas de $F(x)$

$$\bar{L}_F^s \left[\frac{dF(x)}{dx} \right] = \int_0^{L_x} \frac{d}{dx} F(x) \sin(\xi x) dx = \left[F(x) \sin(\xi x) \right]_0^{L_x} - \xi \int_0^{L_x} F(x) \cos(\xi x) dx \quad (3)$$

si m de $\xi = \pi \frac{m}{L_x}$ es entero

$$\bar{L}_F^s \left[\frac{dF(x)}{dx} \right] = -\xi \bar{f}_F^c(\xi) \quad (4)$$

donde $\bar{f}_F^c(\xi)$ es la transformada finita del coseno de Fourier. Análogamente para la derivada segunda de $F(x)$

$$\bar{L}_F^s \left[\frac{d^2 F(x)}{dx^2} \right] = \left[\frac{dF(x)}{dx} \sin(\xi x) \right]_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{dF(x)}{dx} \xi \cos(\xi x) dx \quad (5)$$

y si m es entero el primer miembro del segundo término vale cero

$$\bar{L}_F^s \left[\frac{d^2 F(x)}{dx^2} \right] = \xi \left[F(x) \cos(\xi x) \right]_0^{L_x} - \xi^2 \int_0^{L_x} F(x) \sin(\xi x) dx = \xi [F(0) - (-1)^m F(L_x)] - \xi^2 \bar{f}_F^s(\xi) \quad (5a)$$

2. Transformadas finitas del coseno de Fourier

Con las mismas condiciones para $F(x)$ se define

$$L_F^c[F(x)] \equiv \bar{f}_F^c(\xi) = \int_0^{L_x} F(x) \cos(\xi x) dx \quad (6)$$

donde $\xi = \pi \frac{m}{L_x}$ y la inversión

$$F(x) = \frac{\bar{f}_F^c(0)}{L_x} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos(x \xi) f(\xi) \quad (7)$$

Para la derivada primera de $F(x)$ se cumple

$$\bar{L}_F^c \left[\frac{dF(x)}{dx} \right] = \int_0^{L_x} \frac{dF(x)}{dx} \cos(\xi x) dx = \left[F(x) \cos(\xi x) \right]_0^{L_x} + \xi \int_0^{L_x} F(x) \sin(\xi x) dx \quad (8)$$

6

$$\bar{L}_F^c \left[\frac{dF(x)}{dx} \right] = (-1)^m F(L_x) - F(0) + \xi \bar{f}_F^c(\xi) \quad (9)$$

y para la derivada segunda

$$\bar{L}_F^c \left[\frac{d^2 F(x)}{dx^2} \right] = \left[\frac{dF(x)}{dx} \cos(\xi x) \right]_0^{L_x} + \xi \int_0^{L_x} \frac{dF(x)}{dx} \sin(\xi x) dx = (-1)^m F'(L_x) - F'(0) - \xi^2 \bar{f}_F^c(\xi) \quad (10)$$

Por el mismo procedimiento pueden obtenerse las derivadas superiores tanto para el coseno como para el seno.

3. Convolución de transformadas finitas de Fourier

Si $\bar{f}_{F_1}^s(\xi)$ y $\bar{f}_{F_2}^s(\xi)$ son las transformadas finitas del seno de Fourier de las funciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}_{F_1}^s(\xi) \bar{f}_{F_2}^s(\xi) \cos(x \xi) &= -\frac{1}{2} F_1(x) * F_2(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(x-\eta) F_2(\eta) d\eta \\ &= -\frac{1}{2} F_1(x) * F_2(x) \end{aligned} \quad (11)$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} F_1(x) * F_2(x) \cos(\xi x) dx &= -2 \bar{f}_{F_1}^s(\xi) \bar{f}_{F_2}^s(\xi) \\ \bar{L}_F^c [F_1(x) * F_2(x)] &= -2 \bar{f}_{F_1}^s(\xi) \bar{f}_{F_2}^s(\xi) \end{aligned} \quad (12)$$

análogamente

$$\bar{L}_F^s [F_1(x) * F_2(x)] = 2 \bar{f}_{F_1}^s(\xi) \bar{f}_{F_2}^s(\xi) \quad (13)$$

y

$$\bar{L}_F^c [F_3(x) * F_4(x)] = 2 \bar{f}_{F_1}^c(\xi) \bar{f}_{F_2}^c(\xi) \quad (14)$$

un tratamiento más completo puede hallarse en los libros de Churchill (1944) pág. 274, Sneddon (1972) pág. 430, indicados en la bibliografía de los capítulos anteriores.

4. Transformadas finitas del seno y coseno de Fourier de múltiples variables.

Para una función $F(x, y)$ que cumple las condiciones de Dirichlet en los intervalos $0 \leq x \leq L_x$ y $0 \leq y \leq L_y$ se define la transformada finita del seno de Fourier

$$\bar{f}_F^s(\xi, \eta) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} F(x, y) \operatorname{sen}(\xi x) \operatorname{sen}(\eta y) dx dy \quad (15)$$

con la inversión

$$F(x, y) = \frac{2}{L_x} \frac{2}{L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_F^s(\xi, \eta) \operatorname{sen}(x, \xi) \operatorname{sen}(y, \eta) \quad (16)$$

donde

$$\xi = \frac{\pi m}{L_x} \quad \eta = \frac{\pi n}{L_y}$$

y para las derivadas se sigue el mismo procedimiento que en el apartado 2,2 de este Apéndice, así para las derivadas segundas

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \operatorname{sen}(\xi x) dx = -\xi^2 [F(x, y) \cos(\xi x)]_0^{L_x} - \xi^2 \int_0^{L_x} F(x, y) \operatorname{sen}(\xi x) dx \quad (17)$$

y si el primer término del segundo miembro vale cero

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} \sin(\xi x) \sin(\eta y) dx dy = -\xi^2 \bar{f}_F^{\xi}(\xi, \eta) \quad (18)$$

y en forma análoga

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} \sin(\xi x) \sin(\eta y) dx dy = -\eta^2 \bar{f}_F^{\eta}(\xi, \eta) \quad (19)$$

y

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left(\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} \right) \sin(\xi x) \sin(\eta y) dx dy = -(\xi^2 + \eta^2) \bar{f}_F^{\xi, \eta}(\xi, \eta) \quad (20)$$

donde

$$-(\xi^2 + \eta^2) = -\pi^2 \left[\left(\frac{m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right]$$

5. Extensión de las transformadas finitas de Fourier

Se conocen como transformadas finitas de Sturm-Liouville han sido desarrolladas por Eringer y Curchill, véase bibliografía, y permiten elegir la transformada apropiada para unas condiciones de contorno determinadas. Se define una transformada finita

$$\bar{L}_n[F(x)] = \bar{f}(\xi_m) = \int_a^b p(x) \phi_m(x) F(x) dx \quad (21)$$

con la inversión

$$L^{-1}[\bar{f}(\xi_m)] = F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}(\xi_m) \phi_m(x) \quad (22)$$

donde $\phi_m(x)$ y ξ_m son las autofunciones y autovalores del problema de Sturm-Liouville.

TABLA I-2(4)

Transformadas finitas del seno de Fourier

| $F(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_F^s(n) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ | $\bar{f}_F^s(n) = \int_0^a F(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$ |
|---|--|
| $F(x)$ | $\bar{f}_F^s(n)$ |
| (1) 1 | $\frac{a}{\pi n} [1 + (-1)^{n+1}]$ |
| (2) x | $(-1)^{n+1} \frac{a^2}{\pi n}$ |
| (3) $1 - \frac{x}{a}$ | $\frac{a}{\pi n}$ |
| (4) $\begin{matrix} x & 0 \leq x \leq a/2 \\ a-x & a/2 \leq x \leq a \end{matrix}$ | $\frac{2a^2}{(\pi n)^2} \sin(n\pi/2)$ |
| (5) x^2 | $\frac{a^3}{\pi n} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} - \frac{2a^3 [1 - (-1)^n]}{(\pi n)^2}$ |
| (6) x^3 | $(-1)^n \frac{a^4}{\pi^2} \left(\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right)$ |
| (7) $x(a^2 - x^2)$ | $(-1)^{n+1} \frac{6a^4}{\pi^2 n^3}$ |
| (8) $x(a-x)$ | $\frac{2a^3}{\pi^2 n^3} (1 - (-1)^n)$ |
| (9) $\exp(kx)$ | $\frac{\pi n a}{\pi^2 n^2 + k^2 a^2} [1 - (-1)^n \exp(ka)]$ |
| (10) $\cos(kx)$ | $\frac{\pi n a}{\pi^2 n^2 - k^2 a^2} [1 - (-1)^n \cos(ka)], n \neq \frac{ka}{\pi}$ |
| (11) $\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right), m, \text{entero}$ | $\frac{2a}{\pi(n^2 - m^2)} [1 - (-1)^{m+n}] \quad n \neq m$ |
| (12) $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), m, \text{entero}$ | $\begin{matrix} 0 & m \neq n \\ a/2 & m = n \end{matrix}$ |

TABLA I-2(5)

Transformadas finitas del coseno de Fourier

$$F(x) = \frac{1}{a} \bar{f}_F^c(0) + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \bar{f}_F^c(n) \quad \bar{f}_F^c(n) = \int_0^a F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

| $F(x)$ | $\bar{f}_F^c(n)$ |
|--|--|
| (1) 1 | $\begin{cases} a & n=0 \\ 0 & n=1,2,3,\dots \end{cases}$ |
| (2) $\begin{cases} 1 & 0 < x < a/2 \\ -1 & a/2 < x < a \end{cases}$ | $\begin{cases} 0 & n=0 \\ (2a/\pi n) \operatorname{sen}(n\pi/2) & n=1,2,3,\dots \end{cases}$ |
| (3) x | $\begin{cases} a^2/2 & n=0 \\ (a/\pi n)^2 [(-1)^n - 1] & n=1,2,3,\dots \end{cases}$ |
| (4) x ² | $\begin{cases} a^3/3 & n=0 \\ \frac{2a^3}{\pi^2 n^2} (-1)^n & n=1,2,3,\dots \end{cases}$ |
| (5) $(1 - \frac{x}{a})^2$ | $\begin{cases} \frac{a^3}{3} & n=0 \\ \frac{2a}{\pi^2 n^2} & n=1,2,3,\dots \end{cases}$ |
| (6) | $\begin{cases} \frac{a^4}{4} & n=0 \\ \frac{3a^4}{\pi^2 n^2} (-1)^n + \frac{6a^4}{\pi^4 n^4} [(-1)^n - 1] & n=1,2,3,\dots \end{cases}$ |
| (7) exp(kx) | $\frac{a^2 k}{a^2 k^2 + n^2 \pi^2} [(-1)^n \exp(ka) - 1]$ |
| (8) $\frac{\cosh[c(a-x)]}{\operatorname{senh}(ca)}$ | $\frac{a^2 c}{c^2 a^2 + n^2 \pi^2}$ |
| (9) sen(kx) | $\frac{a^2 k}{\pi^2 n^2 - a^2 k^2} [(-1)^n \cos(ka) - 1] \quad n \neq \frac{ka}{\pi}$ |
| (10) $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right), m, \text{entero}$ | $\begin{cases} 0 & n=m \\ \frac{ma}{\pi(n^2 - m^2)} [(-1)^{n+m} - 1] & n \neq m \end{cases}$ |

APENDICE I-3

1. TRANSFORMADAS DE HANKEL

1. Transformadas de Fourier con simetría radial

Si una función $F(x_1, x_2)$ es función de la variable $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ la transformada de Fourier vale

$$f_F(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F[(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}] \exp[i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)] dx_1 dx_2 \quad (1)$$

y en coordenadas cilíndricas si

$$x_1 = r \cos \theta \quad x_2 = r \sin \theta \quad \xi_1 = \rho \cos \varphi \quad \xi_2 = \rho \sin \varphi$$

$$dx_1 dx_2 = r d\theta dr \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = r \rho \cos(\theta - \varphi)$$

$$f_F(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r F(r) dr \int_0^{2\pi} \exp[i \rho r \cos(\theta - \varphi)] d\theta$$

Utilizando la representación integral de las funciones de Bessel

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i \rho r \cos(\theta - \varphi)] d\theta = J_0(\rho r)$$

y

$$f_F(\xi_1, \xi_2) = \int_0^{\infty} r F(r) J_0(\rho r) dr \quad (2)$$

y si se define la transformada de Hankel de grado cero de la forma

$$L_{H,0}[F(r)] \equiv f_{H,0}(\rho) = \int_0^{\infty} r F(r) J_0(\rho r) dr \quad (3)$$

$$f_F(\xi_1, \xi_2) = f_{H,0}(\rho) \quad \rho = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$$

El resultado puede generalizarse a n dimensiones obteniéndose la relación

$$\rho^{\frac{n}{2}-1} f_{H,\frac{n}{2}-1}(\rho) = \int_0^{\infty} r [r^{\frac{n}{2}-1} F(r)] J_{\frac{n}{2}-1}(\rho r) dr \quad (3)$$

y si $g^{\frac{n}{2}-1} f_{H, \frac{n}{2}-1}(g) \equiv f_{H, \nu}(g) \quad r^{\frac{n}{2}-1} F(r) = F_1(r)$

$$f_{H, \nu}(g) = \int_0^{\infty} r^{\nu} F_1(r) J_{\nu}(gr) dr \quad (4)$$

$f_{H, \nu}(g)$ es la transformada de Hankel de grado ν y la inversión

$$F_1(r) = \int_0^{\infty} f_{H, \nu}(g) g J_{\nu}(rg) dr \quad (5)$$

2. Derivadas de las funciones de Hankel

Si

$$f_{H, \nu}(\xi) \equiv L_{H, \nu}[F(r)] = \int_0^{\infty} r F(r) J_{\nu}(\xi r) dr \quad (6)$$

$$L_{H, \nu}\left[\frac{dF(r)}{dr}\right] = \int_0^{\infty} r \frac{dF(r)}{dr} J_{\nu}(\xi r) dr = \left[r F(r) J_{\nu}(\xi r)\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} F(r) \frac{d}{dr} [r J_{\nu}(\xi r)] dr \quad (7)$$

y por la relación entre funciones de Bessel, Apéndice I

$$\frac{d}{dr} [r J_{\nu}(\xi r)] = (1-\nu) J_{\nu}(\xi r) + \xi r J_{\nu-1}(\xi r)$$

y si $F(r)=0$ en $r=\infty$

$$L_{H, \nu}\left[\frac{dF(r)}{dr}\right] = (\nu-1) \int_0^{\infty} F(r) J_{\nu}(\xi r) dr - \xi f_{H, \nu-1}(\xi) \quad (7)$$

o teniendo en cuenta

$$2\nu \int_0^{\infty} F(r) J_{\nu}(\xi r) dr = \xi f_{H, \nu-1}(\xi) + \xi f_{H, \nu+1}(\xi)$$

$$L_{H, \nu}\left[\frac{dF(r)}{dr}\right] = -\xi \left[\frac{\nu+1}{2\nu} f_{H, \nu-1} - \frac{\nu-1}{2\nu} f_{H, \nu+1}(\xi) \right] \quad (8)$$

análogamente

$$L_{H, \nu}\left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2}\right] = \int_0^{\infty} \frac{d^2 F(r)}{dr^2} r J_{\nu}(\xi r) dr = -\xi \int_0^{\infty} \frac{dF(r)}{dr} r J'_{\nu}(\xi r) dr \quad (9)$$

Para $F(r)=0$ $r=\infty$

y si $\frac{d}{dr} [r J'_v(r\xi)] = -\left(\xi^2 - \frac{v^2}{r^2}\right) r J_v(\xi r)$

$$\int_0^\infty r \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{v^2}{r^2} F(r) \right] J_v(\xi r) dr = -\xi^2 f_{H,v}(\xi) \quad (10)$$

y para $v=0$

$$\int_0^\infty r \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right] J_0(\xi r) dr = -\xi^2 f_{H,0}(\xi) \quad (11)$$

3. Relación de Parseval

Si $f_{H_1,v}(\xi)$ y $f_{H_2,v}(\xi)$ son las transformadas de Hankel de grado v de las funciones $F_1(r)$ y $F_2(r)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi f_{H_1,v}(\xi) f_{H_2,v}(\xi) d\xi &= \int_0^\infty \xi f_{H_1,v}(\xi) d\xi \int_0^\infty r F_2(r) J_v(\xi r) dr \\ &= \int_0^\infty r F_2(r) dr \int_0^\infty \xi f_{H_1,v}(\xi) J_v(\xi r) d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

y

$$\int_0^\infty \xi f_{H_1,v}(\xi) f_{H_2,v}(\xi) d\xi = \int_0^\infty r F_1(r) F_2(r) dr \quad (13)$$

La ec. (13) conduce al cálculo de transformadas de Hankel.

TABLA I-3(1)

Transformadas de Hankel

| $L_{H,\nu} [F(x)] = f_{H,\nu}(\xi) = \int_0^\infty F(x) J_\nu(\xi x) dx$ | | $F(x) = \int_0^\infty \xi f_{H,\nu}(\xi) J_\nu(x\xi) d\xi$ | |
|--|--|--|------------|
| $f_{H,\nu}(\xi)$ | | $F(x)$ | |
| (1) | $\frac{a^{\nu+1}}{\xi} J_{\nu+1}(\xi a)$ | $\begin{cases} x^\nu & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ | $\nu > -1$ |
| (2) | $\frac{a}{\xi} J_1(a\xi)$ | $\begin{cases} 1 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ | $\nu = 0$ |
| (3) | $\frac{4a}{\xi^2} J_1(a\xi) - \frac{2a^2}{\xi^2} J_0(a\xi)$ | $\begin{cases} a^2 - x^2 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$ | |
| (4) | $\xi^\nu (a^2 + \xi^2)^{-3/2} [(a + \nu \sqrt{a^2 + \xi^2})(a + \sqrt{a^2 + \xi^2})]^{-\nu}$ | $\exp(-ax)$ | |
| (5) | $a(a + \xi^2)^{-3/2}$ | $\exp(-ax)$ | $\nu = 0$ |
| (6) | $(\xi^2 + a^2)^{-1/2}$ | $\frac{\exp(-ax)}{x}$ | $\nu = 0$ |
| (7) | $\frac{(\xi^2 + a^2)^{1/2} - a}{\xi}$ | $x^{-2} \exp(-ax)$ | $\nu = 1$ |
| (8) | $\frac{1}{\xi} - \frac{a}{\xi(\xi^2 + a^2)^{1/2}}$ | $\frac{\exp(-ax)}{x}$ | $\nu = 1$ |
| (9) | $(\xi^2 + a^2)^{-1/2}$ | $\frac{\exp(-ax)}{x}$ | $\nu = 0$ |
| (10) | $\xi(\xi^2 + a^2)^{-3/2}$ | $\exp(-ax)$ | $\nu = 1$ |
| (11) | $(a^2 - \xi^2)^{-1/2}, 0, \xi > a$ | $\frac{\text{sen}(ax)}{x}$ | $\nu = 0$ |
| (12) | $\exp(-a\xi)$ | $\frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$ | $\nu = 0$ |
| (13) | $\frac{a}{\xi(\xi^2 - a^2)^{1/2}}, \xi > a; 0, \xi < a$ | $\frac{\text{sen}(ax)}{x}$ | $\nu = 1$ |
| (14) | $\arcsen\left(\frac{1}{\xi}\right), \xi > 1$ $\pi/2, \xi < 1$ | $\frac{\text{sen}(x)}{x^2}$ | $\nu = 0$ |

2. TRANSFORMADAS FINITAS DE HANKEL

1. *Funciones en series de Bessel* (se utiliza ν para el grado en lugar de n).

En forma análoga a las series de Fourier una función puede desarrollarse en series de Bessel

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_{\nu}(\xi_i r) = C_1 J_{\nu}(\xi_1 r) + C_2 J_{\nu}(\xi_2 r) + \dots \quad (1)$$

donde ξ_1, \dots, ξ_i son las raíces positivas de $J_{\nu}(\xi R) = 0$

Los coeficientes C_1, \dots, C_i están dados por la relación

$$\int_0^R r J_{\nu}(\xi_i r) F(r) dr = C_1 \int_0^R r J_{\nu}(\xi_1 r) J_{\nu}(\xi_i r) dr + \dots - C_i \int_0^R r J_{\nu}^2(\xi_i r) dr \quad (2)$$

y con las condiciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_{\nu}(\xi_i r) J_{\nu}(\xi_j r) dr &= 0 \quad i \neq j \\ \int_0^R r J_{\nu}^2(\xi_i r) dr &= \frac{R^2}{2} [J_{\nu+1}(\xi_i R)]^2 \quad i=j \\ C_i &= \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\xi_i R)} \int_0^R r F(r) J_{\nu}(\xi_i r) dr \end{aligned} \quad (3)$$

En el caso de $\nu=0$

$$C_i = \frac{2}{J_1^2(\xi_i R)} \int_0^R r F(r) J_0(\xi_i r) dr \quad (4)$$

Si ξ_i es una raíz de $J_{\nu}'(\xi_i R) = 0$

$$\int_0^R r J_{\nu}^2(\xi_i r) dr = \frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi_i^2 R^2}\right) J_{\nu}^2(\xi_i R) \quad (5)$$

Si ξ_i es una raíz de $\xi_i J_{\nu}'(\xi_i R) + \alpha J_{\nu}(\xi_i R) = 0$

$$\int_0^R r J_{\nu}^2(\xi_i r) dr = \frac{1}{2\xi_i^2} \left[R^2 \alpha^2 + (\alpha^2 \xi_i^2 - \nu^2) \right] J_{\nu}^2(\xi_i R) \quad (6)$$

2. Transformadas finitas de Hankel

Si una función $F(r)$ cumple las condiciones de Dirichlet, se define la transformada finita de Hankel de grado ν en el intervalo $(0, R)$

$$\bar{L}_{H,\nu}[F(r)] \equiv \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) = \int_0^R r F(r) J_\nu(\xi_i r) dr \quad (7)$$

a) Si ξ_i son las raíces de la ecuación $J_\nu(\xi_i R) = 0$

La inversión de la ec. (1) es

$$F(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\xi_i r)}{J_\nu^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) \quad (8)$$

Para $\nu = 0$

$$\bar{L}_{H,0}[F(r)] \equiv \bar{f}_{H,0}(\xi_i) = \int_0^R r F(r) J_0(\xi_i r) dr \quad (9)$$

$$F(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\xi_i r)}{J_0^2(\xi_i R)} \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \quad (10)$$

La transformada finita de Hankel de grado ν es en definitiva la transformada finita del operador lineal de Sturm-Liouville

$$L_H \equiv \frac{d}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2}$$

que corresponde a la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} + \left(\xi^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) F(r) = 0$$

con solución general

$$F(\xi r) = C_1(\xi) J_\nu(\xi r) + C_2(\xi) Y_\nu(\xi r)$$

donde en cada caso particular depende de los valores de ξ para las condiciones de contorno. Para $J_\nu(\xi_i R) = 0$ se obtiene la ec. (8).

b) Si ξ_i son las raíces de la ecuación $\xi_i J_\nu(\xi_i R) + a J_\nu(\xi_i R) = 0$

la inversión es

$$F(r) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_\nu(\xi_i r)}{[a^2 + (\xi_i^2 - \frac{\nu^2}{R^2})]} \frac{\bar{f}_{H,\nu}(\xi_i)}{J_\nu^2(\xi_i R)} \quad (11)$$

3. Propiedades de las transformadas finitas de Hankel

a) Si ξ_i es una raíz de la ecuación $J_\nu(\xi_i R) = 0$ La derivada de la transformada $\bar{f}_{H,\nu}(\xi_i)$ vale de acuerdo con la ec. 2-(7)

$$\bar{L}_{H,\nu} \left[\frac{dF(r)}{dr} \right] = \frac{\xi_i}{2\nu} \left[(\nu-1) \bar{L}_{H,\nu+1} [F(r)] + (\nu+1) \bar{L}_{H,\nu-1} [F(r)] \right] \quad (12)$$

y

$$\bar{L}_{H,\nu} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2 F(r)}{r^2} \right] = -R \xi_i F(R) J'_\nu(\xi_i R) - \xi_i^2 \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) \quad (13)$$

y si $F(R) = 0$ y $\nu = 0$

$$\bar{L}_{H,0} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right] = -\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \quad (14)$$

b) Si ξ_i es una raíz de la ecuación $\xi_i J_\nu(\xi_i R) + a J_\nu(\xi_i R) = 0$

$$\bar{L}_{H,\nu} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2 F(r)}{r^2} \right] = \left[r \frac{dF(r)}{dr} J_\nu(\xi_i r) - r \xi_i F(r) J'_\nu(\xi_i r) \right]_0^R - \xi_i^2 \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) \quad (15)$$

y para $\nu = 0$ y si $\frac{dF(r)}{dr} = a F(r)$

$$\bar{L}_{H,0} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} \right] = -\xi_i^2 \bar{f}_{H,0}(\xi_i) \quad (16)$$

4. Transformadas finitas de Fourier con intervalo de la función que no incluye el origen.

Son casos de coronas circulares y tubos; los problemas corresponden a resolver el problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno determinadas para cada caso particular.

a) Si $F(R_2) = F(R_0) = 0$ la transformada de Hankel vale

$$\bar{f}_{H,V}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) Y_V(\xi_i R_0) - J_V(\xi_i R_0) Y_V(\xi_i r)] dr \quad (17)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_V^2(\xi_i R_0) \bar{f}_{H,V}(\xi_i)}{J_V^2(\xi_i R_0) - J_V^2(\xi_i R_e)} [J_V(\xi_i r) Y_V(\xi_i R_0) - J_V(\xi_i R_0) Y_V(\xi_i r)] \quad (18)$$

donde ξ_i son las raíces de la ecuación

$$J_V(\xi_i R_e) Y_V(\xi_i R_0) - J_V(\xi_i R_0) Y_V(\xi_i R_e) = 0 \quad (19)$$

y

$$\bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{V^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2 J_V(\xi_i R_0)}{\pi J_V(\xi_i R_e)} F(R_e) - \frac{2}{\pi} F(R_0) - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) \quad (20)$$

o referida a R_e

$$\bar{f}_{H,V}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) Y_V(\xi_i R_e) - J_V(\xi_i R_e) Y_V(\xi_i r)] dr \quad (21)$$

$$b) \text{ En } r = R_0 \quad F(r) = F(R_0) \quad r = R_e \quad F'(r) = F'(R_0)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{H,V}(\xi_i) &= \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) Y_V(\xi_i R_e) - J_V(\xi_i R_e) Y_V(\xi_i r)] dr \\ &= \int_{R_0}^{R_e} r F(r) \zeta_0(\xi_i r) dr \end{aligned} \quad (22)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [J_V'(\xi_i R_e)]^2 \zeta_0(\xi_i r) \bar{f}_{H,V}(\xi_i)}{\left[1 - \left(\frac{V}{\xi_i R_e}\right)^2\right] J_V^2(\xi_i R_0) - J_V'^2(\xi_i R_e)} \quad (23)$$

donde ξ_i son las raíces de

$$J_1(\xi_i R_0) Y_V'(\xi_i R_e) - J_V'(\xi_i R_e) Y_V(\xi_i R_0) = 0 \quad (24)$$

y

$$\bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{V^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2 J_V(\xi_i R_0)}{\pi \xi_i J_V(\xi_i R_e)} F'(R_e) - \frac{2}{\pi} F(R_0) - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) \quad (25)$$

o referido a R_e

$$\bar{f}_{H,V}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) Y_V(\xi_i R_e) - J_V(\xi_i R_e) Y_V(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) C_0(\xi_i r) dr \quad (26)$$

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [J_V'(\xi_i R_0)]^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) C_0(\xi_i r)}{\left[1 - \left(\frac{V}{\xi_i R_e}\right)^2\right] J_V^2(\xi_i R_0) - J_V'^2(\xi_i R_e)} \quad (27)$$

(ξ_i) son las raíces positivas de (24)

$$\bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{V^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2}{\pi \xi_i} F(R_e) - \frac{2 J_V'(\xi_i R_e)}{\pi J_V(\xi_i R_0)} F(r) - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) \quad (28)$$

c) En $r = R_0$ $F'(r) = F'(R_0)$ $r = R_e$ $F(r) = F(R_e)$

$$\bar{f}_{H,V}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) Y_V'(\xi_i R_0) - J_V'(\xi_i R_0) Y_V(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) C_0(\xi_i r) dr \quad (29)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_V^2(\xi_i R_e) \bar{f}_{H,V}(\xi_i) C_0(\xi_i r)}{J_V'^2(\xi_i R_0) - \left[1 - \left(\frac{V}{\xi_i R_e}\right)^2\right] J_V^2(\xi_i R_e)} \quad (30)$$

ξ_i son las raíces positivas de

$$J_V(\xi_i R_e) Y_V'(\xi_i R_0) - J_V'(\xi_i R_0) Y_V(\xi_i R_e) = 0 \quad (31)$$

y

$$\bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{V^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2}{\pi \xi_i} F'(R_0) + \frac{2 J_V'(\xi_i R_0)}{\pi J_V(\xi_i R_e)} F(R_e) - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) \quad (32)$$

referido a R_e

$$\bar{f}_{H,V}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) Y_V(\xi_i R_e) - J_V(\xi_i R_e) Y_V(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) C_0(\xi_i r) dr \quad (33)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_{\nu}^2(\xi_i R_0) \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) C_0(\xi_i r)}{J_{\nu}^2(\xi_i R_0) - \left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_i R_0}\right)^2\right] J_{\nu}^2(\xi_i R_0)} \quad (34)$$

ξ_i son las raíces positivas de (31) y

$$\bar{L}_{H,\nu} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2}{\pi} F(R_0) - \frac{2 J_{\nu}(\xi_i R_0)}{\pi \xi_i J_{\nu}'(\xi_i R_0)} F'(R_0) - \xi_i^2 \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) \quad (35)$$

$$d) \quad r = R_0 \quad F'(r) = F'(R_0) \quad r = R_e \quad F'(r) = F'(R_e)$$

$$\bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_{\nu}(\xi_i r) Y_{\nu}'(\xi_i R_0) - J_{\nu}'(\xi_i R_0) Y_{\nu}(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) C_0(\xi_i r) dr \quad (36)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_{\nu}^2(\xi_i R_e) \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) C_0(\xi_i r)}{J_{\nu}^2(\xi_i R_0) \left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_i R_e}\right)^2\right] - J_{\nu}^2(\xi_i R_e) \left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_i R_0}\right)^2\right]} \quad (37)$$

donde ξ_i son las raíces positivas de

$$J_{\nu}'(\xi_i R_0) Y_{\nu}'(\xi_i R_e) - J_{\nu}'(\xi_i R_e) Y_{\nu}'(\xi_i R_0) \quad (38)$$

$$\bar{L}_{H,\nu} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2}{\pi \xi_i} \frac{J_{\nu}'(\xi_i R_0)}{J_{\nu}'(\xi_i R_e)} F'(R_e) - \frac{2}{\pi \xi_i} F'(R_0) - \xi_i^2 \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) \quad (39)$$

o referido a R_e

$$\bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_{\nu}(\xi_i r) Y_{\nu}'(\xi_i R_e) - J_{\nu}'(\xi_i R_e) Y_{\nu}(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) C_0(\xi_i r) dr \quad (40)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [J_{\nu}'(\xi_i R_0)]^2 \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) C_0(\xi_i r)}{J_{\nu}^2(\xi_i R_0) \left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_i R_e}\right)^2\right] - J_{\nu}^2(\xi_i R_e) \left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_i R_0}\right)^2\right]} \quad (41)$$

ξ_i son las raíces de (38)

$$\bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2}{\pi \xi_i} F'(R_0) - \frac{2 J_V'(\xi_i R_0)}{\pi \xi_i J_V'(\xi_i R_0)} F'(R_0) - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) \quad (42)$$

$$e) \quad r = R_0 \quad \left[\frac{dF(r)}{dr} - a_r F(r) \right]_{r=R_0} = 0 \quad r = R_0 \quad F'(r) = F'(R_0)$$

$$\bar{f}_{H,V}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_0} r F(r) [J_V(\xi_i r) Y_V'(\xi_i R_0) - J_V'(\xi_i R_0) Y_V(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_0} r F(r) C_0(\xi_i r) dr \quad (43)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 [J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) C_0(\xi_i r)}{\sum_{i=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_i R_0} \right)^2 \right]^2 [\xi_i J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]^2 - J_V'^2(\xi_i R_0) [a_r^2 + \xi_i^2 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_i R_0} \right)^2 \right]^2]} \quad (44)$$

ξ_i son las raíces positivas de

$$J_V'(\xi_i R_0) [\xi_i Y_V'(\xi_i R_0) + a_r Y_V(\xi_i R_0)] - Y_V'(\xi_i R_0) [\xi_i J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)] = 0 \quad (45)$$

$$\bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2}{\pi \xi_i} - \frac{2 J_V'(\xi_i R_0) [F'(R_0) + a_r F(R_0)]}{\pi [\xi_i J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]} - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) \quad (46)$$

referido a R_0

$$\begin{aligned} \bar{f}_{H,V}(\xi_i) &= \int_{R_0}^{R_0} r F(r) [J_V(\xi_i r) (\xi_i Y_V'(\xi_i R_0) + a_r Y_V(\xi_i R_0)) - Y_V(\xi_i r) [\xi_i J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]] dr \\ &= \int_{R_0}^{R_0} r F(r) C_0(\xi_i r) dr \end{aligned} \quad (47)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 J_V'^2(\xi_i R_0) C_0(\xi_i r) \bar{f}_{H,V}(\xi_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_i R_0} \right)^2 \right]^2 [\xi_i J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]^2 - J_V'^2(\xi_i R_0) [a_r^2 + \xi_i^2 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\xi_i R_0} \right)^2 \right]^2]} \quad (48)$$

ξ_i son las raíces positivas de (45)

$$\begin{aligned} \bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] &= \frac{2}{\pi \xi_i} \frac{[\xi_i J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)] F'(R_0)}{J_V'(\xi_i R_0)} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} [F'(R_0) + a_r F(R_0)] - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) \end{aligned} \quad (49)$$

$$f) \quad r=R_0 \quad \left[\frac{dF(r)}{dr} - a_r F(r) \right]_{r=R_0} = 0 \quad r=R_e \quad F(r) = F(R_e)$$

$$\bar{f}_{H,V}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) Y_V(\xi_i R_e) - J_V(\xi_i R_e) Y_V(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) G(\xi_i r) dr \quad (50)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]^2 G(\xi_i r) \bar{f}_{H,V}(\xi_i)}{[J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]^2 - J_V^2(\xi_i R_e) [a_r^2 + \xi_i^2 (1 - (\frac{Y_V}{J_V}(\xi_i R_0))^2)]^2} \quad (51)$$

ξ_i son las raíces positivas de

$$Y_V(\xi_i R_e) [J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)] - J_V(\xi_i R_e) [J_V'(\xi_i R_0) + a_r Y_V(\xi_i R_0)] = 0 \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{V^2}{r^2} F(r) \right] &= \frac{2}{\pi} F(R_e) - \frac{2}{\pi} \frac{J_V(\xi_i R_e)}{[J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]} \\ &\cdot [F'(R_0) + a_r F(R_0)] - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i). \end{aligned} \quad (53)$$

referido a R_e

$$\begin{aligned} \bar{f}_{H,V}(\xi_i) &= \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) [J_V'(\xi_i R_0) + a_r Y_V(\xi_i R_0) - Y_V(\xi_i r) [J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]] dr \\ &= \int_{R_0}^{R_e} r F(r) G(\xi_i r) dr \end{aligned} \quad (54)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_V^2(\xi_i R_e) G(\xi_i r) \bar{f}_{H,V}(\xi_i)}{[J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]^2 - J_V^2(\xi_i R_e) [a_r^2 + \xi_i^2 (1 - (\frac{Y_V}{J_V}(\xi_i R_0))^2)]^2} \quad (55)$$

ξ_i son las raíces de (52) y

$$\begin{aligned} \bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{V^2}{r^2} F(r) \right] &= \frac{2}{\pi} \frac{[J_V'(\xi_i R_0) + a_r J_V(\xi_i R_0)]}{J_V(\xi_i R_e)} F(R_e) \\ &- \frac{2}{\pi} [F'(R_0) - a_r F(R_0)] - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) \end{aligned} \quad (56)$$

$$g) \quad r=R_0 \quad F(r) = F(R_0) \quad r=R_e \quad \left[\frac{dF(r)}{dr} + a_r F(r) \right]_{r=R_e} = 0$$

$$\bar{f}_{H,V}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) Y_V(\xi_i R_0) - J_V(\xi_i R_0) Y_V(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_e} r F(r) G(\xi_i r) dr \quad (57)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) + a r J_\nu(\xi_i R_0)]^2}{J_\nu^2(\xi_i R_0) [a r^2 + (1 - (\frac{r}{\xi_i R_0})^2)^2 - [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) + a r J_\nu(\xi_i R_0)]^2 } G_0(\xi_i r) \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) \quad (58)$$

ξ_i son las raíces positivas de

$$Y_\nu(\xi_i R_0) [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) + a r J_\nu(\xi_i R_0)] - J_\nu(\xi_i R_0) [\xi_i Y'_\nu(\xi_i R_0) + a r Y_\nu(\xi_i R_0)] = 0 \quad (59)$$

$$\begin{aligned} L_{H,\nu} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] &= \frac{2}{\pi} \frac{J_\nu(\xi_i R_0) [F'(R_0) + a r F(R_0)]}{\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) + a r J_\nu(\xi_i R_0)} \\ &- \frac{2}{\pi} F(R_0) - \xi_i^2 \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) \end{aligned} \quad (60)$$

referido a R_0

$$\begin{aligned} \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) &= \int_{R_0}^{R_0} r F(r) [J_\nu(\xi_i r) [\xi_i Y'_\nu(\xi_i R_0) + a r Y_\nu(\xi_i R_0) - Y_\nu(\xi_i r) [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) + a r J_\nu(\xi_i R_0)]] dr \\ &= \int_{R_0}^{R_0} r F(r) G_0(\xi_i r) dr \end{aligned} \quad (61)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 J_\nu^2(\xi_i R_0) \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) G_0(\xi_i r)}{J_\nu^2(\xi_i R_0) [a r^2 + \xi_i^2 (1 - (\frac{r}{\xi_i R_0})^2)^2 - [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) + a r J_\nu(\xi_i R_0)]^2 } \quad (62)$$

ξ_i son las raíces de (59) y

$$\begin{aligned} L_{H,\nu} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] &= \frac{2}{\pi} \frac{[\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) + a r J_\nu(\xi_i R_0)] F(R_0)}{J_\nu(\xi_i R_0)} \\ &+ \frac{2}{\pi} [F'(R_0) + a r F(R_0)] - \xi_i^2 \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) \end{aligned} \quad (63)$$

$$h) \quad r = r_0 \quad F'(r) = F'(R_0) \quad r = R_0 \quad \left[\frac{dF(r)}{dr} + a r F(r) \right]_{r=R_0} = 0$$

$$\bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_0} r F(r) [J_\nu(\xi_i r) Y'_\nu(\xi_i R_0) - J'_\nu(\xi_i R_0) Y_\nu(\xi_i r)] dr = \int_{R_0}^{R_0} r F(r) G_0(\xi_i r) dr \quad (64)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) + a r J_\nu(\xi_i R_0)]^2}{J_\nu^2(\xi_i R_0) [a r^2 + \xi_i^2 (1 - (\frac{r}{\xi_i R_0})^2)^2 - [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) + a r J_\nu(\xi_i R_0)]^2 } G_0(\xi_i r) \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) \quad (65)$$

ξ_i son las raíces positivas de

$$Y'(\xi_i R_0) [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_2) + a_r J_\nu(\xi_i R_2) - J'_\nu(\xi_i R_2) [\xi_i Y'_\nu(\xi_i R_2) + a_r Y_\nu(\xi_i R_2)]] = 0 \quad (66)$$

$$\bar{L}_{H,\nu} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2}{\pi} \frac{J'_\nu(\xi_i R_0) [F'(R_0) + a_r F(R_0)]}{[\xi_i J'_\nu(\xi_i R_2) + a_r J_\nu(\xi_i R_2)]} - \frac{2}{\pi \xi_i} F'(R_0) - \xi_i^2 \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) \quad (66 a)$$

Referido a R_0

$$\bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_2} r F(r) [J_\nu(\xi_i r) [\xi_i Y'_\nu(\xi_i R_2) + a_r Y_\nu(\xi_i R_2)] - Y_\nu(\xi_i r) [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_2) + a_r J_\nu(\xi_i R_2)]] dr \quad (66 b)$$

con la inversión y raíces ξ_i de (66).

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [J'_\nu(\xi_i R_0)]^2 \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) C_0(\xi_i r)}{[J'_\nu(\xi_i R_0)]^2 [a_r^2 + \xi_i^2 (1 - (\frac{\nu}{\xi_i R_2})^2)^2 - [(1 - (\frac{\nu}{\xi_i R_0})^2)] [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_2) + a_r J_\nu(\xi_i R_2)]^2]} \quad (67)$$

$$\bar{L}_{H,\nu} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] = \frac{2}{\pi} [F'(R_2) + a_r F(R_2)] - \frac{2 [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_2) + a_r J_\nu(\xi_i R_2)] F'(R_0) - \xi_i^2 \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i)}{J'_\nu(\xi_i R_0)} \quad (68)$$

i)

$$r = R_0 \quad \left[\frac{dF(r)}{dr} - b_1 F(r) \right]_{r=R_0} \quad r = R_2 \quad \left[\frac{dF(r)}{dr} + a_1 F(r) \right]_{r=R_2} = 0$$

$$\bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) = \int_{R_0}^{R_2} r F(r) [J_\nu(\xi_i r) [\xi_i Y'_\nu(\xi_i R_0) - b_1 Y_\nu(\xi_i R_0)] - Y_\nu(\xi_i r) [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) - b_1 J_\nu(\xi_i R_0)]] dr \quad (69)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i^2 [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_2) + a_1 J_\nu(\xi_i R_2)]^2 C_0(\xi_i r) \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i)}{[a_r^2 + \xi_i^2 (1 - (\frac{\nu}{\xi_i R_2})^2)] [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) - b_1 J_\nu(\xi_i R_0)]^2 - [\xi_i^2 (1 - (\frac{\nu}{\xi_i R_0})^2)] [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_2) + a_1 J_\nu(\xi_i R_2)]^2} \quad (70)$$

ξ_i son las raíces positivas de

$$\begin{aligned} & [\xi_i Y'_\nu(\xi_i R_0) - b_1 Y_\nu(\xi_i R_0)] [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_2) + a_1 J_\nu(\xi_i R_2)] = \\ & = [\xi_i Y'_\nu(\xi_i R_2) + a_1 Y_\nu(\xi_i R_2)] [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) - b_1 J_\nu(\xi_i R_0)] \end{aligned} \quad (71)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{L}_{H,\nu} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \right] &= \frac{2 [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_0) - b_1 J_\nu(\xi_i R_0)]}{\pi [\xi_i J'_\nu(\xi_i R_2) + a_1 J_\nu(\xi_i R_2)]} [F'(R_2) + a_1 F(R_2)] \\ &- \frac{2}{\pi} [F'(R_0) - b_1 F(R_0)] - \xi_i^2 \bar{F}_{H,\nu}(\xi_i) \end{aligned} \quad (72)$$

referido a R_e

$$\begin{aligned}\bar{f}_{H,V}(\xi_i) &= \int_{R_0}^{R_e} r F(r) [J_V(\xi_i r) [\xi_i J'_V(\xi_i R_e) + a_1 Y_V(\xi_i R_e)] - Y_V(\xi_i r) [\xi_i J'_V(\xi_i R_0) - b_1 J_V(\xi_i R_0)]] dr \\ &= \int_{R_0}^{R_e} r F(r) C_0(\xi_i r) dr\end{aligned}\quad (73)$$

con la inversión

$$F(r) = \frac{\pi^2}{2} \sum \frac{\xi_i^2 [\xi_i J'_V(\xi_i R_0) - b_1 J_V(\xi_i R_0)]^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i) C_0(\xi_i r)}{[Q_i^2 + \xi_i^2 (1 - (\frac{Y}{\xi_i R_e})^2)] [\xi_i J'_V(\xi_i R_0) - b_1 J_V(\xi_i R_0)]^2 - \xi_i^2 (1 - (\frac{Y}{\xi_i R_0})^2) - b_1^2] [\xi_i J'_V(\xi_i R_e) + a_1 J_V(\xi_i R_e)]^2}\quad (74)$$

con las raíces de (71)

$$\begin{aligned}\bar{L}_{H,V} \left[\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF(r)}{dr} - \frac{Y^2}{r^2} F(r) \right] &= \frac{2}{\pi} [F'(R_e) + a_1 F(R_e)] - \frac{2}{\pi} \frac{[\xi_i J'_V(\xi_i R_e) + a_1 J_V(\xi_i R_e)]}{[\xi_i J'_V(\xi_i R_0) - b_1 J_V(\xi_i R_0)]} \cdot \\ &\cdot [F'(R_0) - b_1 F(R_0)] - \xi_i^2 \bar{f}_{H,V}(\xi_i)\end{aligned}\quad (75)$$

TABLA I-3(2)

Transformadas finitas de Hankel

$$F(x) = \frac{2}{a^2} \sum \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) \frac{J_\nu(x\xi_i)}{J_\nu^2(a\xi_i)} \quad \bar{f}_{H,\nu}(\xi_i) = \int_0^a x F(x) J_\nu(\xi_i x) dx$$

| | | |
|-------------------------------|------------|---|
| $F(x)$ | | $\bar{f}_{H,\nu}(\xi_i)$ |
| x^ν | $\nu > -1$ | $\frac{a^{\nu+1}}{\xi_i} J_{\nu+1}(a\xi_i)$ |
| c | $\nu = 0$ | $\frac{ac}{\xi_i} J_1(a\xi_i)$ |
| $a^2 - x^2$ | $\nu = 0$ | $\frac{4a^2}{\xi_i^2} J_1(a\xi_i)$ |
| $\frac{J_\nu(ax)}{J_\nu(ab)}$ | $\nu > 1$ | $\frac{\xi_i b}{a^2 - \xi_i^2} J'_\nu(\xi_i b)$ |
| $\frac{J_\nu(ax)}{J_0(ab)}$ | $\nu = 0$ | $\frac{\xi_i b}{a^2 - \xi_i^2} J_1(\xi_i a)$ |

TABLA I-3(3)

Raíces de las funciones de Bessel por igualación a cero

| | n = 0 | n = 1 | n = 2 | n = 3 | n = 4 | n = 5 | n = 6 |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $J_n(x)=0$ | 2,4048 | 3,8317 | 5,1356 | 6,3802 | 7,5883 | 8,7715 | 9,9361 |
| | 5,5201 | 7,0456 | 8,4172 | 9,7610 | 11,0647 | 12,3386 | 13,5893 |
| | 8,6537 | 10,1735 | 11,6198 | 13,0152 | 14,3725 | 15,7002 | 17,0038 |
| | 11,7915 | 13,3237 | 14,7960 | 16,2235 | 17,6160 | 18,9801 | 20,3208 |
| | 14,9309 | 16,4706 | 17,9598 | 19,4094 | 20,8269 | 22,2178 | 23,5861 |
| | 18,0711 | 19,6159 | 21,1170 | 22,5827 | 24,0190 | 25,4303 | 26,8202 |
| $Y_n(x)=0$ | 0,8936 | 2,1971 | 3,3842 | 4,5270 | 5,6452 | 6,7472 | 7,8377 |
| | 3,9577 | 5,4297 | 6,7938 | 8,0976 | 9,3616 | 10,5972 | 11,8110 |
| | 7,0861 | 8,5960 | 10,0225 | 11,3965 | 12,7301 | 14,0338 | 15,3136 |
| | 10,2223 | 11,7492 | 13,2100 | 14,6231 | 15,9996 | 17,3471 | 18,6707 |
| | 13,3611 | 14,8974 | 16,3790 | 17,8185 | 19,2244 | 20,6029 | 21,9583 |
| | 16,5009 | 18,0434 | 19,5390 | 20,9978 | 22,4248 | 23,8265 | 25,2062 |
| $J'_n(x)=0$ | 0,0000 | 1,8412 | 3,0542 | 4,2012 | 5,3176 | 6,4156 | 7,5013 |
| | 3,8317 | 5,3314 | 6,7061 | 8,0152 | 9,2824 | 10,5199 | 11,7349 |
| | 7,0156 | 8,5363 | 9,9695 | 11,3459 | 12,6819 | 13,9872 | 15,2682 |
| | 10,1735 | 11,7060 | 13,1704 | 14,5859 | 15,9641 | 17,3128 | 18,6374 |
| | 13,3237 | 14,8636 | 16,3475 | 17,7888 | 19,1960 | 20,5755 | 21,9317 |
| | 16,4706 | 18,0155 | 19,5129 | 20,9725 | 22,4010 | 23,8036 | 25,1839 |
| $Y'_n(x)=0$ | 2,1971 | 3,6830 | 5,0026 | 6,2536 | 7,4649 | 8,6495 | 9,8148 |
| | 5,4297 | 6,9415 | 8,3507 | 9,6988 | 11,0052 | 12,2809 | 13,5328 |
| | 8,5960 | 10,1234 | 11,5742 | 12,9724 | 14,3317 | 15,6608 | 16,9655 |
| | 11,7492 | 13,2858 | 14,7609 | 16,1905 | 17,5844 | 18,9497 | 20,2913 |
| | 14,8974 | 16,4401 | 17,9313 | 19,3824 | 20,8011 | 22,1928 | 23,5619 |
| | 18,0434 | 19,5902 | 21,0929 | 22,5598 | 23,9970 | 25,4091 | 26,7995 |

TABLA I-3(4)

Raíces de la ecuación $M_n J_1(M_n) - C_1 J_0(M_n) = 0$

| C_1 | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 | M_5 | M_6 |
|-------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 0 | 0 | 3.8317 | 7.0156 | 10.1735 | 13.3237 | 16.4706 |
| 0.01 | 0.1412 | 3.8343 | 7.0170 | 10.1745 | 13.3244 | 16.4712 |
| 0.02 | 0.1995 | 3.8369 | 7.0184 | 10.1754 | 13.3252 | 16.4718 |
| 0.04 | 0.2814 | 3.8421 | 7.0213 | 10.1774 | 13.3267 | 16.4731 |
| 0.06 | 0.3438 | 3.8473 | 7.0241 | 10.1794 | 13.3282 | 16.4743 |
| 0.08 | 0.2960 | 3.8525 | 7.0270 | 10.1813 | 13.3297 | 16.4755 |
| 0.1 | 0.4417 | 3.8577 | 7.0298 | 10.1833 | 13.3312 | 16.4767 |
| 0.15 | 0.5376 | 3.8706 | 7.0369 | 10.1882 | 13.3349 | 16.4797 |
| 0.2 | 0.6170 | 3.8835 | 7.0440 | 10.1931 | 13.3387 | 16.4828 |
| 0.3 | 0.7465 | 3.9091 | 7.0582 | 10.2029 | 13.3462 | 16.4888 |
| 0.4 | 0.8516 | 3.9344 | 7.0723 | 10.2127 | 13.3537 | 16.4949 |
| 0.5 | 0.9408 | 3.9594 | 7.0864 | 10.2225 | 13.3611 | 16.5010 |
| 0.6 | 1.0184 | 3.9841 | 7.1004 | 10.2322 | 13.3686 | 16.5070 |
| 0.7 | 1.0873 | 4.0085 | 7.1143 | 10.2419 | 13.3761 | 16.5131 |
| 0.8 | 1.1490 | 4.0325 | 7.1282 | 10.2516 | 13.3835 | 16.5191 |
| 0.9 | 1.2048 | 4.0562 | 7.1421 | 10.2613 | 13.3910 | 16.5251 |
| 1.0 | 1.2558 | 4.0795 | 7.1558 | 10.2710 | 13.3984 | 16.5312 |
| 1.5 | 1.4569 | 4.1902 | 7.2233 | 10.3188 | 13.4353 | 16.5612 |
| 2.0 | 1.5994 | 4.2910 | 7.2884 | 10.3658 | 13.4719 | 16.5910 |
| 3.0 | 1.7887 | 4.4634 | 7.4103 | 10.4566 | 13.5434 | 16.6499 |
| 4.0 | 1.9081 | 4.6018 | 7.5201 | 10.5423 | 13.6125 | 16.7073 |
| 5.0 | 1.9898 | 4.7131 | 7.6177 | 10.6223 | 13.6786 | 16.7630 |
| 6.0 | 2.0490 | 4.8033 | 7.7039 | 10.6964 | 13.7414 | 16.8168 |
| 7.0 | 2.0937 | 4.8772 | 7.7797 | 10.7646 | 13.8008 | 16.8684 |
| 8.0 | 2.1286 | 4.9384 | 7.8464 | 10.8271 | 13.8566 | 16.9179 |
| 9.0 | 2.1566 | 4.9897 | 7.9051 | 10.8842 | 13.9090 | 16.9650 |
| 10.0 | 2.1795 | 5.0332 | 7.9569 | 10.9363 | 13.9580 | 17.0099 |
| 15.0 | 2.2509 | 5.1773 | 8.1422 | 11.1367 | 14.1576 | 17.2008 |
| 20.0 | 2.2880 | 5.2568 | 8.2534 | 11.2677 | 14.2983 | 17.3442 |
| 30.0 | 2.3261 | 5.3410 | 8.3771 | 11.4221 | 14.4748 | 17.5348 |
| 40.0 | 2.3455 | 5.3846 | 8.4432 | 11.5081 | 14.5774 | 17.6508 |
| 50.0 | 2.3572 | 5.4112 | 8.4840 | 11.5621 | 14.6433 | 17.7272 |
| 60.0 | 2.3651 | 5.4291 | 8.5116 | 11.5990 | 14.6889 | 17.7807 |
| 80.0 | 2.3750 | 5.4516 | 8.5466 | 11.6461 | 14.7475 | 17.8502 |
| 100.0 | 2.3809 | 5.4652 | 8.5678 | 11.6747 | 14.7834 | 17.8931 |
| | 2.4048 | 5.5201 | 8.6537 | 11.7915 | 14.9309 | 18.0711 |

TABLA I-3(5)

Raíces de la ecuación $M_n \operatorname{tg}(M_n) = C$

| C_1 | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 | M_5 | M_6 |
|-------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 0 | 0 | 3.1416 | 6.2832 | 9.4248 | 12.5664 | 15.7080 |
| 0.001 | 0.0316 | 3.1419 | 6.2833 | 9.4249 | 12.5665 | 15.7080 |
| 0.002 | 0.0447 | 3.1422 | 6.2835 | 9.4250 | 12.5665 | 15.7081 |
| 0.004 | 0.0632 | 3.1429 | 6.2838 | 9.4252 | 12.5667 | 15.7082 |
| 0.006 | 0.0774 | 3.1435 | 6.2841 | 9.4254 | 12.5668 | 15.7083 |
| 0.008 | 0.0893 | 3.1441 | 6.2845 | 9.4256 | 12.5670 | 15.7085 |
| 0.01 | 0.0998 | 3.1448 | 6.2848 | 9.4258 | 12.5672 | 15.7086 |
| 0.02 | 0.1410 | 3.1479 | 6.2864 | 9.4269 | 12.5680 | 15.7092 |
| 0.04 | 0.1987 | 3.1543 | 6.2895 | 9.4290 | 12.5696 | 15.7105 |
| 0.06 | 0.2425 | 3.1606 | 6.2927 | 9.4311 | 12.5711 | 15.7118 |
| 0.08 | 0.2791 | 3.1668 | 6.2959 | 9.4333 | 12.5727 | 15.7131 |
| 0.1 | 0.3111 | 3.1731 | 6.2991 | 9.4354 | 12.5743 | 15.7143 |
| 0.2 | 0.4328 | 3.2039 | 6.3148 | 9.4459 | 12.5823 | 15.7207 |
| 0.3 | 0.5218 | 3.2341 | 6.3305 | 9.4565 | 12.5902 | 15.7270 |
| 0.4 | 0.5932 | 3.2636 | 6.3461 | 9.4670 | 12.5981 | 15.7334 |
| 0.5 | 0.6533 | 3.2923 | 6.3616 | 9.4775 | 12.6060 | 15.7397 |
| 0.6 | 0.7051 | 3.3204 | 6.3770 | 9.4879 | 12.6139 | 15.7460 |
| 0.7 | 0.7506 | 3.3477 | 6.3923 | 9.4983 | 12.6218 | 15.7524 |
| 0.8 | 0.7910 | 3.3744 | 6.4074 | 9.5087 | 12.6296 | 15.7587 |
| 0.9 | 0.8274 | 3.4003 | 6.4224 | 9.5190 | 12.6375 | 15.7650 |
| 1.0 | 0.8603 | 3.4256 | 6.4373 | 9.5293 | 12.6453 | 15.7713 |
| 1.5 | 0.9882 | 3.5422 | 6.5097 | 9.5801 | 12.6841 | 15.8026 |
| 2.0 | 1.0769 | 3.6436 | 6.5783 | 9.6296 | 12.7223 | 15.8336 |
| 3.0 | 1.1925 | 3.8088 | 6.7040 | 9.7240 | 12.7966 | 15.8945 |
| 4.0 | 1.2646 | 3.9352 | 6.8140 | 9.8119 | 12.8678 | 15.9536 |
| 5.0 | 1.3138 | 4.0336 | 6.9096 | 9.8928 | 12.9352 | 16.0107 |
| 6.0 | 1.3496 | 4.1116 | 6.9924 | 9.9667 | 12.9988 | 16.0654 |
| 7.0 | 1.3766 | 4.1746 | 7.0640 | 10.0339 | 13.0584 | 16.1177 |
| 8.0 | 1.3978 | 4.2264 | 7.1263 | 10.0949 | 13.1141 | 16.1675 |
| 9.0 | 1.4149 | 4.2694 | 7.1806 | 10.1502 | 13.1660 | 16.2147 |
| 10.0 | 1.4289 | 4.3058 | 7.2281 | 10.2003 | 13.2142 | 16.2594 |
| 15.0 | 1.4729 | 4.4255 | 7.3959 | 10.3898 | 13.4078 | 16.4474 |
| 20.0 | 1.4961 | 4.4915 | 7.4954 | 10.5117 | 13.5420 | 16.5864 |
| 30.0 | 1.5202 | 4.5615 | 7.6057 | 10.6543 | 13.7085 | 16.7691 |
| 40.0 | 1.5325 | 4.5979 | 7.6647 | 10.7334 | 13.8048 | 16.8794 |
| 50.0 | 1.5400 | 4.6202 | 7.7012 | 10.7832 | 13.8666 | 17.9519 |
| 60.0 | 1.5451 | 4.6353 | 7.7259 | 10.8172 | 13.9094 | 17.0026 |
| 80.0 | 1.5514 | 4.6543 | 7.7573 | 10.8606 | 13.9644 | 17.0686 |
| 100.0 | 1.5552 | 4.6658 | 7.7764 | 10.8871 | 13.9981 | 17.1093 |
| | 1.5708 | 4.7124 | 7.8540 | 10.9956 | 14.1372 | 2788 |

TABLA I-3(6)

Raíces de la ecuación $M_n \operatorname{ctg}(M_n) + C_1 = 1$

| C_1 | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 | M_5 |
|---------|--------|--------|--------|---------|---------|
| 0.000 | 0.0000 | 4.4934 | 7.7253 | 10.9041 | 14.0662 |
| 0.005 | 0.1224 | 4.4945 | 7.7259 | 10.9046 | 14.0666 |
| 0.010 | 0.1730 | 4.4956 | 7.7265 | 10.9050 | 14.0669 |
| 0.020 | 0.2445 | 4.4979 | 7.7278 | 10.9060 | 14.0676 |
| 0.030 | 0.2991 | 4.5001 | 7.7291 | 10.9069 | 14.0683 |
| 0.040 | 0.3450 | 4.5023 | 7.7304 | 10.9078 | 14.0690 |
| 0.050 | 0.3854 | 4.5045 | 7.7317 | 10.9087 | 14.0697 |
| 0.060 | 0.4217 | 4.5068 | 7.7330 | 10.9096 | 14.0705 |
| 0.070 | 0.4551 | 4.5090 | 7.7343 | 10.9105 | 14.0712 |
| 0.080 | 0.4860 | 4.5112 | 7.7356 | 10.9115 | 14.0719 |
| 0.090 | 0.5150 | 4.5134 | 7.7369 | 10.9124 | 14.0726 |
| 0.100 | 0.5423 | 4.5157 | 7.7382 | 10.9133 | 14.0733 |
| 0.200 | 0.7593 | 4.5379 | 7.7511 | 10.9225 | 14.0804 |
| 0.300 | 0.9208 | 4.5601 | 7.7641 | 10.9316 | 14.0875 |
| 0.400 | 1.0528 | 4.5822 | 7.7770 | 10.9408 | 14.0946 |
| 0.500 | 1.1656 | 4.6042 | 7.7899 | 10.9499 | 14.1017 |
| 0.600 | 1.2644 | 4.6261 | 7.8028 | 10.9591 | 14.1088 |
| 0.700 | 1.3525 | 4.6479 | 7.8156 | 10.9682 | 14.1159 |
| 0.800 | 1.4320 | 4.6696 | 7.8284 | 10.9774 | 14.1230 |
| 0.900 | 1.5044 | 4.6911 | 7.8412 | 10.9865 | 14.1301 |
| 1.000 | 1.5708 | 4.7124 | 7.8540 | 10.9956 | 14.1372 |
| 1.500 | 1.8366 | 4.8158 | 7.9171 | 11.0409 | 14.1724 |
| 2.000 | 2.0288 | 4.9132 | 7.9787 | 11.0856 | 14.2075 |
| 3.000 | 2.2889 | 5.0870 | 8.0962 | 11.1727 | 14.2764 |
| 4.000 | 2.4557 | 5.2329 | 8.2045 | 11.2560 | 14.3434 |
| 5.000 | 2.5704 | 5.3540 | 8.3029 | 11.3349 | 14.4080 |
| 6.000 | 2.6537 | 5.4544 | 8.3914 | 11.4086 | 14.4699 |
| 7.000 | 2.7165 | 5.5378 | 8.4703 | 11.4773 | 14.5288 |
| 8.000 | 2.7654 | 5.6078 | 8.5406 | 11.5408 | 14.5847 |
| 9.000 | 2.8044 | 5.6669 | 8.6031 | 11.5994 | 14.6374 |
| 10.000 | 2.8363 | 5.7172 | 8.6587 | 11.6532 | 14.6870 |
| 11.000 | 2.8628 | 5.7606 | 8.7083 | 11.7027 | 14.7335 |
| 16.000 | 2.9476 | 5.9080 | 8.8898 | 11.8959 | 14.9251 |
| 21.000 | 2.9930 | 5.9921 | 9.0019 | 12.0250 | 15.0625 |
| 31.000 | 3.0406 | 6.0831 | 9.1294 | 12.1807 | 15.2380 |
| 41.000 | 3.0651 | 6.1311 | 9.1987 | 12.2688 | 15.3417 |
| 51.000 | 3.0801 | 6.1606 | 9.2420 | 12.3247 | 15.4090 |
| 101.000 | 3.1105 | 6.2211 | 9.3317 | 12.4426 | 15.5537 |

TABLA I-3(7)

Raíces de la ecuación $J_0(M_n) Y_0(\alpha M_n) - Y_0(M_n) J_0(\alpha M_n)$

| α | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 | M_5 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1.2 | 15.7014 | 31.4126 | 47.1217 | 62.8302 | 78.5385 |
| 1.5 | 6.2702 | 12.5598 | 18.8451 | 25.1294 | 31.4133 |
| 2.0 | 3.1230 | 6.2734 | 9.4182 | 12.5614 | 15.7040 |
| 2.5 | 2.0732 | 4.1773 | 6.2754 | 8.3717 | 10.4672 |
| 3.0 | 1.5485 | 3.1291 | 4.7038 | 6.2767 | 7.8487 |
| 3.5 | 1.2339 | 2.5002 | 3.7608 | 5.0196 | 6.2776 |
| 4.0 | 1.0244 | 2.0809 | 3.1322 | 4.1816 | 5.2301 |

TABLA I-3(8)

Raíces de la ecuación $M_n \text{ ctg}(M_n) + C = 0$

| C_1 | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 | M_5 | M_6 |
|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| -1.0 | 0 | 4.4934 | 7.7253 | 10.9041 | 14.0662 | 17.2208 |
| -0.995 | 0.1224 | 4.4945 | 7.7259 | 10.9046 | 14.0666 | 17.2210 |
| -0.99 | 0.1730 | 4.4956 | 7.7265 | 10.9050 | 14.0669 | 17.2213 |
| -0.98 | 0.2445 | 4.4979 | 7.7278 | 10.9060 | 14.0676 | 17.2219 |
| -0.97 | 0.2991 | 4.5001 | 7.7291 | 10.9069 | 14.0683 | 17.2225 |
| -0.96 | 0.3450 | 4.5023 | 7.7304 | 10.9078 | 14.0690 | 17.2231 |
| -0.95 | 0.3854 | 4.5045 | 7.7317 | 10.9087 | 14.0697 | 17.2237 |
| -0.94 | 0.4217 | 4.5068 | 7.7330 | 10.9096 | 14.0705 | 17.2242 |
| -0.93 | 0.4551 | 4.5090 | 7.7343 | 10.9105 | 14.0712 | 17.2248 |
| -0.92 | 0.4860 | 4.5112 | 7.7356 | 10.9115 | 14.0719 | 17.2254 |
| -0.91 | 0.5150 | 4.5134 | 7.7369 | 10.9124 | 14.0726 | 17.2260 |
| -0.90 | 0.5423 | 4.5157 | 7.7382 | 10.9133 | 14.0733 | 17.2266 |
| -0.85 | 0.6609 | 4.5268 | 7.7447 | 10.9179 | 14.0769 | 17.2295 |
| -0.8 | 0.7593 | 4.5379 | 7.7511 | 10.9225 | 14.0804 | 17.2324 |
| -0.7 | 0.9208 | 4.5601 | 7.7641 | 10.9316 | 14.0875 | 17.2382 |
| -0.6 | 1.0528 | 4.5822 | 7.7770 | 10.9408 | 14.0946 | 17.2440 |
| -0.5 | 1.1656 | 4.6042 | 7.7899 | 10.9499 | 14.1017 | 17.2498 |
| -0.4 | 1.2644 | 4.6261 | 7.8028 | 10.9591 | 14.1088 | 17.2556 |
| -0.3 | 1.3525 | 4.6479 | 7.8156 | 10.9682 | 14.1159 | 17.2614 |
| -0.2 | 1.4320 | 4.6696 | 7.8284 | 10.9774 | 14.1230 | 17.2672 |
| -0.1 | 1.5044 | 4.6911 | 7.8412 | 10.9865 | 14.1301 | 17.2730 |
| 0 | 1.5708 | 4.7124 | 7.8540 | 10.9956 | 14.1372 | 17.2788 |
| 0.1 | 1.6320 | 4.7335 | 7.8667 | 11.0047 | 14.1443 | 17.2845 |
| 0.2 | 1.6887 | 4.7544 | 7.8794 | 11.0137 | 14.1513 | 17.2903 |
| 0.3 | 1.7414 | 4.7751 | 7.8920 | 11.0228 | 14.1584 | 17.2961 |
| 0.4 | 1.7906 | 4.7956 | 7.9046 | 11.0318 | 14.1654 | 17.3019 |
| 0.5 | 1.8366 | 4.8158 | 7.9171 | 11.0409 | 14.1724 | 17.3076 |
| 0.6 | 1.8798 | 4.8358 | 7.9295 | 11.0498 | 14.1795 | 17.3134 |
| 0.7 | 1.9203 | 4.8566 | 7.9419 | 11.0588 | 14.1865 | 17.3192 |
| 0.8 | 1.9586 | 4.8751 | 7.9542 | 11.0677 | 14.1935 | 17.3249 |
| 0.9 | 1.9947 | 4.8943 | 7.9665 | 11.0767 | 14.2005 | 17.3306 |
| 1.0 | 2.0288 | 4.9132 | 7.9787 | 11.0856 | 14.2075 | 17.3364 |
| 1.5 | 2.1746 | 5.0037 | 8.0385 | 11.1296 | 14.2421 | 17.3649 |
| 2.0 | 2.2889 | 5.0870 | 8.0962 | 11.1727 | 14.2764 | 17.3932 |
| 3.0 | 2.4557 | 5.2329 | 8.2045 | 11.2560 | 14.3434 | 17.4490 |
| 4.0 | 2.5704 | 5.3540 | 8.3029 | 11.3349 | 14.4080 | 17.5034 |
| 5.0 | 2.6537 | 5.4544 | 8.3914 | 11.4086 | 14.4699 | 17.5562 |
| 6.0 | 2.7165 | 5.5378 | 8.4703 | 11.4773 | 14.5288 | 17.6072 |
| 7.0 | 2.7654 | 5.6078 | 8.5406 | 11.5408 | 14.5847 | 17.6562 |
| 8.0 | 2.8044 | 5.6669 | 8.6031 | 11.5994 | 14.6374 | 17.7032 |
| 9.0 | 2.8363 | 5.7172 | 8.6587 | 11.6532 | 14.6870 | 17.7481 |
| 10.0 | 2.8628 | 5.7606 | 8.7083 | 11.7027 | 14.7335 | 17.7908 |
| 15.0 | 2.9476 | 5.9080 | 8.8898 | 11.8959 | 14.9215 | 17.9742 |
| 20.0 | 2.9930 | 5.9921 | 9.0019 | 12.0250 | 15.0625 | 18.1136 |
| 30.0 | 3.0406 | 6.0831 | 9.1294 | 12.1807 | 15.2380 | 18.3018 |
| 40.0 | 3.0651 | 6.1311 | 9.1987 | 12.2688 | 15.3417 | 18.4180 |
| 50.0 | 3.0801 | 6.1606 | 9.2420 | 12.3247 | 15.4090 | 18.4953 |
| 60.0 | 3.0901 | 6.1805 | 9.2715 | 12.3632 | 15.4559 | 18.5497 |
| 80.0 | 3.1028 | 6.2058 | 9.3089 | 12.4124 | 15.5164 | 18.6209 |
| 100.0 | 3.1105 | 6.2211 | 9.3317 | 12.4426 | 15.5537 | 18.6650 |
| | 3.1416 | 6.2832 | 9.4248 | 12.5664 | 15.7080 | 18.8496 |

TABLA I-3(9)

Raices de la ecuación $J_0'(x) Y_0'(ax) - J_0'(ax) Y_0'(x) = 0$

| a | x_1 | $(a-1)x_2$ | $(a-1)x_3$ | $(a-1)x_4$ | $(a-1)x_5$ | $(a-1)x_6$ |
|------|-------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 1 | 3.1416 | 6.2832 | 9.4248 | 12.5664 | 15.7080 |
| 1.1 | 0.953 | 3.1441 | 6.2845 | 9.4256 | 12.5670 | 15.7085 |
| 1.2 | 0.910 | 3.1509 | 6.2878 | 9.4279 | 12.5687 | 15.7098 |
| 1.3 | 0.872 | 3.1609 | 6.2928 | 9.4312 | 12.5712 | 15.7118 |
| 1.4 | 0.837 | 3.174 | 6.2991 | 9.4354 | 12.5743 | 15.7143 |
| 1.5 | 0.805 | 3.188 | 6.3064 | 9.4403 | 12.5780 | 15.7172 |
| 1.6 | 0.776 | 3.205 | 6.3146 | 9.4457 | 12.5820 | 15.7205 |
| 2.0 | 0.677 | 3.282 | 6.353 | 9.471 | 12.601 | 15.736 |
| 5.0 | 0.341 | 3.969 | 6.746 | 9.732 | 12.79 | 15.89 |
| 10.0 | 0.180 | 4.623 | 7.37 | 10.223 | | |
| 20.0 | 0.092 | 5.011 | 7.98 | 10.908 | | |

APENDICE I-4

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

1. Definiciones

Dada una función $F(x)$ se define la transformada de Laplace de la función por $L[F(x)] \equiv f(s)$

$$L[F(x)] \equiv f(s) = \int_0^{\infty} F(x) e^{-sx} dx \quad (1)$$

La transformada de Laplace existe cuando la integral converge para algún valor del parámetro s . La existencia de transformadas de Laplace se establece por las condiciones suficientes de que $F(x)$ sea seccionalmente continua en cada intervalo finito $0 \leq x \leq N$ y de orden exponencial γ es decir, para constantes reales $M > 0$ y γ tales que para todo $x > N$

$$|e^{-\gamma x} F(x)| < M$$

Las condiciones anteriores no son necesarias y así, existe transformada de Laplace cuando se cumple las condiciones

- $F(x)$ es seccionalmente continua en cualquier intervalo $N_1 \leq x \leq N$ donde $N_1 > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^n F(x) = 0$ para cualquier constante n tal que $0 < n < 1$
- $F(x)$ es de orden exponencial γ para $x > N$

si la transformada de Laplace de una función $F(x)$ es $f(s)$ la transformada inversa de $f(s)$ es $F(x)$ y se expresa

$$L^{-1}[f(s)] = F(x) \quad (2)$$

Para funciones $F(x)$ seccionalmente continuas en cada intervalo $0 \leq x \leq N$ y de orden exponencial para $x > N$ la transformada in-

versa es única (teorema de Lerch).

2. Propiedades de las transformadas de Laplace

a) Linealidad

$$L [C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)] = C_1 L [F_1(x)] + C_2 L [F_2(x)] = C_1 f_1(s) + C_2 f_2(s) \quad (1)$$

b) Traslación

$$\text{Si } L [F(x)] = f(s)$$

$$L [\exp(ax) F(x)] = f(s-a) \quad (2)$$

b') Cambio de escala

$$\text{Si } L [F(x)] = f(s) \quad L [F(ax)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (3)$$

c) Derivadas

$$\text{Si } L [F(x)] = f(s)$$

$$L [F'(x)] = s f(s) - F(0) \quad (4)$$

$$L [F''(x)] = s^2 f(s) - s F(0) - F'(0) \quad (5)$$

$$\vdots$$

$$L [F^n(x)] = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - F^{n-1}(0) \quad (6)$$

d) Integrales

$$\text{Si } L [F(x)] = f(s)$$

$$L \left[\int_0^x F(u) du \right] = \frac{f(s)}{s} \quad (7)$$

e) Multiplicación por x

$$\text{Si } L [F(x)] = f(s)$$

$$L [x^n F(x)] = (-1)^n \frac{d^n f(s)}{ds^n} = (-1)^n f^{(n)}(s) \quad (8)$$

f) División por x

$$\text{Si } L[F(x)] = f(s)$$

$$L\left[\frac{F(x)}{x}\right] = \int_0^{\infty} f(u) du \quad (9)$$

g) Funciones periódicas

Si $F(x)$ es una función periódica de período ω

$$L[F(x)] = f(s) = \frac{1}{1 - \exp(-s\omega)} \int_0^{\omega} \exp(-sx) F(x) dx \quad (10)$$

3. Inversión de Laplace

Dada una función $F_1(x) = F(x) \exp(-\gamma x)$ absolutamente integrable entre $0, \infty$ y de valor 0 para $-\infty < x < 0$ donde γ es una constante positiva aplicando la integral de Fourier se tiene

$$F_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x) d\xi \int_0^{\infty} F_1(u) \exp(-i u \xi) du \quad (11)$$

6

$$F(x) = \frac{\exp(\gamma x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x) d\xi \int_0^{\infty} F(u) \exp[-(\gamma + i\xi)u] du \quad (12)$$

$$\text{Si } \gamma + i\xi = s \quad ds = i d\xi \quad \text{y si } \xi \rightarrow \infty \quad s \rightarrow \gamma + i\infty$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \gamma}^{i\infty + \gamma} \exp(sx) ds \int_0^{\infty} F(u) \exp(-us) du \quad (13)$$

$$\text{y si } f(s) = L[F(u)] = \int_0^{\infty} F(u) \exp(us) du$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + \gamma}^{i\infty + \gamma} f(s) \exp(sx) ds \quad (14)$$

La ec. (14) se conoce como inversión de Laplace de la función extendida al campo complejo $s = x + iy$. El número real se elige de tal manera que $s = \gamma$ quede a la derecha de todas singularidades. Por la ec. (14) se tiene un método directo de calcular las transformadas inversas de Laplace.

4. Convolución de Laplace

Si $f(s)$ y $g(s)$ son las transformadas de $F(x)$ y $G(x)$ respectivamente por la inversión de Laplace puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} f(s) g(s) \exp(sx) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} \exp(sx) f(s) ds \int_0^{\infty} G(\eta) \exp(-s\eta) d\eta \\ &= \int_0^{\infty} G(\eta) d\eta \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} \exp[-s(x-\eta)] f(s) ds = \int_0^{\infty} G(\eta) F(x-\eta) d\eta \end{aligned} \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que $F(x-\eta) = 0$ si $x-\eta < 0$

$$\int_0^{\infty} G(\eta) F(x-\eta) d\eta = \int_0^x G(\eta) F(x-\eta) d\eta \quad (16)$$

y si $u = x - \eta$

$$\int_0^{\infty} G(\eta) F(x-\eta) d\eta = \int_0^x G(u-x) F(u) du \quad (17)$$

análogamente si $L[G(x)] = g(s)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} f(s) g(s) \exp(sx) dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} g(s) \exp[s(x-\eta)] ds \int_0^{\infty} F(\eta) d\eta \\ &= \int_m^{\infty} F(\eta) G(\eta-x) d\eta \quad m > x > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

De la ec. (16) se puede escribir

$$L^{-1}[f(s) g(s)] = \int_0^x G(\eta) F(x-\eta) d\eta = \int_0^x G(u-x) F(u) du = F * G \quad (19)$$

6

$$f(s) g(s) = L[F * G] \quad (20)$$

donde $F * G$ se denomina convolución de Laplace. Si la inversa

$L^{-1}[j(s)]$ no es conocida puede buscarse un producto $f(s) g(s)$ tal que $f(s) g(s) = j(s)$ donde las inversas de $f(s)$ y $g(s)$ sean conocidas resolviéndose el problema por la ecuación de convolución correspondiente

$$\text{si } j(s) = f(s) g(s) \quad L^{-1}[s f(s)] = \frac{\partial}{\partial x} F(x) \quad \text{si } F(0) = 0$$

$$L^{-1}[j(s)] = \int_0^x G(\eta) \frac{\partial}{\partial x} F(x-\eta) d\eta \quad (21)$$

La ecuación (21) es conocida en transmisión de calor como ecuación de Duhamel.

TABLA I-7

Transformadas de Laplace

$$L[F(x)] \equiv f(s) = \int_0^{\infty} F(x) \exp(-sx) dx$$

| $f(s)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| (1) $c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$ | $c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x)$ |
| (2) $f(s/a)$ | $a F(a/x)$ |
| (3) $f(s-a)$ | $\exp(ax) \cdot F(x)$ |
| (4) $\exp(-as) f(s)$ | $F(x-a) \quad \begin{matrix} x > a \\ x < a \end{matrix}$ |
| (5) $s f(s) - F(0)$ | $F'(x)$ |
| (6) $s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$ | $F''(x)$ |
| (7) $s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - \dots - F^{(n-1)}(0)$ | $F^{(n)}(x)$ |
| (8) $f(s)/s^n$ | $\int_0^x \dots \int_0^x F(u) du^n = \int_0^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u) du$ |
| (9) $f(s)/s$ | $\int_0^x F(u) du$ |
| (10) $f'(s)$ | $-x F(x)$ |
| (11) $f''(s)$ | $x^2 F(x)$ |
| (12) $f^{(n)}(s)$ | $(-1)^n x^n F(x)$ |
| (13) $f(s) g(s)$ | $\int_0^x F(u) G(x-u) du$ |
| (14) $\int_s^{\infty} F(u) du$ | $F(x)/x$ |
| (15) $\frac{1}{1 - \exp(-s\omega)} \int_0^{\omega} \exp(-su) F(u) du$ | $F(x) = T(x+\omega)$ |
| (16) $\frac{1}{s} f(\frac{1}{s})$ | $\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{ux}) F(u) du$ |
| (17) $f(\sqrt{s})/s$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^{\infty} \exp(-u^2/4x) F(u) du$ |
| (18) $\frac{1}{s^{n+1}} f(\frac{1}{s})$ | $x^{n/2} \int_0^x u^{-n/2} J_n(2\sqrt{ux}) F(u) du$ |
| (19) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{-3/2} \exp(-s^2/4u) F(u) du$ | $F(x^2)$ |

| $f(s)$ | $F(x)$ |
|----------------------------------|--|
| (20) $f(s)/s$ | $\int_0^\infty \frac{x^u F(u)}{\Gamma(u+1)} du$ |
| (21) $P(s)/Q(s)$, $P(s) < Q(s)$ | $\sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \exp(\alpha_k x)$ |

Transformadas de aplicación frecuente

| | |
|--|---|
| (22) $1/s$ | 1 |
| (23) $1/s^2$ | x |
| (24) $1/s^n$ $n=1, 2, 3, \dots$ | $x^{(n-1)}/(n-1)! \quad 0! = 1$ |
| (25) $1/s^n$ $n > 0$ | $x^{(n-1)}/\Gamma(n)$ |
| (26) $1/(s-a)$ | $\exp(ax)$ |
| (27) $1/\sqrt{s}$ | $1/\sqrt{\pi x}$ |
| (28) $1/s^{3/2}$ | $2\sqrt{x/\pi}$ |
| (29) $1/s^{(n+1/2)}$ | $\frac{2^n}{\pi^{1/2} (2n-1)!!} x^{(n-1/2)}$ |
| (30) \sqrt{s} | $-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{3/2}$ |
| (31) $s^{3/2}$ | $\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{5/2}$ |
| (32) $s^{(n-1/2)}$ | $\frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n \sqrt{\pi}} x^{(n+1/2)}$ |
| (33) $1/(s-a)^n$ $n=1, 2, 3, \dots$ | $x^{(n-1)} \exp(ax)/(n-1)! \quad 0! = 1$ |
| (34) $1/(s-a)^n$ $n > 0$ | $x^{(n-1)} \exp(ax)/(n-1)!$ |
| (35) $1/(s+a)(s+\beta)$ | $\frac{1}{\alpha-\beta} (\exp(-\beta x) - \exp(-\alpha x))$ |
| (36) $1/(s-a)^2$ | $x \exp(-\alpha x)$ |
| (37) $\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$ | $\frac{(r-\beta) \exp(-\alpha x) + (\alpha-\gamma) \exp(-\beta x) + (\beta-\alpha) \exp(-\gamma x)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$ |
| (38) $\frac{1}{(s+\alpha)^2 (s+\beta)}$ | $\frac{\exp(-\beta x) - \exp(-\alpha x) [1 - (\beta-\alpha)x]}{(\beta-\alpha)^2}$ |
| (39) $1/(s+a)^3$ | $\frac{1}{2} x^2 \exp(-\alpha x)$ |
| (40) $1/(s+a)^n$ | $x^{n-1} \exp(-\alpha x)/(n-1)!$ |

$f(s)$

$$(41) \frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

$$(42) \frac{s}{(s+\alpha)^2}$$

$$(43) \frac{s}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$$

$$(44) \frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$$

$$(45) \frac{s}{(s+\alpha)^3}$$

$$(46) \frac{a}{(s^2+a^2)}$$

$$(47) \frac{s}{(s^2+a^2)}$$

$$(48) \frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$$

$$(49) \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$$

$$(50) \frac{1}{s^2-a^2}$$

$$(51) \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$(52) \frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$$

$$(53) \frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$$

$$(54) \frac{1}{(s^2+a^2)^2}$$

$$(55) \frac{s}{(s^2+a^2)^2}$$

$$(56) \frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$(57) \frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$$

$$(58) \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$(59) \frac{s}{(s^2-a^2)^2}$$

$$(60) \frac{1}{(s^2-a^2)^2}$$

$$(61) \frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$$

$$(62) \frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$$

$$(63) \frac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$$

$F(x)$

$$(\alpha \exp(-\alpha x) - \beta \exp(-\beta x)) / (\alpha - \beta)$$

$$(1 - \alpha x) \exp(-\alpha x)$$

$$\frac{[\beta - \alpha(\beta - \alpha)x] \exp(-\alpha x) - \beta \exp(-\beta x)}{(\beta - \alpha)^2}$$

$$\frac{\alpha(\beta - \gamma) \exp(-\alpha x) + \beta(\gamma - \alpha) \exp(-\beta x) + \gamma(\alpha - \beta) \exp(-\gamma x)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}$$

$$x(1 - \frac{1}{2} \alpha x) \exp(-\alpha x)$$

$$\sin(ax)$$

$$\cos(ax)$$

$$\sin(ax) \exp(bx) / a$$

$$\cos(ax) \exp(bx)$$

$$\frac{1}{a} \cdot \sinh(ax)$$

$$\cosh(ax)$$

$$\frac{\exp(bx)}{a} \sinh(ax)$$

$$\exp(bx) \cosh(ax)$$

$$\frac{\sin(ax) - ax \cos(ax)}{2a^3}$$

$$\frac{x \sin(ax)}{2a}$$

$$\frac{\sin(ax) + ax \cos(ax)}{2a}$$

$$\cos(ax) - \frac{1}{2} ax \sin(ax)$$

$$x \cos(ax)$$

$$\frac{x \sinh(ax)}{2a}$$

$$\frac{ax \cosh(ax) - \sinh(ax)}{2a^3}$$

$$\frac{\sinh(ax) + ax \cosh(ax)}{2a}$$

$$x \cosh(ax)$$

$$\cosh(ax) + \frac{1}{2} ax \sinh(ax)$$

| $f(s)$ | $F(x)$ |
|------------------------|--|
| (64) $1/(s^2+a^2)^3$ | $\frac{(3-a^2x^2) \sin(ax) - 3ax \cos(ax)}{8a^5}$ |
| (65) $s/(s^2+a^2)^3$ | $\frac{x \sin(ax) - ax^2 \cos(ax)}{8a^3}$ |
| (66) $s^2/(s^2+a^2)^3$ | $\frac{(1+a^2x^2) \sin(ax) - ax \cos(ax)}{8a^3}$ |
| (67) $s^3/(s^2+a^2)^3$ | $\frac{3x \sin(ax) + ax^2 \cos(ax)}{8a}$ |
| (68) $s^4/(s^2+a^2)^3$ | $\frac{(3-a^2x^2) \sin(ax) + 5ax \cos(ax)}{8a}$ |
| (69) $s^5/(s^2+a^2)^3$ | $\frac{(8-a^2x^2) \sin(ax) - 7ax \cos(ax)}{8}$ |
| (70) $1/(s^2-a^2)^3$ | $\frac{(3+a^2x^2) \sinh(ax) - 3ax \cosh(ax)}{8a^5}$ |
| (71) $s/(s^2-a^2)^3$ | $\frac{ax^2 \cosh(ax) - x \sinh(ax)}{8a^3}$ |
| (72) $s^2/(s^2-a^2)^3$ | $\frac{ax \cosh(ax) + (a^2x^2-1) \sinh(ax)}{8a}$ |
| (73) $s^3/(s^2-a^2)^3$ | $\frac{3x \sinh(ax) + ax^2 \cosh(ax)}{8a}$ |
| (74) $s^4/(s^2-a^2)^3$ | $\frac{(3+ax^2) \sinh(ax) + 5ax \cosh(ax)}{8a}$ |
| (75) $s^5/(s^2-a^2)^3$ | $\frac{(8+a^2x^2) \cosh(ax) + 7ax \sinh(ax)}{8}$ |
| (76) $1/s^3+a^2$ | $\frac{\exp(ax/2)}{3a^2} \left[\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) - \exp(-3ax/2) \right]$ |
| (77) s/s^3+a^2 | $\frac{\exp(ax/2)}{3a} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) - \exp(-3ax/2) \right]$ |
| (78) s^2/s^3+a^2 | $\frac{1}{3} \left[\exp(-ax) + 2 \exp(ax/2) \cos\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) \right]$ |
| (79) $1/s^3-a^2$ | $\frac{\exp(-ax/2)}{3a^2} \left[\exp(3ax/2) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) \right]$ |
| (80) s/s^3-a^2 | $\frac{\exp(-ax/2)}{3a} \left[\sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) + \exp(3ax/2) \right]$ |
| (81) s^2/s^3-a^2 | $\frac{1}{3} \left[\exp(ax) + 2 \exp(-ax/2) \cos\left(\frac{\sqrt{3}ax}{2}\right) \right]$ |
| (82) $1/s^4+a^4$ | $\frac{1}{4a^3} \left[\sin(ax) \cosh(ax) - \cos(ax) \sinh(ax) \right]$ |
| (83) s/s^4+a^4 | $\frac{\sin(ax) \sinh(ax)}{2a^2}$ |
| (84) s^2/s^4+a^4 | $\frac{1}{2a} \left[\sin(ax) \cosh(ax) + \cos(ax) \sinh(ax) \right]$ |
| (85) s^3/s^4+a^4 | $\cos(ax) \cosh(ax)$ |
| (86) $1/s^4+a^4$ | $\frac{1}{2a^3} (\sinh(ax) - \sin(ax))$ |

| $f(s)$ | | $F(x)$ |
|--|----------|--|
| (87) $s/s^4 - a^4$ | | $\frac{1}{2a^3} (\cosh(ax) - \cos(ax))$ |
| (88) $s^2/s^4 - a^4$ | | $\frac{1}{2a} (\sinh(ax) + \sin(ax))$ |
| (89) $s^3/s^4 - a^4$ | | $\frac{1}{2} (\sinh(ax) + \cos(ax))$ |
| (90) $\frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$ | | $\frac{\exp(-bx) - \exp(-ax)}{2(b-a)\sqrt{\pi x^3}}$ |
| (91) $\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$ | | $\frac{\text{fer}\sqrt{ax}}{\sqrt{a}}$ |
| (92) $\frac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$ | | $\exp(ax) \frac{\text{fer}\sqrt{ax}}{\sqrt{a}}$ |
| (93) $\frac{1}{\sqrt{s-a} + b}$ | | $\exp(ax) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - b \exp(b^2 x) \text{ferc}(b\sqrt{x}) \right]$ |
| (94) $\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$ | | $J_0(ax)$ |
| (95) $\frac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$ | | $I_0(ax)$ |
| (96) $\frac{(s - \sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2+a^2}}$ | $n > -1$ | $a^n I_n(ax)$ |
| (97) $\frac{(\sqrt{s^2+a^2} - s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}$ | $n > -1$ | $a^n J_n(ax)$ |
| (98) $\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$ | | $x \frac{J_1(ax)}{a}$ |
| (99) $\frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$ | | $x J_0(ax)$ |
| (100) $\frac{s^2}{(s^2+a^2)^{3/2}}$ | | $J_0(ax) - a x J_1(ax)$ |
| (101) $\frac{1}{(s^2-a^2)^{3/2}}$ | | $x \frac{I_1(ax)}{a}$ |
| (102) $\frac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$ | | $x I_0(ax)$ |
| (103) $\frac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$ | | $I_0(ax) + a x I_1(ax)$ |
| (104) $\frac{\exp[-b(s - \sqrt{s^2+a^2})]}{(s^2+a^2)^{1/2}}$ | | $I_0(a\sqrt{x(x+2b)})$ |
| (105) $\frac{\exp[-b\sqrt{s^2+a^2}]}{\sqrt{s^2+a^2}}$ | | $J_0(a\sqrt{x^2-b^2})$ $\begin{matrix} x > b \\ 0 & x < b \end{matrix}$ |
| (106) $\exp(-\sqrt{\frac{s}{a}} y)$ | | $\frac{y}{2\sqrt{\pi a x^3}} \exp(-y^2/4ax)$ |
| (107) $\frac{\exp(-\sqrt{\frac{s}{a}} y)}{\sqrt{s/a}}$ | | $\sqrt{a/\pi x} \exp(-y^2/4ax)$ |
| (108) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{s}$ | | $\text{ferc}\left(\frac{y}{2\sqrt{ax}}\right)$ |
| (109) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{s\sqrt{s/a}}$ | | $2\sqrt{\frac{ax}{\pi}} \exp(-y^2/4ax) - y \text{ferc}\left(\frac{y}{2\sqrt{ax}}\right)$ |

| $f(s)$ | $F(x)$ |
|--|---|
| (110) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{s^2}$ | $(x + \frac{y^2}{2a}) \operatorname{ferc} \frac{y}{2\sqrt{ax}} - y \sqrt{\frac{x}{\pi a}} \exp(-y^2/4ax)$ |
| (111) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{s(1+n/2)}$ | $n=0,1,2,\dots \quad (Ax)^{n/2} i^n \operatorname{ferc} \left(\frac{y}{2\sqrt{Ax}}\right)$ |
| (112) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{s^{3/4}}$ | $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{y}{2x\sqrt{a}}} \exp(-\frac{y^2}{4ax}) K_{1/4}(\frac{y^2}{8ax})$ |
| (113) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{\sqrt{s/a} + \beta}$ | $(\frac{a}{\pi x})^{1/2} \exp(-\frac{y^2}{4ax}) - a\beta \exp(\beta y + a\beta^2 x) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \beta\sqrt{ax})$ |
| (114) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{s(\sqrt{s/a} + \beta)}$ | $\frac{1}{\beta} \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}}) - \frac{1}{\beta} \exp(\beta y + a\beta^2 x) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \beta\sqrt{ax})$ |
| (115) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{\sqrt{s/a}(\sqrt{s/a} + \beta)}$ | $a \exp(\beta y + a\beta^2 x) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \beta\sqrt{ax})$ |
| (116) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{s\sqrt{\frac{s}{a}}(\sqrt{\frac{s}{a}} + \beta)}$ | $\frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{ax}{\pi}} \exp(-\frac{y^2}{4ax}) - \frac{(1+\beta y)}{\beta^2} \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}}) +$ $+ \frac{1}{\beta^2} \exp(\beta y + a\beta^2 x) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \beta\sqrt{ax})$ |
| (117) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{(\frac{s}{a})^{n+1}(\sqrt{s/a} + \beta)}$ | $\frac{1}{\beta^n} \exp(\beta y + a\beta^2 x) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}}) + \beta\sqrt{ax}$ $- \frac{a}{(\beta)^n} \sum_{m=0}^{n-1} [-\beta \cdot 2\sqrt{ax}]^m i^m \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}})$ |
| (118) $\frac{\exp(-\sqrt{s/a} y)}{(\sqrt{\frac{s}{a}} + \beta)^2}$ | $-2\beta(\sqrt{\frac{a^3 x}{\pi}} \exp(-\frac{y^2}{4ax}) + a(1+\beta y + 2a\beta^2 x) \cdot$ $\cdot \exp(\beta y + a\beta^2 x) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \beta\sqrt{ax}))$ |
| (119) $\frac{\exp(-\sqrt{\frac{s}{a}} y)}{s(\sqrt{\frac{s}{a}} + \beta)^2}$ | $\frac{1}{\beta^2} \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}}) - \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{ax}{\pi}} \exp(-\frac{y^2}{4ax}) - \frac{1}{\beta}(1-\beta y - 2a\beta^2 x) \cdot$ $\cdot \exp(\beta y + a\beta^2 x) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \beta\sqrt{ax})$ |
| (120) $\frac{\exp(-\sqrt{\frac{s}{a}} y)}{s-\beta}$ | $\frac{1}{2} \exp(\beta x) [\exp(-y\sqrt{\frac{\beta}{a}}) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} - \sqrt{\beta x})$ $+ \exp(y\sqrt{\frac{\beta}{a}}) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \sqrt{\beta x})]$ |
| (121) $\frac{\exp(-\sqrt{\frac{s}{a}} y)}{\sqrt{\frac{s}{a}}(s-\beta)}$ | $\frac{1}{2} \exp(\beta x) \cdot \sqrt{\frac{\beta}{a}} [\exp(-y\sqrt{\frac{\beta}{a}}) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} - \sqrt{\beta x})$ $+ \exp(y\sqrt{\frac{\beta}{a}}) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \sqrt{\beta x})]$ |
| (122) $\frac{\exp(-\sqrt{\frac{s}{a}} y)}{(s-\beta)^2}$ | $\frac{1}{2} \exp(\beta x) [(x - \frac{y}{2\sqrt{ax}}) \exp(-y\sqrt{\frac{\beta}{a}}) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} - \sqrt{\beta x})$ $+ (x + \frac{y}{2\sqrt{ax}}) \exp(y\sqrt{\frac{\beta}{a}}) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \sqrt{\beta x})]$ |
| (123) $\frac{\exp(-\sqrt{\frac{s}{a}} y)}{(s-y)(\sqrt{\frac{s}{a}} + \beta)}$ $y \neq a\beta^2$ | $\frac{1}{2} \exp(rx) [\frac{\sqrt{a}}{\beta\sqrt{a} + \sqrt{r}} \exp(-y\sqrt{\frac{r}{a}}) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} - \sqrt{rx})$ $+ \frac{\sqrt{a}}{\beta\sqrt{a} - \sqrt{r}} \exp(y\sqrt{\frac{r}{a}}) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \sqrt{rx})]$ $- \frac{a\beta}{a\beta^2 - r} \exp(\beta y + a\beta^2 x) \operatorname{ferc}(\frac{y}{2\sqrt{ax}} + \beta\sqrt{ax})$ |

| | $f(s)$ | $F(x)$ |
|-------|--|---|
| (124) | $\exp(y/s) - 1$ | $\sqrt{\frac{y}{x}} I_1(2\sqrt{xy})$ |
| (125) | $\frac{1}{s} \cdot \exp(y/s)$ | $I_0(2\sqrt{xy})$ |
| (126) | $\frac{1}{s^n} \exp(y/s)$ | $\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1/2} I_{n-1}(2\sqrt{xy})$ |
| (127) | $K_0(\sqrt{\frac{s}{a}} y)$ | $\frac{1}{2x} \exp(-y^2/4ax)$ |
| (128) | $\frac{K_{2n}(\sqrt{\frac{s}{a}} y)}{\sqrt{s}}$ | $\frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \exp(-y^2/8ax) K_n\left(\frac{y^2}{8ax}\right)$ |
| (129) | $s^{\frac{n}{2}-1} K_n(\sqrt{\frac{s}{a}} y)$ | $y^{-n} a^{n/2} 2^{n-1} \int_{y^2/4ax}^{\infty} \exp(-u) u^{n-1} du$ |
| (130) | $s^{\frac{n}{2}} K_n(\sqrt{\frac{s}{a}} y)$ | $\frac{y^n}{a^{n/2} (2x)^{n+1}} \exp(-y^2/4ax)$ |
| (131) | $(s - \sqrt{s^2 - y^2})^n$ | $n \frac{y^n}{x} I_\nu(yx)$ |
| (132) | $\exp[y(s - \sqrt{s+a})\sqrt{s+\beta}] - 1$ | $\frac{y(a-\beta) \exp[-(a+\beta)x/2]}{\sqrt{x} \sqrt{x+4y}} I_1\left[\frac{1}{2}(a-\beta)\sqrt{x} \sqrt{x+4y}\right]$ |
| (133) | $\frac{\exp[y(s - \sqrt{s+a})\sqrt{s+\beta}]}{(\sqrt{s+a})(\sqrt{s+\beta})}$ | $\exp[(a-\beta)(x+y)/2] I_0\left[\frac{1}{2}(a-\beta)\sqrt{x} \sqrt{x+4y}\right]$ |
| (134) | $\frac{\exp[y((s - \sqrt{s+a})(\sqrt{s+\beta}))^2]}{(\sqrt{s+a})(\sqrt{s+\beta})[\sqrt{s+a} + \sqrt{s+\beta}]^{2n}}$ | $\frac{x^{n/2} \exp[-(a+\beta)x/2] I_n\left[\frac{1}{2}(a-\beta)\sqrt{x} \sqrt{x+4y}\right]}{(a-\beta)^n (x+4y)^{n/2}}$ |
| (135) | $\ln\left(\frac{s+a}{s+b}\right)$ | $\frac{\exp(-bx) - \exp(-ax)}{x}$ |
| (136) | $\frac{\ln[(s^2+a^2)/a^2]}{2s}$ | $I_c(ax)$ |
| (137) | $\frac{\ln[(s+a)/a]}{s}$ | $I_e(ax)$ |
| (138) | $-\frac{r}{s} + \frac{\ln s}{s}; r = 0.577215$ | $\ln x$ |
| (139) | $\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$ | $2 \frac{(\cos(ax) - \cos(bx))}{x}$ |
| (140) | $\frac{\pi^2}{6s} + \frac{(r + \ln s)^2}{s}$ | $\ln^2 x$ |
| (141) | $\frac{\ln s}{s}$ | $-(\ln x + r)$ |
| (142) | $\frac{\ln^2 s}{s}$ | $(\ln x + r)^2 + \frac{\pi^2}{6}$ |
| (143) | $\frac{\Gamma'(n+1) - \Gamma'(n+1) \ln s}{s^{n+1}}$ | $x^n \ln x \quad n > -1$ |
| (144) | $\operatorname{arctg}(a/s)$ | $\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$ |
| (145) | $\frac{\operatorname{arctg}(a/s)}{s}$ | $I_s(ax)$ |
| (146) | $\frac{\exp(as)}{\sqrt{s}} \operatorname{fene}\left(\frac{s}{2a}\right)$ | $\frac{\exp(-2\sqrt{ax})}{\sqrt{\pi x}}$ |

$f(s)$

$$(147) \quad \exp(s^2/4a^2) \operatorname{ferc}(s/2a)$$

$$(148) \quad \exp(s^2/4a^2) \frac{\operatorname{ferc}(s/2a)}{s}$$

$$(149) \quad \exp(as) \frac{\operatorname{ferc} \sqrt{as}}{\sqrt{s}}$$

$$(150) \quad \exp(as) I_e(as)$$

$$(151) \quad 1$$

$$(152) \quad \exp(-as)$$

$$(153) \quad \frac{s \exp(-\sqrt{s}y)}{s^2 + \omega^2}$$

$F(x)$

$$\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \exp(-a^2 x^2)$$

$$\operatorname{ferc}(ax)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(x+a)}}$$

$$\frac{1}{x+a}$$

$$\delta(x), \text{ función delta}$$

$$\delta(x-a)$$

$$\exp(-x\sqrt{\frac{\omega}{2}}) \cos(\omega x - y\sqrt{\omega/2})$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \exp(-\xi^2 z) \sin(y\sqrt{\xi^2}) d\xi}{\xi^2 + \omega^2}$$

APENDICE I-5

FUNCION IMPULSO O DELTA

Se conoce como función delta de Dirac y es una función impropia de importancia en matemáticas aplicadas. Las dificultades de la función $\delta(x)$ se reducen al considerar, que no es una función ordinaria que tiene valores definidos para cada valor de x sino que está determinada por sus propiedades.

La función $\delta(x)$ se define de tres maneras

a) Por la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \delta(x) = 0 \quad x \neq 0 \quad (1)$$

b)

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \quad (2)$$

como una secuencia de funciones que cumplen las ecuaciones

$$\int_0^{\infty} F_n(x) dx = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0 \quad x \neq 0$$

c) Por la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F(x) dx = F(0) \quad (3)$$

donde $F(x)$ es una función arbitraria y continua en el origen. Las definiciones anteriores o cualquiera otra carecen de significado si se considera $\delta(x)$ como una función ordinaria. Por el contrario si $\delta(x)$ es una distribución que confiere a la función $F(x)$ el valor $F(0)$ la definición c) puede tener un significado preciso mientras que las definiciones a) y b) pueden cumplirlas otras funciones con ciertas propiedades o funciones generalizadas por ejemplo $\delta(x) + \delta'(x)$

Si se admite que las propiedades de la función están implícitas en la ec. (3) las operaciones formales de las integrales y para $\delta(x-x_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F(x+x_0) dx = F(x_0) \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) F(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F\left(\frac{x}{a}\right) dx = \frac{1}{|a|} F(0)$$

si $F(x)$ es una función par, puesto que es continua, $\delta(x)$ es par por la ec.(3).

Si una función $F_1(x)$ es continua en $x=0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [F_1(x) \delta(x)] F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) [F_1(x) F(x)] dx = F_1(0) F(0)$$

La derivada $\delta'(x)$ de acuerdo con la integración por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \delta(x) F(x) dx = \delta(x) F(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \frac{dF(x)}{dx} dx = -F'(0)$$

y la derivada $\delta^n(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^n(x) F(x) dx = (-1)^n F^n(0)$$

La transformada de Laplace de $\delta(x)$ es la unidad puesto que

$$\int_0^{\infty} \delta(x) \exp(-sx) dx = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \exp(-sx) ds = \frac{1}{s} (1 - \exp(-s\epsilon))$$

y si $\epsilon \rightarrow 0$ $L[\delta(x)] = 1$

Análogamente la transformada de Fourier de $\delta(x)$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} \exp(sx) dz$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \exp(ix\xi) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

y para las derivadas de $\delta(x)$

$$L_F[\delta^n(x)] = (-i\xi)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

APENDICE I-6

FUNCION DE ERROR

Se define la función de error $\text{fer}(x)$

$$\text{fer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du \quad (1)$$

y la función complementaria de error $\text{ferc}(x)$

$$\text{ferc}(x) = 1 - \text{fer}(x) = \int_x^\infty \exp(-u^2) du \quad (2)$$

Para valores pequeños de x

$$\text{fer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad (3)$$

y para valores grandes de x

$$\text{fer}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{x^5} - \dots \right] \quad (4)$$

Por cambio de variables puede obtenerse las ecuaciones

$$\int_0^x \exp(-au^2) du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{fer}(x\sqrt{a}) \quad (5)$$

$$\int_x^\infty \exp(-au^2) du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ferc}(x\sqrt{a}) \quad (6)$$

Derivadas de la función de error

$$F^n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [\text{fer}(x)] \quad (7)$$

$$F^1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \quad (8)$$

$$F''(x) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} x \exp(-x^2) \quad (9)$$

En la tabla I-8 se indican valores de la función

TABLA I-6

Función de error $\text{fer}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du$ $x_F = \frac{x}{2\sqrt{x}}$

| x | fer x ₁ | x | fer x ₁ | x | fer x ₁ | x | fer x ₁ |
|------|--------------------|------|--------------------|------|--------------------|------|--------------------|
| 0.00 | 0.00000 | 0.40 | 0.42839 | 0.80 | 0.74210 | 1.20 | 0.91031 |
| 0.01 | 0.01128 | 0.41 | 0.43797 | 0.81 | 0.74800 | 1.21 | 0.91296 |
| 0.02 | 0.02256 | 0.42 | 0.44747 | 0.82 | 0.75381 | 1.22 | 0.91553 |
| 0.03 | 0.03384 | 0.43 | 0.45689 | 0.83 | 0.75952 | 1.23 | 0.91805 |
| 0.04 | 0.04511 | 0.44 | 0.46622 | 0.84 | 0.76514 | 1.24 | 0.92050 |
| 0.05 | 0.05637 | 0.45 | 0.47548 | 0.85 | 0.77067 | 1.25 | 0.92290 |
| 0.06 | 0.06762 | 0.46 | 0.48466 | 0.86 | 0.77610 | 1.26 | 0.92524 |
| 0.07 | 0.07886 | 0.47 | 0.49374 | 0.87 | 0.78144 | 1.27 | 0.92751 |
| 0.08 | 0.09008 | 0.48 | 0.50275 | 0.88 | 0.78669 | 1.28 | 0.92973 |
| 0.09 | 0.10128 | 0.49 | 0.51167 | 0.89 | 0.79184 | 1.29 | 0.93190 |
| 0.10 | 0.11246 | 0.50 | 0.52050 | 0.90 | 0.79691 | 1.30 | 0.93401 |
| 0.11 | 0.12362 | 0.51 | 0.52024 | 0.91 | 0.80188 | 1.31 | 0.93606 |
| 0.12 | 0.13476 | 0.52 | 0.53790 | 0.92 | 0.80677 | 1.32 | 0.93806 |
| 0.13 | 0.14587 | 0.53 | 0.54646 | 0.93 | 0.81156 | 1.33 | 0.94002 |
| 0.14 | 0.15695 | 0.54 | 0.55494 | 0.94 | 0.81627 | 1.34 | 0.94191 |
| 0.15 | 0.16800 | 0.55 | 0.56332 | 0.95 | 0.82089 | 1.35 | 0.94376 |
| 0.16 | 0.17901 | 0.56 | 0.57162 | 0.96 | 0.82542 | 1.36 | 0.94556 |
| 0.17 | 0.18999 | 0.57 | 0.57982 | 0.97 | 0.82987 | 1.37 | 0.94731 |
| 0.18 | 0.20094 | 0.58 | 0.58792 | 0.98 | 0.83423 | 1.38 | 0.94902 |
| 0.19 | 0.21184 | 0.59 | 0.59594 | 0.99 | 0.83851 | 1.39 | 0.95067 |
| 0.20 | 0.22270 | 0.60 | 0.60386 | 1.00 | 0.84270 | 1.40 | 0.95228 |
| 0.21 | 0.23352 | 0.61 | 0.61168 | 1.01 | 0.84681 | 1.41 | 0.95385 |
| 0.22 | 0.24430 | 0.62 | 0.61941 | 1.02 | 0.85084 | 1.42 | 0.95538 |
| 0.23 | 0.25502 | 0.63 | 0.62705 | 1.03 | 0.85478 | 1.43 | 0.95686 |
| 0.24 | 0.26570 | 0.64 | 0.63459 | 1.04 | 0.85865 | 1.44 | 0.95830 |
| 0.25 | 0.27633 | 0.65 | 0.64203 | 1.05 | 0.86244 | 1.45 | 0.95970 |
| 0.26 | 0.28690 | 0.66 | 0.64938 | 1.06 | 0.86614 | 1.46 | 0.96105 |
| 0.27 | 0.29742 | 0.67 | 0.65663 | 1.07 | 0.86977 | 1.47 | 0.96237 |
| 0.28 | 0.30788 | 0.68 | 0.66378 | 1.08 | 0.87333 | 1.48 | 0.96365 |
| 0.29 | 0.31828 | 0.69 | 0.67084 | 1.09 | 0.87680 | 1.49 | 0.96490 |
| 0.30 | 0.32863 | 0.70 | 0.67780 | 1.10 | 0.88020 | 1.50 | 0.96610 |
| 0.31 | 0.33891 | 0.71 | 0.68467 | 1.11 | 0.88353 | 1.51 | 0.96728 |
| 0.32 | 0.34913 | 0.72 | 0.69143 | 1.12 | 0.88679 | 1.52 | 0.96841 |
| 0.33 | 0.35928 | 0.73 | 0.69810 | 1.13 | 0.88997 | 1.53 | 0.96952 |
| 0.34 | 0.36936 | 0.74 | 0.70468 | 1.14 | 0.89308 | 1.54 | 0.97059 |
| 0.35 | 0.37938 | 0.75 | 0.71116 | 1.15 | 0.89612 | 1.55 | 0.97162 |
| 0.36 | 0.38933 | 0.76 | 0.71754 | 1.16 | 0.89910 | 1.56 | 0.97263 |
| 0.37 | 0.39921 | 0.77 | 0.72382 | 1.17 | 0.90200 | 1.57 | 0.97360 |
| 0.38 | 0.40901 | 0.78 | 0.73001 | 1.18 | 0.90484 | 1.58 | 0.97455 |
| 0.39 | 0.41874 | 0.79 | 0.73610 | 1.19 | 0.90761 | 1.59 | 0.97546 |

TABLA I-6
(Continuación)

| x | fer x_1 | x | fer x_1 | x | fer x_1 | x | fer x_1 |
|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| 1.60 | 0.97635 | 1.80 | 0.98909 | 2.00 | 0.995322 | 2.40 | 0.999311 |
| 1.61 | 0.97721 | 1.81 | 0.98952 | 2.02 | 0.995720 | 2.42 | 0.999379 |
| 1.62 | 0.97804 | 1.82 | 0.98994 | 2.04 | 0.996086 | 2.44 | 0.999441 |
| 1.63 | 0.97884 | 1.83 | 0.99035 | 2.06 | 0.996424 | 2.46 | 0.999497 |
| 1.64 | 0.97962 | 1.84 | 0.99074 | 2.08 | 0.996734 | 2.48 | 0.999547 |
| 1.65 | 0.98038 | 1.85 | 0.99111 | 2.10 | 0.997020 | 2.50 | 0.999593 |
| 1.66 | 0.98110 | 1.86 | 0.99147 | 2.12 | 0.997284 | 2.55 | 0.999689 |
| 1.67 | 0.98181 | 1.87 | 0.99182 | 2.14 | 0.997525 | 2.60 | 0.999764 |
| 1.68 | 0.98249 | 1.88 | 0.99216 | 2.16 | 0.997747 | 2.65 | 0.999822 |
| 1.69 | 0.98315 | 1.89 | 0.99248 | 2.18 | 0.997951 | 2.70 | 0.999866 |
| 1.70 | 0.98379 | 1.90 | 0.99279 | 2.20 | 0.998137 | 2.75 | 0.999899 |
| 1.71 | 0.98441 | 1.91 | 0.99309 | 2.22 | 0.998308 | 2.80 | 0.999925 |
| 1.72 | 0.98500 | 1.92 | 0.99338 | 2.24 | 0.998464 | 2.85 | 0.999944 |
| 1.73 | 0.98558 | 1.93 | 0.99366 | 2.26 | 0.998607 | 2.90 | 0.999959 |
| 1.74 | 0.98613 | 1.94 | 0.99392 | 2.28 | 0.998738 | 2.95 | 0.999970 |
| 1.75 | 0.98667 | 1.95 | 0.99418 | 2.30 | 0.998857 | 3.00 | 0.999978 |
| 1.76 | 0.98719 | 1.96 | 0.99443 | 2.32 | 0.998966 | 3.20 | 0.999994 |
| 1.77 | 0.98769 | 1.97 | 0.99466 | 2.34 | 0.999065 | 3.40 | 0.999998 |
| 1.78 | 0.98817 | 1.98 | 0.99489 | 2.36 | 0.999155 | 3.60 | 1.000000 |
| 1.79 | 0.98864 | 1.99 | 0.99511 | 2.38 | 0.999237 | | |

*NOTA: $1 - \text{fer}(x) = \text{ferc}(x)$

También se denomina función $\text{erf}(x)$ y $1 - \text{erf}(x) = \text{erfc}(x)$

TABLA I-7

Función gamma $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} \exp(-u) du$ $1 \leq x \leq 2$
 para otros valores puede utilizarse la relación

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

| x | $\Gamma(x)$ | x | $\Gamma(x)$ | x | $\Gamma(x)$ |
|------|-------------|------|-------------|------|-------------|
| 1.00 | 1.00000 | 1.40 | 0.88726 | 1.80 | 0.93138 |
| 1.01 | 0.99433 | 1.41 | 0.88676 | 1.81 | 0.93408 |
| 1.02 | 0.98884 | 1.42 | 0.88636 | 1.82 | 0.93685 |
| 1.03 | 0.98355 | 1.43 | 0.88604 | 1.83 | 0.93969 |
| 1.04 | 0.97844 | 1.44 | 0.88581 | 1.84 | 0.94261 |
| 1.05 | 0.97350 | 1.45 | 0.88566 | 1.85 | 0.94561 |
| 1.06 | 0.96874 | 1.46 | 0.88560 | 1.86 | 0.94869 |
| 1.07 | 0.96415 | 1.47 | 0.88563 | 1.87 | 0.95184 |
| 1.08 | 0.95973 | 1.48 | 0.88575 | 1.88 | 0.95507 |
| 1.09 | 0.95546 | 1.49 | 0.88595 | 1.89 | 0.95838 |
| 1.10 | 0.95135 | 1.50 | 0.88623 | 1.90 | 0.96177 |
| 1.11 | 0.94740 | 1.51 | 0.88659 | 1.91 | 0.96523 |
| 1.12 | 0.94359 | 1.52 | 0.88704 | 1.92 | 0.96877 |
| 1.13 | 0.93993 | 1.53 | 0.88757 | 1.93 | 0.97240 |
| 1.14 | 0.93642 | 1.54 | 0.88818 | 1.94 | 0.97610 |
| 1.15 | 0.93304 | 1.55 | 0.88887 | 1.95 | 0.97988 |
| 1.16 | 0.92980 | 1.56 | 0.88964 | 1.96 | 0.98374 |
| 1.17 | 0.92670 | 1.57 | 0.89049 | 1.97 | 0.98768 |
| 1.18 | 0.92373 | 1.58 | 0.89142 | 1.98 | 0.99171 |
| 1.19 | 0.92089 | 1.59 | 0.89243 | 1.99 | 0.99581 |
| 1.20 | 0.91817 | 1.60 | 0.89352 | 2.00 | 1.00000 |
| 1.21 | 0.91558 | 1.61 | 0.89468 | | |
| 1.22 | 0.91311 | 1.62 | 0.89592 | | |
| 1.23 | 0.91075 | 1.63 | 0.89724 | | |
| 1.24 | 0.90852 | 1.64 | 0.89864 | | |
| 1.25 | 0.90640 | 1.65 | 0.90012 | | |
| 1.26 | 0.90440 | 1.66 | 0.90167 | | |
| 1.27 | 0.90250 | 1.67 | 0.90330 | | |
| 1.28 | 0.90072 | 1.68 | 0.90500 | | |
| 1.29 | 0.89904 | 1.69 | 0.90678 | | |
| 1.30 | 0.89747 | 1.70 | 0.90864 | | |
| 1.31 | 0.89600 | 1.71 | 0.91057 | | |
| 1.32 | 0.89464 | 1.72 | 0.91258 | | |
| 1.33 | 0.89338 | 1.73 | 0.91467 | | |
| 1.34 | 0.89222 | 1.74 | 0.91683 | | |
| 1.35 | 0.89115 | 1.75 | 0.91906 | | |
| 1.36 | 0.89018 | 1.76 | 0.92137 | | |
| 1.37 | 0.88931 | 1.77 | 0.92376 | | |
| 1.38 | 0.88854 | 1.78 | 0.92623 | | |
| 1.39 | 0.88785 | 1.79 | 0.92877 | | |

APENDICE II

| | |
|--|-----|
| II-1. Tabla de propiedades de algunos metales y aleaciones. | 748 |
| II-2. Tabla de propiedades de materiales cerámicos. | 755 |
| II-3. Tabla de propiedades de aceros y aleaciones | 760 |
| II-4. Tabla de propiedades térmicas de materiales diversos. | 761 |
| II-5. Tabla de materiales aislantes para altas temperaturas | 764 |
| II-6. Tabla de materiales aislantes para temperaturas inter- medias | 765 |
| II-7. Tabla de materiales aislantes para bajas temperaturas | 766 |
| II-8. Tabla de poder transmisor y emisividades de algunos cuer- pos. | 768 |
| II-9. Tabla de propiedades térmicas del aire seco | 769 |
| II-10. Tabla de propiedades térmicas de algunos gases. . . . | 770 |
| II-11. Tabla de propiedades del vapor de agua saturado. . . | 773 |
| II-12. Tabla de propiedades del agua líquida. | 774 |
| II-13. Tabla de propiedades de algunos metales líquidos. . . | 775 |
| II-14. Tabla de propiedades del mercurio. | 778 |
| II-15. Tabla de propiedades de la mezcla nítrito-nitrato. . | 780 |

TABLA II-1. PROPIEDADES FISICAS DE ALGUNOS METALES Y ALEACIONES.

P (pulido) O (oxidado)

| | T_f (fusion) (°C) | t_e (ebull) (°C) | λ_f (Kcal) (Kcal/Kg) | $\rho \cdot 10^{-3}$ (Kg/m ³) | C_p (°C) (Kcal) (Kcal/Kg °C) | | k (°C) (Kcal) (h m °C) | | L_t (°C) 10^6 (J/g) | | ρ_e (°C) 10^6 (Ω cm) | | ϵ (emisividad) °C % | |
|---|---------------------------|--------------------------|------------------------------------|--|--------------------------------------|---|----------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|------------------------------|--|-----------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|
| Aluminio (99,96%) | 660 | 2060 | 94.6 | 2690 | -150 0 100 300 600 | 0.136 0.207 0.225 0.248 0.277 | -200 100 181 190 400 | 207 196 181 190 196 | -100-0 20-200 20-400 20-600 | 20 24.7 26.7 28.7 | -189 100 0 100 400 | 0.64 1.53 2.63 3.86 8 | 20 600 25 100 500 | 1(p) 2(p) 2.2 2.8 6 |
| Aluminio comercial puro (99%) | 657 | | 93 | 2710 | 0 100 200 400 600 | 0.222 0.222 0.237 0.252 0.268 | -200 | 163 | -60-20 20-100 20-200 20-300 | 21.7 23.5 24.6 25.6 | 20 657(L) 20 | 2.92 20 | 50-500 200 600 | 4.6(p) 11(°) 19(°) |
| Al-Mn (1.2%) | 654 | | | 2730 | 100 | 0.23 | 20 | 136 | 60+20 20-100 20-200 20-400 | 21.4 23.2 23.6 24.5 | 20 | 3.44 | 25 | 3.5-7 |
| Al-Cu (4.4%)-Si (0.8%) Mn (0.8%)-Mg (0.4%) | 638 | | | 2800 | 100 | 0.23 | 20 | 165 | 60+120 20-400 | 22 24.5 | 20 | 3.44 | 20 400 | 10 12 |
| Al-Si (12%)-Cu (1%) | 571 | | | 2690 | 100 | 0.23 | 20 | 133 | 60+20 20-300 | 19.4 21.1 | 20 | 4.3 | 20 | 3.5-7 |
| Al-Mg (2.5%)-Cr (0.25%) | 649 | | | 2680 | 100 | 0.23 | 20 | 118 | 20-300 | 25.8 | 20 | 4.92 | 20 | 5 |
| Al-Si (12%) | 585 | | 93 | 2660 | 100 | 0.23 | 20 | 133 | 20-300 | 21.5 | 20 | 4.42 | | |
| Al-Cu (4%)-Si (3%) | 632 | | 93 | 2790 | 100 | 0.23 | 20 | 104 | 20-300 | 24 | 20 | 5.56 | | |
| Al-Cu (10%)-Mg (0.2%) | 627 | | 93 | 2950 | 100 | 0.23 | 20 | 136 | 20-300 | 23.5 | 20 | 6.8 | | |
| Al-Mg (8%) | 621 | | | 2530 | 100 | 0.23 | 20 | 86.4 | | | 20 | 7.18 | | |

TABLA II-1. PROPIEDADES FISICAS DE ALGUNOS METALES Y ALEACIONES

P (pulido) O (oxidado)

| | T_f (fusion) | t_e (ebull) | λ_f | $\rho \cdot 10^3$ | C_p | | k | | L_t | | ρ_e | | (emisividad) ϵ | |
|-----------|-------------------|------------------|--|-------------------|-------------------------|--|------------------------|---|---------------------------------------|---|-------------------------|---|----------------------------|--------------|
| | (°C) | (°C) | $\left(\frac{\text{Kcal}}{\text{kg}}\right)$ | kg/m^3 | (°C) | $\left(\frac{\text{Kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}\right)$ | (°C) | $\left(\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^\circ\text{C}}\right)$ | (°C) | $10^6 \left(\frac{1}{\text{cm}^2}\right)$ | (°C) | $10^6 \left(\frac{1}{\Omega \text{ cm}}\right)$ | °C | % |
| Antimonio | 630 | 1440 | 38.3 | 6620 | 20 200 500 | 0.049 0.052 0.054 | 20 100 500 | 16.2 14.4 16.9 | 20 20-500 | 12 11.6 | 20 100 500 | 39 61 154 | | |
| Arsénico | 812 | 610 (m) | | 5730 | 0-100 | 0.082 | | | 20 | 4.7 | 20 | 35 | | |
| Azufre | 119 | 444 | 9.3 | 2070 | 20 | 0.175 | 20 | 0.22 | 20 | 36 | 20 | 210 | | |
| Besilio | 1315 | 2970 | 260 | 1840 | -100 0 200 800 | 0.20 0.42 0.57 0.74 | 0 100 400 600 | 126 122 100 86 | 25-100 25-300 25-500 25-1000 | 11.6 14.4 15.9 18.7 | 20 100 300 700 | 5.9 7 14 32.6 | 20 | 61 |
| Bismuto | 271 | 1420 | 12.5 | 9800 | 20 | 0.034 | 20 189 256 | 7 6.5 6.58 | -185-15 20-100 | 13 13.4 | -100 0 | 0.75 10.2 | 20 100 | 4.8 6.1 |
| Boro | 2300 | | | 2300 | 20 | 0.260 | | | 20 | 8.3 | 20 700 | 1.8 10 | | |
| Cadmio | 320 | 765 | 13.20 | 8650 | 20 100 300 | 0.055 0.056 0.076 | 20 100 300 | 79 77.7 90 | 20 300 | 31.8 31.6 | 20 100 | 6.8 9.6 | | |
| Calcio | 850 | 1440 | | 1550 | 20 | 0.149 | 20 | 108 | 20 | 22 | 20 | 3.43 | | |
| Cesio | 28 | 690 | 3.8 | 1900 | 20 | 0.052 | | | 20 | 97 | 20 | 78 | | |
| Cinc | 419 | 906 | 24.1 | 7130 | 0 100 200 400 | 0.091 0.095 0.1 0.109 | -200 20 400 | 108 97.2 82.4 | 20-100 20-300 | 31 34 | 20 200 300 400 | 5.9 11 13.7 16.5 | 200 300 | 4.4 (p) 5 |

TABLA II-1. PROPIEDADES FISICAS DE ALGUNOS METALES Y ALEACIONES.

p(pulido) o(oxidado)

| | (fusión) T_f | (ebull.) t_e | λ_f | $\rho \cdot 10^3$ | C_p | | k | | L_t | | ρ_e | | (emisividad) ϵ | |
|--|-------------------|-------------------|-------------------------------------|----------------------------|-------|---|------|---|--------|--|----------|--|----------------------------|--------|
| | (°C) | (°C) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{kg}}$) | (kg/m^3) | (°C) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$) | (°C) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}}$) | (°C) | ($10^6(\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2})$) | (°C) | ($10^6(\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2})$) | °C | % |
| Circonio | 1845 | 2900 | 60.5 | 6500 | 20 | 0.069 | 50 | 18 | 25 | 5.69 | -200 | 7 | 20 | 60 |
| | | | | | 127 | 0.073 | 100 | 17.6 | | | 0 | 40 | | |
| | | | | | 427 | 0.086 | 250 | 16 | | | 200 | 73 | | |
| | | | | | 1127 | 0.080 | | | | | 600 | 119 | | |
| Cobalto | 1495 | 2900 | 58.4 | 8800 | 20 | 0.102 | | | | | | | 1000 | 20 |
| | | | | | 200 | 0.113 | | | | | | | | |
| | | | | | 800 | 0.160 | | | | | | | | |
| | | | | | 1000 | 0.184 | | | | | | | | |
| Co (65%) - Cr (25%) Ni (2%) - C (0.25%) Fe (1%) - Mo (5%) - Mn (0.6%) | | | | 8300 | 20 | 0.10 | 200 | 12.2 | 20-400 | 4.35 | | | | |
| | | | | | | | 600 | 17.6 | 20-800 | 4.65 | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| Co (34%) - Cr (25%) - Ni (32%) - C (0.4%) - Fe (1%) Mo (6%) - Mn (0.6%) - S (0.6%) | | | | 8210 | | | 200 | 11.8 | 20-800 | 4.8 | | | | |
| | | | | | | | 600 | 17 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| Cobre | 1083 | 2600 | 50.6 | 8960 | 20 | 0.0918 | 100 | 349 | -191-0 | 14 | 20 | 1.67 | 20 | 1.8(p) |
| | | | | | 100 | 0.0939 | 0 | 333.7 | 25-300 | 17.8 | 400 | 4.5 | 1000 | 60(0) |
| | | | | | 200 | 0.0959 | 100 | 325 | 25-500 | 18.3 | 600 | 5.5 | 100 | 2 |
| | | | | | 1000 | 0.1113 | 200 | 320 | 25- | 20.3 | | | 200 | 60(0) |
| Cu (99.94%) - P (0.02%) | 1083 | | | 8940 | | | 400 | 311.7 | 1000 | | | | | |
| | | | | | | | 600 | 303 | | | | | | |
| | | | | | 20 | 0.092 | 20 | 291 | 20 | 17.7 | 20 | 2.03 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| Cu (85%) - Zn (15%) | 1025 | | | 8750 | 20 | 0.094 | 20 | 137 | 20-300 | 18 | 20 | 4.7 | 200 | 3 |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| Cu (70%) - Zn (30%) | 1000 | | | 8670 | 20 | 0.094 | 20 | 104 | 20-300 | 19.9 | 20 | 6.2 | 200 | 3 |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| Cu (60%) - Zn (39.2%) Sn (0.75%) | 900 | | | 8410 | 20 | 0.094 | 20 | 100 | 20-300 | 21 | | | 50 | 4 |
| | | | | | | | | | | | | | | |

TABLA II-1. PROPIEDADES FÍSICAS DE ALGUNOS METALES Y ALEACIONES

| | p (pulido) | o (oxidado) | | $\rho \cdot 10^{-3}$ | C_p | k | L_t | ρ_e | (emisividad) | | | | | |
|---------------------|------------|-------------|-----------------------|----------------------|-------------------|--------------------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------|------------------------------------|----------------------|-----------------------|
| | T_f | t_e | λ_f | | | | | | E | | | | | |
| | (°C) | (°C) | ($\frac{Kcal}{kg}$) | kg/m^3 | (°C) | ($\frac{Kcal}{kg \cdot ^\circ C}$) | (°C) | ($\frac{Kcal}{hm^2}$) | (°C) | $10^8 (\frac{1}{^\circ C})$ | (°C) | $10^6 (\frac{1}{\Omega \cdot cm})$ | °C | % |
| Cu (90%) - Sn (10%) | 1000 | | | 8780 | 20 | 0.09 | 20 | 43 | 20-300 | 18 | 20 | 16 | | |
| Cu (70%) - Ni (30%) | 1240 | | | 8940 | 20 | 0.09 | 20 | 32 | 20-300 | 16.2 | | | 20 | 5.9 |
| Cu (55%) - Ni (45%) | 1220 | | | 8900 | 20 | 0.094 | -100 300 | 16.5 24 | 20 | 15 | 20 | 49 | | |
| Cu-Si (3%) | 1025 | | | 8530 | 20 | 0.09 | 20 | 32 | 20-300 | 18 | 20 | 37 | | |
| Cu (95%) - Al (5%) | 1060 | | | 8170 | 20 | 0.1 | 20 | 71 | 20-300 | 9.8 | 20 | 22 | 0-800 | 2 (p) |
| Cromo | 1890 | 2500 | | 7190 | 20 | 0.11 | 20 | 63 | 20 | 6.2 | 20 | 13 | 40-1000 | 8-36 (p) |
| Estaño | 231 | 2270 | 14.5 | 7290 | 20 200 | 0.054 0.062 | -100 200 | 63 48 | -180+20 20-200 | 22.5 24 | 20 200 | 11.5 23 | 20 100 | 5.1 (p) 5 |
| Estroncio | 770 | 1380 | 25 | 2600 | 20 | 0.176 | | | | | 20 | 23 | | |
| Fósforo | 44 | 280 | 5 | 1820 | 20 | 0.177 | 20 | 61 | 20 | 125 | 0 | 9.8 | | |
| Galio | 29.7 | 2070 | 19.2 | 5910 | 20 | 0.177 | | | | | | | | |
| Hafnio | 2130 | 3000 | | 13360 | 20 | 0.035 | 20 500 | 19 17 | | | 20 1000 | 22 140 | | |
| Hierro | 1535 | 140 | 65 | 7850 | 20 500 1000 | 0.108 0.163 0.162 | -100 0 400 1000 | 74 57 41 30 | -190+20 20-400 20-800 | 9 13.8 14.6 | 20 200 800 | 9.7 22 105 | 100 20-300 100 | 3.6 (p) 4 (0) 5 |
| Indio | 156.4 | | | 7310 | -100 | 0.050 | | | -100 0 | 37 6.3 | | | | |

TABLA II-1. PROPIEDADES FISICAS DE ALGUNOS METALES Y ALEACIONES.

P (pulido) o (oxidado)

| | T_f (fusion) | t_e (ebull.) | λ_f | $\rho \cdot 10^{-3}$ | C_p | | k | | L_t | | ρ_e | | ϵ (emisividad) | |
|-----------------------------------|-------------------|-------------------|-------------|----------------------|--------------------|-------------------------|---------------------|--------------------|-------------------------|------------------------|------------------|--------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| | (°C) | (°C) | (Kcal/kg) | kg/m ³ | (°C) | (Kcal/kg °C) | (°C) | (Kcal/cm °C) | (°C) | 10 ⁶ (J/°C) | (°C) | 10 ⁶ (Ω cm) | °C | % |
| Iridio | 2454 | 5300 | | 22500 | 20 500 | 0.0307 0.034 | 20 100 | 50.4 48.5 | -100 20-1000 | 5.63 7.8 | -186 100 | 1.92 8.30 | | |
| Litio | 168 | 1370 | | 530 | 20 100 | 0.19 1.04 | -100 0 | 81.7 60.4 | 20 | 56 | -184 100 | 1.34 12.5 | | |
| Magnesio | 650 | 1197 | 89 | 1740 | -100 100 600 | 0.206 0.257 0.311 | -100 0 400 | 172 147 135 | -100 0 20-300 | 21.7 25 29.2 | 20 400 | 4.4 11.9 | | |
| Mg-Al (10%) - Mn (0.1%) | 594 | | 89 | 1810 | 20 | 0.25 | -200 300 | 46 61.2 | 40 | 26 | 20 | 15 | 20 300 | 10 (p,o) 16 (p,o) |
| Mg-Al (6%) - Mn (0.2%) Zn (3%) | 610 | | 89 | 1810 | | | -196 300 | 50 64 | 20-100 | 26 | 20 | 11-15 | 300 | 16 (p,o) |
| Mg-Al (3%) - Zn (1%) Mn (0.3) | 632 | | | 1780 | | | 100-300 | 82.8 | 40 | 26 | 20 | 9.8 | | |
| Mg-Al (6%) - Zn (1%) - Mn (0.2) | 618 | | | 1800 | | | 100-300 | 68.4 | 40 | 26 | 20 | 14.9 | | |
| Manganeso | 1245 | 2150 | 63.7 | 7430 | -100 25 300 | 0.09 0.115 0.178 | -150 | 5.4 | 20 | 22 | 20 | 185 | | |
| Mercurio | -38.8 | 357 | 2.7 | 13550 | 20 | 0.033 | 20 | 7.56 | -183-0 | 30 | | 94.1 | | |
| Molibdeno | 2622 | 4800 | 70 | 10200 | -100 20 1500 | 0.049 0.060 0.081 | -100 100 1500 | 154 118 72 | -173 27 20-500 | 2.8 5.2 5.7 | 0 | 5.17 | 20 600 2000 | 7.1 (p) 9.6 (p) 29 (p) |
| Níquel (99.95%) | 1455 | 2370 | 73.8 | 8900 | 20 100 500 | 0.106 0.112 0.126 | -100 25 500 | 86 79.2 53.2 | -191+16 300- 1000 | 10.2 13.4 | 20 200 900 | 6.84 15.8 45.5 | 20 20 1000 1000 | 4,5 (p) 40 (o) 16 (p) 86 (o) |

TABLA II-1. PROPIEDADES FISICAS DE ALGUNOS METALES Y ALEACIONES

P (pulido) O (oxidado)

| | (fusion) T_f | (ebull.) t_e | λ_f | $\rho \cdot 10^{-3}$ | C_p | | k | | L_t | | ρ_e | | (emisi. vidad) ϵ | |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------------------------|----------------------|-------------------|---|-------------|--|-------------------|-------------------------------|------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| | (°C) | (°C) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{kg}}$) | kg/m^3 | (°C) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$) | (°C) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^2}$) | (°C) | $10^6(\frac{1}{\text{cm}^2})$ | (°C) | $10^6(\frac{1}{\text{cm}^2})$ | °C | % |
| Oro | 1063 | 2970 | 16.1 | 19320 | 20 | 0.031 | 20 | 255 | 16-100 | 14.3 | 20 | 2.35 | 20 | 2 (p) |
| Osmio | 2700 | 5500 | | 22610 | 0 1600 | 0.0309 0.0385 | | | 50 | 4 | 20 | 9.5 | 20 500 | 2 (p) 3.5 (p) |
| Paladio | 1554 | 3980 | 34.2 | 12000 | 20 1500 | 0.058 0.076 | 20 | 61.2 | 20 20-1000 | 11.8 13.6 | 20 1000 | 10.8 40 | 20 700 | 1 9 |
| Plata | 960 | 2210 | 25 | 10490 | 20 100 800 | 0.056 0.0564 0.076 | 20 500 | 360 324 | -191+20 20-800 | 17 22 | 20 900 | 1.59 7.6 | 200-500 | 2-3 (p) |
| Platino | 1773 | 4530 | 26.9 | 21450 | 20 500 1300 | 0.032 0.034 0.04 | 20 | 61.2 | 20 20-1000 | 8.9 10.2 | 20 1500 | 10.6 55.4 | 130 600 1500 | 5.2 (p) 10 (p) 19 |
| Plomo | 327 | 1725 | 6.26 | 11340 | 20 300 | 0.031 0.035 | -100 300 | 31.3 25.2 | -183+20 20-300 | 27 31 | 20 300 | 20.8 50 | 130 28 | 6.7 (p) 28 (o) |
| Pb(92%)-Sb(8%) | 271 | | | 10740 | 20 | 0.032 | 20-100 | 23.4 | | | 20 | 26.5 | | |
| Pb(80%)-Sn(20%) | 277 | | | 10200 | | | 20 | 32 | 20 | 26.5 | 20 | 17.5 | | |
| Potasio | 63 | 770 | 14.5 | 860 | 20 | 0.032 | 20 | 86.4 | 20 | 83 | 20 | 6.15 | | |
| Rodio | 1966 | 4500 | | 12410 | 20 | 0.059 | 20 | 75.6 | 20 20-1000 | 12 10.8 | 20 500 | 4.7 14.6 | 20 1500 | 2 8 |
| Rubidio | 39 | 680 | 6.1 | 1530 | 20 | 0.080 | | | 20 | 90 | 20 | 12.5 | | |
| Selenio | 220 | 680 | 6.6 | 4810 | 20 | 0.084 | | | -180 40 | 37.2 36.8 | | | | |

TABLA II-1. PROPIEDADES FISICAS DE ALGUNOS METALES Y ALEACIONES
p (pulido) o (oxidado)

| | p (pulido) o (oxidado) | | | | | | | | | | | | ε (emissividad) | |
|-----------|------------------------|-------------------|-----------------------|-------------------|---------------|--------------------------------------|--------------------|---|-------------------|------------------------------------|--------------------|------------------------------------|-------------------|------------------------------|
| | T_f (fusion) | t_e (ebull.) | λ_f | $\rho \cdot 10^3$ | C_p | | k | | L_t | | ρ_e | | E | |
| | (°C) | (°C) | ($\frac{Kcal}{kg}$) | kg/m^3 | (°C) | ($\frac{Kcal}{kg \cdot ^\circ C}$) | (°C) | ($\frac{Kcal}{m \cdot m^2 \cdot ^\circ C}$) | (°C) | $10^6 (\frac{1}{\Omega \cdot cm})$ | (°C) | $10^6 (\frac{1}{\Omega \cdot cm})$ | °C | % |
| Silicio | 1430 | 2300 | 337 | 2330 | 20 18-1000 | 0.162 0.210 | 20 | 72 | 20 | 28-37 | 20 | 10 | 800 1300 | 65 45 |
| Sodio | 97.7 | 892 | 27.5 | 970 | 20 | 0.295 | 20 | 115 | 20 | 4.27 | 20 | 4.2 | | |
| Talio | 300 | 1460 | 7.2 | 11850 | 20 | 0.031 | 20 200 | 33.4 36 | 20 | 28 | 20 | 18 | | |
| Tántalo | 2996 | | | 16600 | 0 | 0.036 | 20 | 46.8 | 20 | 65 | 20 | 12.4 | 1000 2000 | 6 (p) 26 |
| Titanio | 1820 | | | 4500 | 25 400 | 0.126 0.148 | 20 700 | 20 15 | 20 800 | 8.5 9.9 | 20 800 | 55 165 | 20 500 | 18 (p) 21 (p) |
| Torio | 1845 | | | 11710 | 20 | 0.028 | 20 | 32.4 | 20 | 11.5 | 20 | 19 | 20 | 36 |
| Uranio | 1333 | | | 19100 | 20 600 | 0.028 0.045 | 20 900 | 21.6 36 | 20 | 14.5 | 20 1000 | 32 56 | 20 | 54 |
| Vanadio | 1735 | | 3400 | 6100 | 20 | 0.127 | 20 | 25 | 20 | 8.3 | 20 | 26 | 1000 | 77 |
| Volframio | 3395 | 9530 | 44 | 19200 | 20 1500 | 0.032 0.039 | 20 1000 3000 | 144 60 129 | 20 20- 3000 | 4.4 6.6 | 20 1000 3000 | 5.5 33 100 | 20 500 1000 | 2-3 (p) 7 (p) 30 (p.o) |

TABLA II-2. PROPIEDADES DE MATERIALES CERAMICOS

| | (gases) v_g | ρ | C_p | | k | | L_t | | ρ_e | | (fusión) T_f | (reblan.) T_r | (emisividad) ϵ | |
|---|------------------|----------------------|--------|--------------|------|--------------|-------|--------------------------|----------|-----------------------|-------------------|--------------------|----------------------------|----|
| | % | (g/cm ³) | (°C) | (Kcal/kg °C) | (°C) | (Kcal/hm °C) | (°C) | (1/°C) · 10 ⁶ | (°C) | (n.cm) | (°C) | (°C) | (°C) | % |
| Alúmina (100% Al ₂ O ₃) | 0 | 3.87 | 20-100 | 0.206 | 20 | 16.5 | 100 | 6.8 | 300 | 10 ¹² | 2050 | | 20 | 73 |
| | | | 500 | 0.24 | 500 | 6.1 | 500 | 7.6 | 800 | 10 ⁸ | | | 300 | 73 |
| | | | 1000 | 0.26 | 1000 | 5.3 | 1000 | 8.6 | 1100 | 10 ⁶ | | | 800 | 40 |
| | | | 1500 | 0.27 | 1500 | 5.0 | 1500 | 9 | 1300 | 10 ⁴ | | | 1500 | 31 |
| Al ₂ O ₃ (80-95%) Fe ₂ O ₃ (2-5%) (Ladrillos de corindon) | 16-20 | 3.2-3.5 | 20 | 0.2 | 20 | 6.12 | 0 | 7 | 20 | 10 ¹⁴ | | | 100 | 85 |
| | | | 500 | 0.24 | 500 | 2.9 | | | 1000 | 10 ⁴ | 1790- 1900 | 1300 | | |
| | | | 1000 | 0.30 | 1000 | 2.1 | | | | | | | | |
| | | | 1500 | 0.36 | | | | | | | | | | |
| Al ₂ O ₃ (60-65%) SiO ₂ (26-31%) Fe ₂ O ₃ (4-7%) (Ladrillos de bauxita) | 19-22 | 2.4 | 20 | 0.2 | 100 | 3.6 | 20 | 7 | 500 | 10 ⁶ | | | | |
| | | | | | 1000 | 1.8 | | | 1000 | 5 · 10 ⁴ | 1790 | 1200 | 800 | 50 |
| | | | | | | | | | 1500 | 7 · 10 ³ | | | 1650 | 62 |
| Al ₂ O ₃ (58-60%) SiO ₂ (40-38%) Fe ₂ O ₃ (0.8-1.5%) (Ladrillos de cianita) | 20-22 | 2.5 | 20 | 0.2 | 500 | 1.30 | | | 500 | 8 · 10 ³ | | | 1300 | 61 |
| | | | | | 900 | 1.42 | | | 1000 | 10 ⁵ | | | 1800 | 43 |
| | | | | | | | 20 | 5.5 | 1500 | 9 · 10 ³ | 1820 | 1350 | | |
| Berilia (100% BeO) | 0 | 3.01 | 20 | 0.299 | 100 | 189 | 100 | 5.4 | | | 2570 | | 1000 | 56 |
| | | | 500 | 0.44 | 400 | 76 | 500 | 7.4 | 800 | 6.4 · 10 ⁷ | | | 1800 | 60 |
| | | | 1000 | 0.50 | 1000 | 16.5 | 1000 | 8.9 | 1100 | 4.6 · 10 ⁶ | | | | |
| | | | | | 1800 | 13.2 | | | | | | | | |
| Carburo de Silicio (CSi 100%) | 0 | 3.2 | 100 | 0.19 | 20 | | 20 | 4.7 | 20 | 1 | 2250 | | 1000 | 92 |
| | | | 500 | 0.27 | 500 | 100 | 25- | | 500 | 0.1 | | | 1400 | 82 |
| | | | 1000 | 0.30 | 1000 | 40 | 1500 | | | | | | | |
| | | | | | 1500 | 7.2 | | | | | | | | |
| CSi (89-91%) SiO ₂ (6-9%) | | 3.18 | 20 | 0.20 | 20 | 14.4 | 20 | 4.5 | 900 | 2 · 10 ⁵ | 2200 | | 800 | 93 |
| | | | 500 | 0.25 | 500 | 13 | -1000 | | 1100 | 3 · 10 ⁴ | | | | |
| | | | 1000 | 0.3 | 1000 | 9.7 | | | 1500 | 8 · 10 ³ | | | | |

TABLA II-2. PROPIEDADES DE MATERIALES CERAMICOS

| | gases ν_g | ρ | C_p | k | | L_t | | ρ_e | | (fusión) T_f | (emisividad) ϵ | | |
|--|------------------|----------------------|----------------------------|--------------------------------------|----------------------------|---|--------------------|-------------------------------------|---------------------|--|----------------------------|----------------------------|----------------------|
| | % | (g/cm ³) | (°C) | ($\frac{kcal}{kg \cdot ^\circ C}$) | (°C) | ($\frac{kcal}{h \cdot m \cdot ^\circ C}$) | (°C) | ($\frac{1}{^\circ C} \cdot 10^6$) | (°C) | ($\Omega \cdot cm$) | (°C) | (°C) | % |
| Grafito | | 2.22 | 20-10 ³ | 0.34 | 20 500 1000 | 140 60 32 | 20- 1000 | 1.5 | 20 1000 | 10 ⁻³ 10 ⁻³ | 3700 | 150 400 600 | 76 75 71 |
| Carbón (98% C) Ladrillos | | 1.97 | 2- 1000 | 0.25 | 20 500 1000 | 1.4 2.41 4 | 20- 1000 | 6.5 | 700 | | ≥2200 | 150 400 600 | 77 77 72 |
| Circonia (100% ZrO ₂) | | 6.1 | 100 500 1000 1500 | 0.120 0.130 0.157 0.179 | 100 500 1000 1500 | 1.65 1.83 1.96 2.10 | 100 500 1000 | 5 6.8 7 | 1200 1500 | 2.10 ³ 400 | 2715 | 100 500 1000 1500 | 80 60 38 40 |
| Circonia ladrillos (93% ZrO ₂ , 4-5% CaO 1.5% Hf) | | 5.6 | 0- 1500 | 0.175 | 200 600 1000 | 1.26 1.44 1.62 | 100 500 1000 | 6 8.3 10 | | | 2550 | 300 500 2000 | 60 45 31 |
| Circon (67.1% ZrO ₂ , 32.9% SiO ₂) | | 4.6 | 20 500 1500 | 0.140 0.170 0.22 | 20 500 1000 | 2.7 2.4 1.5 | 20- 1500 | 4.5 | 200 1000 1500 | 10 ¹² 10 ⁵ 10 ³ | | 300 500 800 | 92 80 52 |
| Cromita (32.4% FeO, 67.9% Cr ₂ O ₃) | | 4.5 | 20- 1000 | 0.22 | 500 1000 | 1.5 1.58 | 20- 1000 | 8.5 | 800 1200 | 650 40 | 2180 | 800 | 97 |
| Cromita ladrillos (30-45% Cr ₂ O ₃ ; 15-33% Al ₂ O ₃ ; 11-7% SiO ₂ ; 3-6% Fe ₂ O ₃) | | 3.8-4.1 | 100 500 1000 | 0.15 0.20 0.21 | 20 500 1000 | 1.11 1.3 1.45 | 20- 1000 | 8.3 | | | 1900- 2000 | 800 | 97 |
| Dolonita calcinada (CaOMgO) | | 2.8-2.9 | 100 | 0.22 | | | 20 1000 | 14 | | | 2480 | | |

TABLA II-2. PROPIEDADES DE MATERIALES CERAMICOS

| | (gases) ν_g | ρ | C_p | | k | | L_t | | ρ_e | | (fusion) T_f | (reblan) T_r | (emisividad) ϵ | |
|---|--------------------|----------------------|----------------------------|-------------------------------|---------------------------|------------------------|-------------|------------------------|---------------------|--|-------------------|-------------------|----------------------------|----------------------------|
| | % | (g/cm ³) | (°C) | (kcal /kg °C) | (°C) | (kcal /h m °C) | (°C) | (1/°C) 10 ⁶ | (°C) | (Ω.cm) | (°C) | (°C) | % | (°C) |
| Espinela (71.8% Al ₂ O ₃ ; 28.2% MgO) | | 3.58 | 100 1000 | 0.194 0.257 | 500 1000 | 1.69 1.29 | 100 800 | 6.7 8 | | | | | | |
| Magnesita (100% MgO) | | 3.57 | 100 500 1000 1500 | 0.234 0.25 0.28 0.29 | 20 500 1000 1500 | 36 11.8 5.7 5 | 0- 1000 | | 500 1000 1500 | 10 ¹⁵ 10 ⁸ 10 ⁵ | 2950 | | 75 42 32 | 100 1000 1500 |
| Magnesita ladrillos (83-92% MgO; 2-7% Fe ₂ O ₃) | | 3.5-3.6 | 100 500 1000 1500 | 0.24 0.26 0.28 0.32 | 20 500 1000 | 11.8 6.8 3.5 | 0- 1000 | 15 | 700 1000 1500 | 10 ⁹ 10 ⁸ 10 ¹⁰ | | | 38 | 1000 |
| Forsterita (2 MgO SiO ₂) (57.3% MgO, 42.7% SiO ₂) | | 3.25 | 100 | 0.22 | 500 1000 | 1.4 1.3 | 300 | 8.3 | 200 500 | 10 ¹⁴ 10 ¹⁰ | 1910 | | 95 | 800 |
| Forsterita (ladrillo) | | 3.3 | 100 | 0.22 | 1300 | 1.3 | 20- 1500 | 11 | 1000 1500 | 10 ⁷ 10 ¹⁰ | 1750 | | 95 | 800 |
| Mullita (3 Al ₂ O ₃ 2SiO ₂) (72% Al ₂ O ₃ ; 28% SiO ₂) | | 3.03 | 100 500 1000 | 0.15 0.17 0.18 | 100 500 1000 | 5.0 3.6 3.3 | 20- 1500 | 4 | 500 1000 1500 | 10 ¹³ 10 ⁷ 10 ⁶ | 1810 | | 75 70 55 45 | 100 500 1000 1500 |
| Nitruro de Boro (BN) | | 2.10 | 20 | 0.18 | 400 1000 | 25.2 21.6 | 25- 1000 | 7.5 | 0 1000 1500 | 10 ¹³ 10 ⁶ 10 ³ | 2400 | | | |
| Silice (98-99% SiO ₂) | | 2.2 | 20 500 1000 1500 | 0.165 0.25 0.29 0.34 | 20 500 1000 | 1.22 1.36 1.8 | 25- 1000 | 5.4 | 100 200 800 | 10 ¹² 10 ⁹ 10 ⁶ | 1750 | | 68 50 | 500 700 |

TABLA II-2. PROPIEDADES DE MATERIALES CERAMICOS

| | (gases) v_g | ρ | C_p | | k | | L_t | | ρ_e | | (fusion) T_f | (reblan) T_r | (emisividad) ϵ | |
|---|------------------|----------------------|---------------------|----------------------|-------------------|----------------------|---------------------|------------------------|---------------------|---|-------------------|-------------------|----------------------------|--------------|
| | % | (g/cm ³) | (°C) | (kcal/ kg °C) | (°C) | (kcal/ h m °C) | (°C) | (1/°C) 10 ⁶ | (°C) | (12.cm) | (°C) | (°C) | % | (°C) |
| Silice ladrillos (96% SiO ₂ ; 2% CaO; 0.7% Al ₂ O ₃) | | 2.3 | 500 1000 1500 | 0.23 0.26 0.30 | 20 500 1000 | 0.82 1.04 1.33 | 500 1000 1500 | 26 14 8 | 700 1000 1500 | 7.8 10 ⁸ 5.10 ⁸ 6.10 ⁷ | 1710 | | 80 72 | 1000 1500 |
| Silice, Arcillas, Ladri- llos (40-42% Al ₂ O ₃ ; 50- 56% SiO ₂ ; 1.5-3% Fe ₂ O ₃) | 15-35 | 1.8-2.2 | 20 1000 | 0.20 0.25 | 20 1000 | 0.8-1 1-1.3 | 0- 1000 | 7 | 500 1000 1500 | 6.10 ⁷ 10 ⁵ 9.10 ³ | 1710 | 1250- 1300 | 73 62 | 1000 1500 |
| Ladrillos (55-61% SiO ₂ ; 34-39% Al ₂ O ₃ ; 1-3% Fe ₂ O ₃) | 20-30 | 2-2.2 | 20 1000 | 0.20 0.25 | 20 1000 | 0.6-1.0 0.9-1.5 | 0 1000 | 7 | 20 1000 | 10 ⁸ 10 ⁴ | 1690 | 1225- 1280 | 73 | 1000 |
| Ladrillos (60-66% SiO ₂ ; 29-34% Al ₂ O ₃ ; 1.5-3% Fe ₂ O ₃) | 20-34 | 1.7-2.1 | 20 1000 | 0.20 0.25 | 20 1000 | 0.6-1 0.9-1.5 | 0 1000 | 7 | | | 1670 | 1200- 1250 | | |
| Ladrillos (65-70% SiO ₂ ; 25-29% Al ₂ O ₃ ; 1.5-3% Fe ₂ O ₃) | 20-34 | 1.9-2.1 | 20 1000 | 0.20 0.25 | 20 1000 | 0.5-1 0.9-1.4 | 0 1000 | 7 | | | 1650 | 1180- 1225 | | |
| Ladrillos (70-75% SiO ₂ ; 20-24% Al ₂ O ₃ ; 1.5-3% Fe ₂ O ₃) | 20-40 | 1.6-2 | 20 1000 | 0.20 0.25 | 20 1000 | 0.4-1 0.8-1.3 | 0 1000 | 7 | | | 1580 | 1180- 1225 | | |
| Ladrillos (75-80% SiO ₂ ; 15-19% Al ₂ O ₃ ; 1.5-3.5% Fe ₂ O ₃) | 28-40 | 1.6-1.8 | 20 1000 | 0.20 0.25 | 20 1000 | 0.4-0.7 0.7-8 | 0 1000 | 7 | | | 1500 | 1180- 1250 | | |

TABLA II-3. PROPIEDADES DE ACEROS Y ALEACIONES

p (pulido) o (oxidado)

| | (fusión) T_f | ρ | C_p | k | | L_t | | ρ_e | | (emisividad) ϵ | | |
|--|--------------------|----------------------------|------------------------|---|------------------------|--|------------------------|---|------------------------|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| | $^{\circ}\text{C}$ | (g/cm^3) | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}}$) | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^{\circ}\text{C}}$) | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{1}{^{\circ}\text{C}}$) 10^6 | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{10^6}{\Omega \text{ cm}}$) | ($^{\circ}\text{C}$) | % |
| Aceros Cr (15%)-Ni(10%) | | 7.7 | 20 | 0.11 | 0 400 800 | 14 16 19 | 20-800 | 19 | 100 600 | 92 110 | 20 500 | 0.58 0.65 |
| Acero Cr (18%)-Ni(8%) | | 7.7 | 20 | 0.11 | 800 | 19 | 20-80 | 19 | 600 | 110 | 20 500 | 0.31 0.37 |
| Acero Mn (13%)-Ni(20%) | | 7.7 | 20 | 0.11 | 0 300 500 | 12 15 16 | 20-80 | 19 | 600 | 110 | 500 | 0.97(o) |
| Acero Mn(13%) | | | 20 | 0.12 | 0 400 800 | 11 16.9 18.2 | 0-1100 | 23 | 0 800 | 66 120 | | |
| Ni(80%)-Cr(14%) | 1425 | 8.51 | 20 | 0.11 | 0 400 800 | 12 15 16 | 0-400 | 16 | 0-800 | 90 | 300 800 300 800 | 20(o.p) 22(o.p) 70(o) 87(o) |
| Ni(57%)-Mo(20%) Fe(20%) | 1330 | 8.51 | 20 | 0.094 | 20 400 800 | 9 15 20 | 0-100 0-1000 | 11 15.4 | 20 | 126 | 200 200 250 | 26 55(o) 23(p) |
| Ni(62%)-Mo(30%) Fe(5%) | 1350 | 9.24 | 20 | 0.091 | 20 | 9.7 | 0-1000 | 14.6 | 20 | 135 | 20 800 900 | 15 23 68(o) |
| Ni(58%)-Mo(17%) Cr(15%)- W(5%)-Fe(5%) | 1305 | 8.94 | 20 | 0.092 | 25 | 10.8 | 0-1000 | 15.3 | 20 | 133 | 20 800 | 9(p) 23(p) |
| Acero volframio W(2%) | 7 | 7.96 | 20 | 0.106 | 0 600 | 54 39 | | | | | | |

TABLA II-3. PROPIEDADES DE ACEROS Y ALEACIONES

p(pulido) o(oxidado)

| | T_f (fusion) | ρ | C_p | | k | | L_t | | ρ_e | | (emisividad) ϵ | |
|----------------------|-------------------|----------------------|-----------------|------------------------|-------------------|-------------------------|------------------|---|------------------|------------------------------------|----------------------------|-------------------------|
| | $^{\circ}C$ | (g/cm ³) | ($^{\circ}C$) | (Kcal/kg $^{\circ}C$) | ($^{\circ}C$) | (Kcal/h m $^{\circ}C$) | ($^{\circ}C$) | ($\frac{1}{^{\circ}C}$) 10 ⁶ | ($^{\circ}C$) | (Ω .cm) 10 ⁶ | ($^{\circ}C$) | % |
| Hierro forjado | | 7.84 | 20 | 0.11 | 20 500 1000 | 51 37 30 | | | 20 500 700 | 20 62 100 | 20 1000 600 | 3(p) 22(p) 98(o) |
| Fundición (4%) | 1147 | 7.9 | 20 | 0.10 | 100 500 | 45 37 | | | | | 200 200 | 0.21(p) 64(o) |
| Acero (0.2-0.6%C) | 1127-1400 | 7.86 | 20 1000 | 0.10 0.15 | 20 500 1900 | 54 32 23 | 20-100 | 12 | 20 | 10 | 20 1000 500 | 3(p) 22(p) 92(o) |
| Acero (1%C) | 1430 | 7.80 | 20 | 0.11 | 0 400 800 | 38 30.9 25 | 20- 1000 | 15 | 20 400 800 | 18 55 110 | 200 200 | 10(p) 80(o) |
| Acero (1.5%C) | | 7.7 | 20 | 0.11 | 0 400 800 | 31 28 25 | 20- 1000 | 10 | 20 400 800 | 21 60 118 | 25 200 600 | 80(o) 79(o) 79(o) |
| Acero al Cromo (11%) | | 7.84 | 50-100 | 0.118 | 0 400 800 | 41 33 22 | 20-100 20-500 | 12 14 | 20 400 800 | 21 51 110 | | |
| Acero al Cromo (10%) | | 7.74 | 50-100 | 0.113 | 0 400 800 | 32 26 25 | 20-100 | 10 | 20 400 800 | 52 85 115 | | |
| Acero al Cromo (20%) | | 7.6 | 20 | 0.11 | 0 400 800 | 19 19 22 | 20-900 | 14 | 20 400 | 50 100 | 20 800 | 10(p) 38(p) |

TABLA II-4. PROPIEDADES TERMICAS EN MATERIALES DIVERSOS

| Material | ρ | ϕ | | k | | $\alpha \cdot 10^3$ | | ϵ | | |
|--------------------|----------------------|--------|---|------|---|---------------------|---------------------|------------|----|--|
| | (g/cm ³) | (°C) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$) | (°C) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{hm}^\circ\text{C}}$) | (°C) | (m ² /h) | °C | % | |
| Abeto | 0.4 | 20 | 0.65 | 20 | 0.12 | 20 | 0.46 | | | |
| Algodón lana | 0.08 | | | 20 | 0.12 | | | | | |
| Arena seca | 1.5 | 20 | 0.19 | 20 | 0.28 | | 9.8 | | | |
| Arena gruesa | 1.6 | 20 | | 20 | 1.4 | | | | | |
| Arcilla | 1.46 | 20 | 0.21 | 20 | 1.01 | | 3.6 | | | |
| Asfalto | 2.11 | 20 | 0.5 | 20 | 0.60 | | 0.57 | 20 | 91 | |
| Asfalto en gotas | | | | 30 | 0.140 | | | | | |
| Basalto | 2.5-2.9 | | | 20 | 3 | | | | | |
| Cal (enlucido) | 1.6 | | | 20 | 0.61 | | | | | |
| Carbón | 1.14 | 20 | 0.31 | 20 | 0.16 | | 0.4 | 20 | 92 | |
| " vegetal | 0.19 | | | 20 | 0.05 | | | | | |
| Celuloide | 1.4 | | | 20 | 0.15 | | | | | |
| Cemento seco | 1.6 | 20 | 0.2 | 20 | 0.72 | | | 20 | 93 | |
| " reforzado | 2.2 | 20 | 0.2 | 20 | 1.33 | | | 20 | 93 | |
| " escorias | 1.5 | 20 | 0.19 | 20 | 0.60 | | | 20 | 93 | |
| " Portland | 1.9 | 30 | 0.27 | 30 | 0.26 | | | 20 | 93 | |
| " celular | 0.3 | | | 20 | 0.08 | | | | | |
| " amianto | | | | 100 | 0.1 | | | 20 | 96 | |
| " magnesita | | | | 100 | 0.06 | | | | | |
| " vermiculita | | | | 100 | 0.8 | | | | | |
| " (60% arena) | | | | 20 | 0.57 | | | | | |
| Clinker | 1.4 | 20 | 0.34 | 20 | 0.14 | | | | | |
| Corcho láminas | 0.190 | 20 | 0.45 | 20 | 0.036 | 20 | 0.42 | | | |
| " bruto | 0.13 | 40 | 0.48 | 40 | 0.036 | | | | | |
| " grano | 0.100 | | | 0 | 0.016 | | | | | |
| " láminas | 0.11 | | | 180 | 0.0055 | | | | | |
| Cloruro polivinilo | | | | 30 | 0.014 | | | | | |
| " nilo | 1.2-1.9 | | | 20 | 0.12 | | | | | |
| Circonia grano | | | | 300 | 1.7 | | | | | |
| Ceniza madera | | | | 30 | 0.060 | | | | | |
| Coque de petróleo | | | | 20 | 4.5 | | | | | |
| " en polvo | 0.5 | 20 | 0.29 | 20 | 0.16 | 20 | 0.1 | | | |
| Ebonite | 1.2 | | | 20 | 0.13 | | | | | |
| " celular | | | | 10 | 0.025 | | | | | |
| Espanja celulosa | | | | 30 | 0.045 | | | | | |
| Espuma vilinilo | | | | 20 | 0.05 | | | | | |
| Escoria alto horno | | | | 100 | 0.09 | | | | | |
| Fibras caña azu | | | | | | | | | | |
| car | | | | 20 | 0.04 | | | | | |
| Fieltro lámina | 0.25 | | | 20 | 0.045 | | | | | |
| " lana | 0.18 | | | 20 | 0.04 | | | | | |
| Formica | | | | 500 | 0.036 | | | | | |

TABLA II-4. PROPIEDADES TERMICAS EN MATERIALES DIVERSOS

| | ρ | C_p | | k | | α | | ϵ | | |
|-----------------|--------------------|---------------|------------------------------|---------------|-------------------------------|---------------|-------------------|---------------|------|--|
| | $(\frac{g}{cm^3})$ | $(^{\circ}C)$ | $(\frac{Kcal}{kg^{\circ}C})$ | $(^{\circ}C)$ | $(\frac{Kcal}{h.m^{\circ}C})$ | $(^{\circ}C)$ | $(\frac{m^2}{h})$ | $(^{\circ}C)$ | % | |
| Goma dura | 2.4 | | 0.26 | 90 | 0.89 | | | 20 | 92 | |
| " blanda | 1.2 | | 0.37 | 100 | 0.40 | | | 20 | 92 | |
| " | 1.2 | 0 | 0.33 | 0 | 0.14 | | | 20 | 92 | |
| Grafito esco- | | | | | | | | | | |
| billas | | | | 50 | 3-6 | | | | | |
| " polvo | 1.34 | | | | 90 | | | | | |
| | 1.08 | | | | 30 | | | | | |
| Goma espuma | 0.02 | | | 30 | 0.02 | | | | | |
| Hielo | 0.917 | 0 | | 0 | 1.9 | | | 20 | 97 | |
| Hormigón de | | | | | | | | | | |
| arena | 1.5 | | | 20 | 0.60 | | | 20 | 93 | |
| " de grava | 1.8 | | | 20 | 0.90 | | | 20 | 92 | |
| " armado | 2.2 | | | 20 | 1.3 | | | 20 | 93 | |
| Ladrillos de | | | | | | | | | | |
| construcción | 0.8-1.5 | | | 20 | 0.20-3 | | | 20 | 93 | |
| " carborundum | 1 | 20 | 0.162 | 20 | 9.7 | | | 20 | 95 | |
| Lavas | 2.1-2 | | | 20 | 2.5 | | | 20 | 92 | |
| Madera de balsa | 0.128 | | | 20 | 0.045 | | | 20 | 90 | |
| " de pino | 0.44 | | | 20 | 0.092 | | | 20 | 90 | |
| " " pino | 0.44 | | | 30 | 0.055 | | | | | |
| " " nogal | 0.8 | | | 20 | 0.312 | | | | | |
| " " nogal | 0.8 | 20 | 0.42 | 20 | 0.018 | | | | | |
| Mica | 0.29 | | | 20 | 0.5 | | | | | |
| " y | | | | 100 | 0.2 | | | | | |
| " papel 30 ho- | | | | | | | | | | |
| jas 2 mm es- | | | | | | | | | | |
| pesor | | | | 20 | 0.1 | | | | | |
| " láminas | | | | 20 | 0.24 | | | | | |
| " láminas | | | | 20 | 0.21 | | | | | |
| " con papel y | | | | | | | | | | |
| barniz | | | | 100 | 0.14 | | | | | |
| Melamina con | | | | | | | | | | |
| relleno | 1.4 | | | 20 | 0.2-0.3 | | | | | |
| Marmol | 2.6-3 | | | 20 | 3 | | | | | |
| Metacrilato me | | | | | | | | | | |
| tilo | 1.18 | | | 20 | 0.18 | | | 20 | 0.93 | |
| Nieve | 0.928 | -100 | 0.28 | -100 | 3 | | | 20 | 0.96 | |
| | 0.150 | | 0.5 | | 0.10 | | | | | |
| | 0.200 | | | | 0.13 | | | | | |
| | 0.600 | | | | 0.55 | | | | | |
| | 0.1-0.5 | | | 0 | 0.05 | | | | | |
| Paneles yeso | | | | 30 | 0.10 | | | 20 | 0.94 | |
| " fibra paja | 0.15-0.2 | | | 20 | 0.05 | | | 20 | 0.94 | |
| " " caña | 0.2 | | | 20 | 0.05 | | | 20 | 0.92 | |

TABLA II-4. PROPIEDADES TERMICAS DE MATERIALES DIVERSOS

| | ρ | C_p | | k | | α | | ϵ | | |
|--------------------------------|----------------------------|------------------------|---|------------------------|---|--------------------|-----------------------------------|------------------------|-------|--|
| | (g/cm^3) | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{Kg } ^{\circ}\text{C}}$) | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{h.m.}^{\circ}\text{C}}$) | $^{\circ}\text{C}$ | ($\frac{\text{m}^2}{\text{h}}$) | ($^{\circ}\text{C}$) | % | |
| Papel Kraft | | | | 30 | 0.033 | | | 20 | 92-94 | |
| " corrugado | | | | 30 | 0.033 | | | 20 | 90-95 | |
| " cartón barnizado | | | | 40 | 0.24 | | | 20 | 9 | |
| Piedra calcarea | 1.9 | | | 20 | 1.3 | | | 20 | 95 | |
| " dura | 2.7 | | | 20 | 2.5 | | | 20 | 9 | |
| Piedra granito | 2.6-3 | | | 20 | 3 | | | 20 | 90 | |
| " pomez | | | | 50 | 0.16 | | | 20 | 94 | |
| Poliamidas | 1.13 | | | | 0.21 | | | | | |
| Politeno | 0.91 | | | | 0.28 | | | | | |
| Poliestireno | 1.05 | | | | 0.12 | | | | | |
| Porcelana | 2.4 | 100 | 0.26 | 100 | 0.89 | | 1.43 | 20 | 92 | |
| Resina fenol-formaldehido | 1.4 | | | | 0.12 | | | | | |
| " con relleno | | | | | 0.2-0.3 | | | | | |
| Seda | | | | 10 | 0.039 | | | 20 | 77 | |
| Silicona elastomeros | | | | 50 | 0.21 | | | | | |
| Serrin | 0.40 | | 0.65 | | 0.12 | | 0.45 | | | |
| Teflon | | 20 | 0.25 | 20 | 0.198 | | | | | |
| " con relleno | | | | 200 | 0.30 | | | | | |
| | | | | 20 | 0.37 | | | | | |
| | | | | 200 | 0.45 | | | | | |
| Tela algodón 6 capas de barniz | | | | 100 | 0.15 | | | 20 | 92 | |
| " vidrio con resina epoxy | | | | | 0.18 | | | | | |
| " vidrio 0.07 mm | | | | 30 | 0.07 | | | | | |
| Tierra seca | 1.50 | | | 20 | 0.119 | | | | | |
| " húmeda | 1.70 | | | -18 | 1 | | | | | |
| Yeso | 1.65 | | | 20 | 0.25 | | | 20 | 93 | |
| " celular | 0.12 | 20 | 0.48 | 20 | 0.56 | 20 | 0.69 | | | |

TABLA II-5. MATERIALES AISLANTES PARA ALTAS TEMPERATURAS $T > 500^{\circ}\text{C}$

| | ρ (g/cm^3) | C_p | | k | |
|---|-------------------------------|------------------------|---|-----------------------------|--|
| | | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}}$) | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{\text{kcal}}{\text{h m}^2}$) |
| Arcillas ladrillos | 0.7 | | | 650 900 | 0.40 0.50 |
| Arcillas caolín | 0.4 | | | 500 1000 | 0.3 0.4 |
| Arcillas caolín | 0.3 | | | 1000 | 0.18 |
| Carbón | 0.2 | | | 500 1000 | 0.08 0.12 |
| Grafito en tela (vacío) 5mm espesor | 0.08 | 20 | 0.17 | 500 1000 2500 | 0.08 0.25 0.5 |
| Grafito en tela (atmosfera de N_2) 5mm de espesor | | | | 1500 2700 | 0.16 1.5 |
| Diatomeas, polvo | 0.20 | | | 500 900 | 0.08 0.15 |
| Magnesia (85%) bloques y formas | 0.17 | | | 500 | 0.05- 0.06 |
| Roca lana (bloques) | | | | 600 | 0.052 |
| Silice (fibras tela) | 0.1 | | | 300 | 0.07 |
| Silice microcuarzo | 0.05 | | | 350 | 0.23 |
| Titanato potásico fibras | 0.8 | | | 550 | 0.04 |
| Circonia espuma | 0.9 | | | 500 1000 | 0.3 0.35 |
| Circonia con tela (en vacío) 2 mm de espesor | 0.32 | | | 500 1000 1700 2000 | 0.05 0.14 0.32 0.47 |

TABLA II-6. MATERIALES AISLANTES PARA TEMPERATURAS INTERMEDIAS
 $500(^{\circ}\text{C}) > T > 100(^{\circ}\text{C})$

| | ρ | k | |
|--|----------------------------|------------------------|---|
| | (g/cm^3) | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\text{kcal}/\text{hm}^{\circ}\text{C}$) |
| Amianto papel | 0.3 | 150 | 0.06 |
| | | 200 | 0.07 |
| Amianto tela | 0.3 | 300 | 0.07 |
| Arcillas | 0.7 | 200 | 0.3 |
| | | 400 | 0.34 |
| Arcillas caolin | | 400 | 0.36 |
| Diatomeas, moldes | 0.36 | 100 | 0.08 |
| | | 250 | 0.09 |
| | | 450 | 0.12 |
| Diatomeas, polvo | 0.20 | 100 | 0.045 |
| | | 200 | 0.070 |
| | | 400 | 0.080 |
| | 0.4 | 100 | 0.05 |
| | | 200 | 0.073 |
| | | 400 | 0.1 |
| Magnesia (85%) for mas moldeadas. | 0.17 | 100 | 0.034 |
| | | 500 | 0.05 |
| Roca, lana | 0.12-0.2 | 100 | 0.045 |
| | | 200 | 0.06 |
| | | 400 | 0.09 |
| Silicato calcico hi dratado (formas moldeadas) | 0.2 | 100 | 0.05 |
| | | 250 | 0.06 |
| Silice fundida, fi- bras | 0.04 | 100 | 0.037 |
| | | 500 | 0.160 |
| " | 0.14 | 100 | 0.027 |
| | | 500 | 0.09 |
| Vidrio, lana | 0.04 | 100 | 0.038 |
| | | 200 | 0.045 |
| | | 400 | 0.067 |

TABLA II-7. MATERIALES AISLANTES PARA BAJAS TEMPERATURAS

$-100(^{\circ}\text{C}) < T < +100(^{\circ}\text{C})$

| | ρ | C_p | | k | |
|--------------------|----------------------------|------------------------|---|------------------------|--|
| | (g/cm^3) | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}}$) | ($^{\circ}\text{C}$) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{h m}^{\circ}\text{C}}$) |
| Algodón cinta | | | | 30 | 0.06 |
| " capas | | | | 100 | 0.045 |
| Amianto, papel | | | | 25 | 0.14 |
| " láminas | | | | 25 | 0.05 |
| de papel | | | | 100 | 0.05 |
| Amianto+acetato | | | | 25 | 0.150 |
| celulosa(láminas) | | | | | |
| Amianto(polvo) | 0.46 | | | 0 | 0.1 |
| " " | 0.70 | | | 0 | 2.0 |
| Coque(polvo) | 0.5 | 100 | 0.29 | 100 | |
| Corcho bruto | 0.09 | | | 20 | 0.03 |
| " grano fino | 0.1 | | | | 0.037 |
| " cartón | 0.12 | | | -100 | 0.02 |
| | | | | 20 | 0.03 |
| Diatomeas, polvo | 0.15-0.2 | | | -100 | 0.035 |
| | | | | 20 | 0.045 |
| | | | | 100 | 0.048 |
| Magnesia hidratada | 0.1-0.15 | | | -80 | 0.02- |
| *) " | | | | 0 | 0.034 |
| ***) " | | | | | |
| Rosa, lana | 0.4 | | | -100 | 0.034 |
| | | | | 0 | 0.047 |
| | 0.26 | | | -100 | 0.025 |
| | | | | 0 | 0.034 |
| | 0.095 | | | -100 | 0.017 |
| | | | | 0 | 0.029 |
| Vidrio, lana | 0.058 | | | -100 | 0.025 |
| | | | | 0 | 0.036 |
| " espuma | 0.2 | | | -100 | 0.034 |
| | | | | 0 | 0.043 |
| " perlita | 0.2 | | | -100 | 0.03 |
| | | | | 0 | 0.05 |
| " aerogel | 0.1 | | | -100 | 0.012 |
| | | | | 0 | 0.017 |
| * 1) Poliestireno | 0.04 | | | -100 | 0.029 |
| (espuma) | | | | 0 | 0.030 |
| 2) polivinilo | | | | -100 | 0.032 |
| (espuma) | | | | 0 | 0.043 |
| Vermiculita | 0.216 | | | -100 | 0.038 |
| | | | | 0 | 0.055 |

TABLA II-7. MATERIALES AISLANTES PARA TEMPERATURAS CRIOGENICAS

-270 (°C) < T < -100 (°C)

a) Cuerpos reflectores

| Material | T (°K) | ϵ (%) |
|----------|--------|----------------|
| Aluminio | 5 | 1.1 |
| | 100 | 1.8 |
| Bronce | 5 | 1.8 |
| | 100 | 2.9 |
| Cobre | 5 | 0.5 |
| | 100 | 0.8 |
| Oro | 100 | 1 |
| Plata | 5 | 0.4 |
| | 100 | 1 |

b) Capas múltiples.

| Material | ρ (kg/m ³) | T (°K) | $k \cdot 10^4$ (Kcal/h.m°C) |
|--|--------------------------------|-----------|--------------------------------|
| 1) Emparedado de 70 capas espesor total 3.3 cm de composición papel de fibra de vidrio de 0.3 mm, láminas de Al de $6 \cdot 10^{-3}$ mm. | 120 | 20 | 0.34 |
| | | 70 | 0.47 |
| 2) Idem 75 capas, 3.5 cm de espesor; papel fibra vidrio (0.12 mm) láminas Al ($1.27 \cdot 10^{-2}$ cm) | 110 | 20 | 0.37 |
| | | 70 | 0.44 |
| 3) Idem 1) con 96 capas espesor 5 cm. | 120 | 70 | 0.94 |
| 4) Idem tejido de Nylon (0.15 mm) con láminas de Al ($6.3 \cdot 10^{-3}$ mm) 24 capas/cm (vacío 10^{-3} mm Hg). | 90 | 70 | 0.2 |

c) Polvos

| ϕ (mm) | ρ (kg/m ³) | T (°K) | Vacío (mm.Hg) | $k \cdot 10^3$ (Kcal/h.m°C) |
|-------------------|--------------------------------|-----------|------------------|--------------------------------|
| Aerogel | 0.25 | 120 | 10 ⁻³ | 1.29 |
| | | | 0.1 | 1.97 |
| Silice | 0.005 | 180 | 10 ⁻³ | 0.7 |
| | | | 0.1 | 1.46 |
| Perlita expandida | 0.25 | 90 | 10 ⁻³ | 0.58 |
| | | | 0.1 | 2.7 |
| Vermiculita " | 0.2 | 90 | 10 ⁻³ | 3.26 |
| Lana vidrio | 0.018 | 160 | 10 ⁻³ | 4 |
| | | | 0.1 | 1.4 |

TABLA II-8. PODER TRANSMISOR A LAS RADIACIONES TERMICAS DE CUERPOS TRANSPARENTES.

| | τ (poder transmisor) % | | | | | |
|-----------------------|-----------------------------|--|------|------|------|------|
| | ℓ | T de cuerpo negro ($^{\circ}\text{K}$) | | | | |
| | m.m | 370 | 600 | 1020 | 1400 | 1640 |
| Celuloide | 0.15 | 3.5 | 10 | 25 | 38 | 49 |
| | 0.5 | 5. | 6 | 15.7 | 28.6 | 39 |
| | 1 | 1.5 | 1.7 | 9 | 21 | 31 |
| | 2 | | 0.6 | 5.5 | 15.4 | 24 |
| Cuarzo fundido. | 1.93 | 2.6 | 12.9 | 64 | 59 | 71 |
| | 5.45 | | 7.7 | 36.8 | 51 | 64 |
| Mica óptica | 0.01 | 37 | 55 | 77 | 78 | 84 |
| | 0.095 | 14.3 | 33 | 56 | 65 | 71 |
| Vidrio blanco | 1.03 | 1.03 | 10.6 | 36 | 50 | 63 |
| | 1.5 | 0.9 | 8.8 | 32 | 46 | 58 |
| Pyrex 1941 | 2 | 1.2 | 3.2 | 22 | 43 | 55 |
| | 4 | 0.5 | 1.5 | 17.9 | 38 | 50 |
| Vidrio opaco a la luz | 3.8 | | 2.6 | 17 | 21 | 23 |

- EMISIVIDADES DE PINTURAS Y BARNICES (ϵ)

Esmalte 0.85-0.95 (20°C)
 Laca brillante 0.80-0.95 (20°C)
 Laca negra 0.98 - 500°C
 Pintura al aceite 0.92-0.96 (100°C)
 Pinturas de Al (10%-22%)
 Soporte -0.52 (100)
 Lacas de Al 0.39
 Pintura Al calentada a 250°C 0.35
 Pintura radiadores 0.77-0.84 (100°C)
 Revestimiento de silicona 0.66-0.75 (200°C)
 Revestimientos de Al+silicona 0.29 (200)

TABLA II-9. PROPIEDADES DEL AIRE SECO, ($P = 1 \text{ Kg/cm}^2$)

| t | ρ | c_p | μ | ν | α | Pr | k | $g_c g^{1/2} \beta$ | $g_c g^{1/2} \beta$ |
|------|---------------------|---|---|-----------------------------------|-----------------------------------|-------|--|----------------------|---------------------|
| (°C) | (Kg/m^3) | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{Kg}^\circ\text{C}}$) | ($\frac{\text{Kg}}{\text{m} \cdot \text{h}}$) | ($\frac{\text{m}^2}{\text{h}}$) | ($\frac{\text{m}^2}{\text{h}}$) | | ($\frac{\text{Kcal}}{\text{h} \cdot \text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$) | $k \cdot 10^3$ | $k \cdot 10^6$ |
| -50 | 1.584 | 0.242 | 0.0525 | 0.033 | 0.0457 | 0.728 | 0.0175 | $3.76 \cdot 10^3$ | 376 |
| -40 | 1.515 | 0.242 | 0.0547 | 0.036 | 0.0496 | 0.728 | 0.0182 | $3.04 \cdot 10^3$ | 304 |
| -30 | 1.453 | 0.242 | 0.0564 | 0.038 | 0.0537 | 0.723 | 0.0189 | $2.52 \cdot 10^3$ | 252 |
| -20 | 1.395 | 0.241 | 0.0582 | 0.0417 | 0.0583 | 0.716 | 0.0196 | $2.06 \cdot 10^3$ | 206 |
| -10 | 1.342 | 0.241 | 0.0601 | 0.0447 | 0.0628 | 0.712 | 0.0203 | $1.71 \cdot 10^3$ | 171 |
| 0 | 1.293 | 0.240 | 0.0617 | 0.0477 | 0.0677 | 0.707 | 0.0210 | $1.49 \cdot 10^3$ | 149 |
| 10 | 1.247 | 0.240 | 0.0635 | 0.0509 | 0.0722 | 0.707 | 0.0216 | $1.22 \cdot 10^3$ | 122 |
| 20 | 1.205 | 0.240 | 0.0653 | 0.0541 | 0.0771 | 0.703 | 0.0223 | $1.03 \cdot 10^3$ | 103 |
| 30 | 1.165 | 0.240 | 0.0670 | 0.0575 | 0.0823 | 0.701 | 0.0230 | $8.86 \cdot 10^2$ | 88.6 |
| 40 | 1.128 | 0.240 | 0.0688 | 0.0609 | 0.0875 | 0.699 | 0.0237 | $7.59 \cdot 10^2$ | 75.9 |
| 50 | 1.093 | 0.240 | 0.0706 | 0.0645 | 0.0926 | 0.698 | 0.0243 | $6.57 \cdot 10^2$ | 65.7 |
| 60 | 1.060 | 0.240 | 0.0723 | 0.0682 | 0.0979 | 0.696 | 0.0249 | $5.71 \cdot 10^2$ | 57.1 |
| 70 | 1.029 | 0.241 | 0.0741 | 0.0720 | 0.102 | 0.694 | 0.0255 | $5.00 \cdot 10^2$ | 50 |
| 80 | 1.00 | 0.241 | 0.0758 | 0.0758 | 0.108 | 0.692 | 0.0262 | $4.36 \cdot 10^2$ | 43.6 |
| 90 | 0.972 | 0.241 | 0.0773 | 0.0795 | 0.114 | 0.690 | 0.0269 | $3.83 \cdot 10^2$ | 38.3 |
| 100 | 0.946 | 0.241 | 0.0787 | 0.083 | 0.121 | 0.688 | 0.0276 | $3.38 \cdot 10^2$ | 33.8 |
| 120 | 0.898 | 0.241 | 0.0822 | 0.0915 | 0.132 | 0.686 | 0.0287 | $2.89 \cdot 10^2$ | 28.9 |
| 140 | 0.854 | 0.242 | 0.0854 | 0.100 | 0.145 | 0.684 | 0.0300 | $2.12 \cdot 10^2$ | 21.2 |
| 160 | 0.815 | 0.243 | 0.0882 | 0.108 | 0.158 | 0.682 | 0.0313 | $1.71 \cdot 10^2$ | 17.1 |
| 180 | 0.779 | 0.244 | 0.0910 | 0.121 | 0.171 | 0.681 | 0.0325 | $1.40 \cdot 10^2$ | 14 |
| 200 | 0.746 | 0.245 | 0.0935 | 0.125 | 0.184 | 0.680 | 0.0338 | $1.15 \cdot 10^2$ | 11.5 |
| 300 | 0.615 | 0.250 | 0.1069 | 0.173 | 0.257 | 0.674 | 0.0396 | $4.95 \cdot 10^1$ | 4.95 |
| 400 | 0.524 | 0.255 | 0.1189 | 0.226 | 0.335 | 0.678 | 0.0448 | $2.48 \cdot 10^1$ | 2.48 |
| 500 | 0.456 | 0.261 | 0.1302 | 0.285 | 0.415 | 0.687 | 0.0494 | $1.36 \cdot 10^1$ | 1.366 |
| 600 | 0.404 | 0.266 | 0.1408 | 0.348 | 0.497 | 0.699 | 0.0535 | $7.98 \cdot 10^0$ | 0.798 |
| 700 | 0.362 | 0.271 | 0.1503 | 0.415 | 0.588 | 0.706 | 0.0577 | $5.34 \cdot 10^0$ | 0.54 |
| 800 | 0.329 | 0.276 | 0.1595 | 0.484 | 0.679 | 0.713 | 0.0617 | $3.59 \cdot 10^0$ | 0.35 |
| 900 | 0.301 | 0.280 | 0.1680 | 0.558 | 0.778 | 0.717 | 0.0656 | $2.49 \cdot 10^0$ | 0.24 |
| 1000 | 0.277 | 0.283 | 0.1765 | 0.637 | 0.885 | 0.719 | 0.0694 | $1.76 \cdot 10^0$ | 0.176 |
| 1100 | 0.257 | 0.286 | 0.1842 | 0.716 | 0.994 | 0.722 | 0.0731 | $1.29 \cdot 10^0$ | 0.129 |
| 1200 | 0.239 | 0.289 | 0.1923 | 0.804 | 1.13 | 0.724 | 0.0787 | $9.41 \cdot 10^{-1}$ | 0.094 |

TABLA II-10. PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS GASES

| t | k. 10 ³ | μ. 10 ⁶ | P _r | ν. 10 ⁶ | C _p | α. 10 ² | g |
|-----------|--|------------------------------------|----------------|-----------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| (°C) | ($\frac{\text{kcal}}{\text{h.m}^{\circ}\text{C}}$) | ($\frac{\text{kg}}{\text{s.m}}$) | (Prandtl) | ($\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$) | ($\frac{\text{kcal}}{\text{kg.s}}$) | ($\frac{\text{m}^2}{\text{h}}$) | ($\frac{\text{kg}}{\text{g.m}^3}$) |
| NITROGENO | | | | | | | |
| 0 | 20.9 | 1.70 | 0.705 | 13.3 | 0.2461 | 6.89 | 1.250 |
| 100 | 27.1 | 2.11 | 0.678 | 22.5 | 0.2469 | 11.6 | 0.916 |
| 200 | 33.1 | 2.47 | 0.656 | 33.6 | 0.2491 | 18.3 | 0.723 |
| 300 | 38.6 | 2.82 | 0.652 | 46.4 | 0.2532 | 25.5 | 0.597 |
| 400 | 43.6 | 3.15 | 0.659 | 60.9 | 0.2584 | 33.3 | 0.508 |
| 500 | 48.0 | 3.46 | 0.672 | 76.9 | 0.2641 | 41.1 | 0.442 |
| 600 | 51.9 | 3.76 | 0.689 | 94.3 | 0.2697 | 49.1 | 0.392 |
| 700 | 55.2 | 4.04 | 0.710 | 113 | 0.2749 | 57.0 | 0.352 |
| 800 | 58.0 | 4.31 | 0.734 | 133 | 0.2796 | 65.4 | 0.318 |
| 900 | 60.3 | 4.59 | 0.762 | 154 | 0.2838 | 73.1 | 0.291 |
| 1000 | 62.2 | 4.84 | 0.795 | 177 | 0.2874 | 80.2 | 0.268 |

OXIGENO

| | | | | | | | |
|------|------|------|-------|------|--------|------|-------|
| 0 | 21.2 | 1.98 | 0.720 | 13.6 | 0.2185 | 6.80 | 1.429 |
| 100 | 28.3 | 2.46 | 0.686 | 23.1 | 0.2230 | 12.1 | 1.050 |
| 200 | 35.0 | 2.91 | 0.674 | 34.6 | 0.2300 | 15.6 | 0.826 |
| 300 | 41.3 | 3.31 | 0.673 | 47.8 | 0.2376 | 25.4 | 0.682 |
| 400 | 47.3 | 3.70 | 0.675 | 62.8 | 0.2445 | 33.3 | 0.580 |
| 500 | 52.9 | 4.08 | 0.682 | 79.6 | 0.2504 | 42.0 | 0.504 |
| 600 | 58.0 | 4.44 | 0.689 | 97.8 | 0.2553 | 50.8 | 0.447 |
| 700 | 62.6 | 4.79 | 0.700 | 117 | 0.2593 | 60.0 | 0.402 |
| 800 | 66.8 | 5.12 | 0.710 | 138 | 0.2627 | 70.0 | 0.363 |
| 900 | 70.5 | 5.45 | 0.725 | 161 | 0.2656 | 79.7 | 0.333 |
| 1000 | 73.8 | 5.76 | 0.738 | 184 | 0.2682 | 90.0 | 0.306 |

MONOXIDO DE CARBONO

| | | | | | | | |
|------|------|------|-------|------|--------|------|-------|
| 0 | 20.0 | 1.69 | 0.740 | 13.3 | 0.2483 | 6.46 | 1.250 |
| 100 | 25.9 | 2.11 | 0.718 | 22.6 | 0.2495 | 11.3 | 0.916 |
| 200 | 31.4 | 2.49 | 0.708 | 33.9 | 0.2528 | 17.9 | 0.723 |
| 300 | 36.6 | 2.85 | 0.709 | 47.0 | 0.2580 | 23.8 | 0.596 |
| 400 | 41.7 | 3.18 | 0.711 | 61.8 | 0.2641 | 31.1 | 0.508 |
| 500 | 46.5 | 3.51 | 0.720 | 78.0 | 0.2704 | 38.9 | 0.442 |
| 600 | 51.3 | 3.81 | 0.727 | 96.0 | 0.2763 | 47.4 | 0.392 |
| 700 | 55.9 | 4.12 | 0.706 | 115 | 0.2816 | 56.6 | 0.351 |
| 800 | 60.3 | 4.41 | 0.739 | 135 | 0.2863 | 66.7 | 0.317 |
| 900 | 64.9 | 4.69 | 0.740 | 157 | 0.2904 | 76.8 | 0.291 |
| 1000 | 69.3 | 4.97 | 0.744 | 180 | 0.2939 | 88.1 | 0.268 |

TABLA II-10. PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS GASES

| t | $k \cdot 10^3$ | $\mu \cdot 10^6$ | Pr | $\nu \cdot 10^6$ | C_p | $\alpha \cdot 10^2$ | ρ |
|--------------------|--|--|-----------|--|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (°C) | $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{h.m.}^\circ\text{C}}\right)$ | $\left(\frac{\text{kg}}{\text{ms}}\right)$ | (Prandtl) | $\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)$ | $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{C}}\right)$ | $\left(\text{m}^2/\text{h.}\right)$ | $\left(\text{kg}/\text{m}^3\right)$ |
| DIOXIDO DE CARBONO | | | | | | | |
| 0 | 12.6 | 1.43 | 0.780 | 7.09 | 0.1946 | 3.28 | 1.9767 |
| 100 | 19.6 | 1.86 | 0.733 | 12.6 | 0.2182 | 6.21 | 1.447 |
| 200 | 26.6 | 2.28 | 0.715 | 19.2 | 0.2371 | 9.83 | 1.143 |
| 300 | 33.6 | 2.69 | 0.712 | 27.3 | 0.2524 | 14.1 | 0.944 |
| 400 | 40.6 | 3.08 | 0.709 | 36.7 | 0.2652 | 19.1 | 0.802 |
| 500 | 47.2 | 3.46 | 0.713 | 47.2 | 0.2758 | 24.6 | 0.698 |
| 600 | 53.4 | 3.84 | 0.723 | 58.3 | 0.2847 | 30.8 | 0.618 |
| 700 | 59.2 | 4.19 | 0.730 | 71.4 | 0.2921 | 36.6 | 0.555 |
| 800 | 64.6 | 4.55 | 0.741 | 85.3 | 0.2984 | 43.2 | 0.502 |
| 900 | 69.6 | 4.91 | 0.757 | 100 | 0.3037 | 49.9 | 0.460 |
| 1000 | 74.2 | 5.25 | 0.770 | 116 | 0.3081 | 56.9 | 0.423 |

DIOXIDO DE AZUFRE

| | | | | | | | |
|------|------|------|-------|------|-------|------|-------|
| 0 | 7.20 | 1.23 | 0.874 | 4.14 | 0.145 | 1.70 | 2.926 |
| 100 | 10.6 | 1.64 | 0.863 | 7.51 | 0.158 | 3.14 | 2.140 |
| 200 | 14.3 | 2.04 | 0.856 | 11.8 | 0.170 | 4.48 | 1.690 |
| 300 | 18.2 | 2.43 | 0.848 | 17.1 | 0.180 | 7.25 | 1.395 |
| 400 | 22.2 | 2.81 | 0.834 | 23.3 | 0.187 | 10.0 | 1.187 |
| 500 | 26.4 | 3.19 | 0.822 | 30.4 | 0.193 | 13.2 | 1.033 |
| 600 | 30.8 | 3.57 | 0.806 | 38.3 | 0.197 | 17.0 | 0.916 |
| 700 | 35.3 | 3.94 | 0.778 | 46.8 | 0.200 | 21.5 | 0.892 |
| 800 | 39.8 | 4.30 | 0.774 | 56.5 | 0.203 | 26.4 | 0.743 |
| 900 | 44.6 | 4.66 | 0.755 | 66.8 | 0.205 | 32.0 | 0.681 |
| 1000 | 49.5 | 5.02 | 0.740 | 78.3 | 0.207 | 38.2 | 0.626 |

VAPOR DE AGUA

| | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|-------|------|-------|
| 100 | 20.4 | 1.22 | 1.06 | 19.4 | 0.502 | 6.92 | 0.588 |
| 200 | 28.8 | 1.62 | 0.94 | 30.6 | 0.472 | 13.2 | 0.464 |
| 300 | 38.0 | 2.04 | 0.91 | 44.3 | 0.481 | 20.6 | 0.384 |
| 400 | 48.1 | 2.48 | 0.90 | 60.5 | 0.495 | 29.8 | 0.326 |
| 500 | 58.8 | 2.92 | 0.90 | 78.8 | 0.510 | 40.6 | 0.284 |
| 600 | 70.3 | 3.38 | 0.89 | 99.8 | 0.527 | 53.1 | 0.252 |
| 700 | 82.2 | 3.86 | 0.90 | 122 | 0.543 | 67.0 | 0.226 |
| 800 | 94.8 | 4.34 | 0.91 | 147 | 0.560 | 82.9 | 0.204 |
| 900 | 107 | 4.84 | 0.92 | 174 | 0.577 | 99.3 | 0.187 |
| 1000 | 121 | 5.34 | 0.92 | 204 | 0.593 | 119 | 0.172 |

PROPIEDADES DE GASES

| | | P_m | ρ | ρ/ρ_{aire} | V_m | (ebullición) T_e | (fusión) T_f | (crítica) T_c | (crítica) P_c | (crítica) ρ_c |
|---------------------|----------------------------------|--------|---------|---------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|
| | | | a 1 atm | | (m ³ /mol) | (°C) | (°C) | (°C) | (kg/cm ²) | (kg/m ³) |
| Acetona | C ₃ H ₆ O | 58.08 | (2.595) | 2.005 | (22.41) | 56.1 | -94.3 | 235.5 | 48.1 | 273 |
| Acetileno | C ₂ H ₂ | 26.04 | 1.1709 | 0.9057 | 22.22 | -83.6 | -81 | 35.7 | 63.7 | 231 |
| Aire | | 28.96 | 1.2928 | 1.000 | 22.4 | -193 | -213 | -140.7 | 38.4 | 310 |
| Amoniaco | NH ₃ | 17.031 | 0.7714 | 0.6967 | 22.08 | -33.4 | -77.7 | 132.3 | 115.0 | 235 |
| Argon | Ar | 39.944 | 1.7839 | 1.3799 | 22.39 | -185.9 | -189.3 | -122 | 49.6 | 531 |
| Dioxido de carbono | CO ₂ | 44.01 | 1.9768 | 1.5291 | 22.26 | -78.48 | -56 | 31.04 | 75.28 | 468 |
| Monóxido de carbono | CO | 28.01 | 1.2500 | 0.9669 | 22.40 | -191.5 | -205 | -140 | 35.6 | 301 |
| Cloro | Cl ₂ | 70.914 | 3.22 | 2.49 | 22.02 | -33.95 | -100.5 | 144 | 78.6 | 573 |
| Diclorometano | CH ₂ Cl ₂ | 84.94 | (3.79) | 2.93 | (22.41) | -40 | -96.5 | 245 | 45.4 | - |
| Etano | C ₂ H ₆ | 30.07 | 1.356 | 1.049 | 22.16 | -88.6 | -183.6 | 32.3 | 49.8 | 203 |
| Alcohol etílico | C ₂ H ₅ OH | 46.07 | 2.043 | 1.580 | 22.55 | 78.3 | -114.5 | 243.1 | 65.1 | 276 |
| Cloruro de etilo | C ₂ H ₅ Cl | 64.52 | (2.88) | 2.225 | (22.41) | 12.2 | -138.7 | 187.2 | 53.7 | 330 |
| Freon-11 | CF ₃ Cl | 137.4 | (6.13) | 4.74 | (22.41) | 23.65 | -111 | 198.0 | 44.6 | 564 |
| Freon-12 | CF ₂ Cl ₂ | 120.92 | 5.510 | 4.262 | 21.95 | -29.8 | -155 | 111.5 | 40.0 | 555 |

TABLA II-12. PROPIEDADES DEL AGUA LIQUIDA SATURADA

| T | P | V _L | H _L | C _{pL} | k _L | $\mu \cdot 10^6$ | Pr | β_L |
|------|-----------------------|----------------------|----------------|-----------------|----------------|------------------------|------|-----------|
| (°C) | (kg/cm ²) | (cm ³ /g) | (Kcal/kg) | (Kcal/kg °C) | (Kcal/h.m °C) | (kg.s/m ²) | | (1/°C) |
| 0 | 0.0062 | 1.0002 | 0.000 | 1.006 | 0.474 | 182.3 | 13.7 | 75-60 |
| 10 | 0.0125 | 1.0004 | 10.04 | 1.001 | 0.494 | 133.1 | 9.52 | 74-22 |
| 20 | 0.0238 | 1.0018 | 20.04 | 0.999 | 0.515 | 102.4 | 7.00 | 72.55 |
| 30 | 0.0432 | 1.0044 | 30.02 | 0.997 | 0.531 | 81.7 | 5.41 | 71.18 |
| 40 | 0.0752 | 1.0079 | 40.01 | 0.997 | 0.545 | 66.6 | 4.30 | 69.56 |
| 50 | 0.126 | 1.0121 | 49.99 | 0.997 | 0.557 | 56.0 | 3.54 | 67.91 |
| 60 | 0.203 | 1.0171 | 59.98 | 0.998 | 0.567 | 47.9 | 2.98 | 66.18 |
| 70 | 0.318 | 1.0228 | 69.98 | 1.000 | 0.574 | 41.4 | 2.55 | 64.42 |
| 80 | 0.483 | 1.0290 | 80.00 | 1.002 | 0.580 | 36.2 | 2.21 | 62.61 |
| 90 | 0.715 | 1.0359 | 90.04 | 1.005 | 0.585 | 32.1 | 1.95 | 60.75 |
| 100 | 1.03 | 1.0435 | 100.10 | 1.008 | 0.587 | 28.8 | 1.75 | 58.85 |
| 110 | 1.46 | 1.0515 | 110.19 | 1.011 | 0.589 | 26.4 | 1.60 | 56.89 |
| 120 | 2.02 | 1.0603 | 120.3 | 1.015 | 0.590 | 24.2 | 1.47 | 54.89 |
| 130 | 2.75 | 1.0697 | 130.5 | 1.019 | 0.590 | 22.2 | 1.35 | 52.84 |
| 140 | 3.68 | 1.0798 | 140.7 | 1.024 | 0.589 | 20.5 | 1.26 | 50.70 |
| 150 | 4.85 | 1.0906 | 151.0 | 1.030 | 0.588 | 19.0 | 1.17 | 48.63 |
| 160 | 6.30 | 1.1021 | 161.3 | 1.038 | 0.587 | 17.7 | 1.10 | 46.55 |
| 170 | 8.08 | 1.1144 | 171.8 | 1.046 | 0.584 | 16.6 | 1.05 | 44.45 |
| 180 | 10.23 | 1.1275 | 182.3 | 1.055 | 0.580 | 15.6 | 1.00 | 42.25 |
| 190 | 12.80 | 1.1415 | 192.9 | 1.065 | 0.576 | 14.7 | 0.96 | 40.00 |
| 200 | 15.86 | 1.1565 | 203.6 | 1.076 | 0.570 | 13.9 | 0.93 | 37.73 |
| 210 | 19.46 | 1.1726 | 214.4 | 1.088 | 0.563 | 13.3 | 0.91 | 35.40 |
| 220 | 23.66 | 1.1900 | 225.4 | 1.102 | 0.555 | 12.7 | 0.89 | 33.20 |
| 230 | 28.53 | 1.2087 | 236.5 | 1.118 | 0.548 | 12.2 | 0.88 | 30.97 |
| 240 | 34.14 | 1.2291 | 247.8 | 1.136 | 0.540 | 11.7 | 0.87 | 28.57 |
| 250 | 40.56 | 1.2512 | 259.4 | 1.157 | 0.531 | 11.2 | 0.86 | 26.20 |
| 260 | 47.87 | 1.2755 | 271.1 | 1.182 | 0.520 | 10.8 | 0.87 | 23.85 |
| 270 | 56.14 | 1.3023 | 283.1 | 1.211 | 0.507 | 10.4 | 0.88 | 21.46 |
| 280 | 65.46 | 1.3321 | 295.4 | 1.249 | 0.494 | 10.0 | 0.89 | 19.13 |
| 290 | 75.92 | 1.3655 | 308.1 | 1.310 | 0.480 | 9.6 | 0.93 | 16.86 |
| 300 | 87.61 | 1.4036 | 321.2 | 1.37 | 0.464 | 9.3 | 0.97 | 14.40 |
| 310 | 100.64 | 1.447 | 334.9 | 1.45 | 0.450 | 9.0 | 1.02 | 12.07 |
| 320 | 115.12 | 1.499 | 349.9 | 1.57 | 0.435 | 8.7 | 1.11 | 9.84 |
| 330 | 131.18 | 1.562 | 364.5 | 1.73 | 0.416 | 8.3 | 1.22 | 7.68 |
| 340 | 148.96 | 1.639 | 380.9 | 1.95 | 0.393 | 7.9 | 1.38 | 5.67 |
| 350 | 168.63 | 1.741 | 399.2 | 2.27 | 0.370 | 7.4 | 1.60 | 3.82 |
| 360 | 190.42 | 1.894 | 420.7 | 3.34 | 0.340 | 6.8 | 2.36 | 2.02 |
| 370 | 214.68 | 1.22 | 452.0 | 9.63 | 0.290 | 5.8 | 6.80 | 0.47 |

TABLA II-11. PROPIEDADES DEL VAPOR DE AGUA SATURADO

| t | P | ρ_v | H_v | λ | c_p | $k \cdot 10^2$ | $\mu \cdot 10^6$ | Pr |
|------|----------|----------|-----------|-----------|--------------|----------------|------------------|---------|
| (°C) | (kg/cm²) | (kg/m³) | (Kcal/kg) | (Kcal/kg) | (Kcal/kg·°C) | (Kcal/h·m·°C) | (kg·s/m²) | Prandtl |
| 100 | 1.03 | 0.598 | 639.1 | 539.0 | 0.51 | 2.04 | 1.22 | 1.08 |
| 110 | 1.46 | 0.826 | 642.8 | 532.6 | 0.52 | 2.14 | 1.27 | 1.09 |
| 120 | 2.02 | 1.122 | 646.4 | 526.1 | 0.53 | 2.23 | 1.31 | 1.09 |
| 130 | 2.75 | 1.496 | 649.8 | 519.3 | 0.54 | 2.31 | 1.35 | 1.11 |
| 140 | 3.68 | 1.966 | 653.0 | 512.3 | 0.55 | 2.40 | 1.38 | 1.12 |
| 150 | 4.85 | 2.547 | 656.0 | 505.0 | 0.57 | 2.48 | 1.42 | 1.15 |
| 160 | 6.30 | 3.259 | 658.7 | 497.4 | 0.59 | 2.59 | 1.46 | 1.18 |
| 170 | 8.08 | 4.122 | 661.3 | 489.5 | 0.62 | 2.69 | 1.50 | 1.21 |
| 180 | 10.22 | 5.157 | 663.5 | 481.3 | 0.65 | 2.81 | 1.54 | 1.25 |
| 190 | 12.80 | 6.395 | 665.5 | 472.6 | 0.68 | 2.94 | 1.59 | 1.30 |
| 200 | 15.86 | 7.863 | 667.1 | 463.5 | 0.71 | 3.05 | 1.63 | 1.34 |
| 210 | 19.46 | 9.578 | 668.3 | 453.9 | 0.74 | 3.20 | 1.67 | 1.37 |
| 220 | 23.66 | 11.62 | 669.1 | 443.7 | 0.78 | 3.35 | 1.72 | 1.42 |
| 230 | 28.53 | 13.99 | 669.5 | 433.0 | 0.83 | 3.52 | 1.77 | 1.47 |
| 240 | 34.14 | 16.76 | 669.5 | 421.7 | 0.88 | 3.69 | 1.81 | 1.53 |
| 250 | 40.56 | 19.98 | 669.0 | 409.6 | 0.95 | 3.88 | 1.86 | 1.61 |
| 260 | 47.87 | 23.72 | 667.9 | 396.8 | 1.02 | 4.13 | 1.92 | 1.68 |
| 270 | 56.14 | 28.09 | 666.3 | 383.2 | 1.11 | 4.39 | 1.97 | 1.76 |
| 280 | 65.46 | 33.19 | 663.9 | 368.5 | 1.22 | 4.72 | 2.03 | 1.85 |
| 290 | 75.92 | 39.17 | 660.7 | 352.6 | 1.34 | 5.01 | 2.10 | 1.99 |
| 300 | 87.61 | 46.21 | 656.6 | 335.4 | 1.50 | 5.39 | 2.17 | 2.13 |
| 310 | 100.64 | 54.61 | 651.4 | 316.5 | 1.69 | 5.88 | 2.24 | 2.28 |
| 320 | 115.13 | 64.74 | 644.8 | 295.6 | 1.97 | 6.46 | 2.33 | 2.51 |
| 330 | 131.18 | 77.09 | 636.7 | 272.2 | 2.36 | 7.10 | 2.44 | 2.86 |
| 340 | 148.96 | 92.77 | 626.2 | 245.3 | 2.95 | 8.00 | 2.57 | 3.34 |
| 350 | 168.63 | 113.6 | 612.5 | 213.3 | 3.88 | 9.20 | 2.71 | 4.03 |
| 360 | 190.42 | 144.1 | 592.6 | 171.9 | 5.50 | 11.00 | 2.97 | 5.24 |
| 370 | 214.68 | 202.4 | 556.7 | 104.7 | 13.50 | 14.70 | 3.44 | 11.10 |

TABLA II-13. PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS METALES LIQUIDOS.

| | λ (cal/g) | ρ_v (cc) | ρ (mm Hg) | ρ (cc) | ρ (g/cm ³) | C_p (cc) | C_p (cal/g ^{cc}) | μ (cc) | poises | k (cc) | k (cal/cm.s ^{cc}) |
|-----------|----------------------|--------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|---|----------------------------------|---|----------------------------------|--|---------------------------------|---|
| ALUMINIO | 3050 | 1537 1770 2081 2360 | 1 10 100 400 | 660 700 900 1100 | 2.38 2.36 2.31 2.26 | 660- 1000 | 0.259 | 700 800 | 2.9 1.4 | 700 790 | 0.247 0.290 |
| ANTIMONIO | 383 | 886 1033 1223 1288 1364 | 1 10 100 200 400 | 640 700 800 970 | 6.49 6.45 6.38 6.29 | 650- 950 | 0.065 | 702 801 900 1002 | 1.296 1.11 0.99 0.905 | 630 760 | 0.052 0.05 |
| BISMUTO | 204.3 | 917 1067 1257 1325 1400 | 1 10 100 200 400 | 300 400 600 802 962 | 10.03 9.91 9.66 9.40 9.20 | 271 400 600 800 1000 | 0.034 0.035 0.037 0.039 0.041 | 304 451 600 | 1.66 1.28 0.99 | 300 400 500 600 700 | 0.041 0.037 0.037 0.037 0.037 |
| CADMIO | 286.4 | | 1 10 100 200 400 | 330 350 400 500 600 | 8.01 7.99 7.93 7.82 7.77 | 321- 700 | 0.063 | 350 400 500 600 | 2.37 2.16 1.84 1.54 | 355 358 380 435 | 0.106 0.105 0.105 0.112 |
| CESIO | 146 | 278 387 515 570 635 | 1 10 100 200 400 | 28.4 99.6 140.5 210.9 | 1.841 1.797 1.773 1.732 | 28.4 | 0.060 | 28.4 99.6 140.5 210.9 | 0.683 0.475 0.406 0.334 | 28.5 | 0.044 |
| CINC | 24.4 | 487 593 736 788 844 | 1 10 100 200 400 | 419 600 800 | 6.92 6.81 6.57 | 419 600 800 900 1000 | 0.119 0.117 0.107 0.104 0.101 | 450 500 600 700 | 3.17 2.78 2.24 1.88 | 500 600 700 | 0.138 0.136 0.135 |
| ESTAÑO | 573 | 1492 1703 1968 2063 2169 | 1 10 100 200 400 | 409 523 574 648 704 | 6.83 6.76 6.72 6.67 6.64 | 250 1100 | 0.058 0.075 | 240 300 400 500 600 | 1.91 1.67 1.38 1.18 1.05 | 240 292 417 498 | 0.08 0.081 0.079 0.078 |
| GALIO | 1014 | 1315 1497 1726 1806 1895 | 1 10 100 200 400 | 32.4 301 600 806 1100 | 6.09 5.90 5.72 5.60 5.44 | | 0.082 | 52.9 301 402 500 806 | 1.89 1.02 0.87 0.811 0.652 | 29.9 | 0.07- 0.09 |
| INDIO | 468 | 1249 1466 1756 1863 1982 | 1 10 100 200 400 | 164 194 228 271 300 | 7.026 7.001 6.974 6.039 6.916 | 156.4 | 0.0652 | | | 156 | 0.09- 0.12 |

TABLA II-13. PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS METALES LIQUIDOS.

| | (vaporiz) λ | P_v | | ρ | | c_p | | μ | | k | |
|----------------------|-----------------------------------|-------|-------|--------|------------------------------------|-------|---|-------|-------|------|---|
| | ($\frac{\text{cal}}{\text{g}}$) | (°C) | mm Hg | (°C) | ($\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) | (°C) | ($\frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$) | (°C) | Poise | (°C) | ($\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$) |
| LITIO | 4680 | 745 | 1 | 200 | 0.507 | 200 | 1.40 | 183.4 | 0.591 | 218- | 0.09 |
| | | 890 | 10 | 400 | 0.470 | 300 | 1.23 | 193.2 | 0.574 | 233 | |
| | | 1084 | 100 | 600 | 0.474 | 400 | 1.09 | 216 | 0.540 | | |
| | | 1156 | 200 | 800 | 0.457 | 500 | 1.00 | 250.8 | 0.491 | | |
| | | 1236 | 400 | 1000 | 0.441 | | | 285.5 | 0.454 | | |
| MAGNESIO | 1337 | 621 | 1 | 651 | 1.57 | 651 | 0.317 | | | | |
| | | 702 | 10 | 678 | 1.55 | 727 | 0.321 | | | | |
| | | 909 | 100 | 700 | 1.53 | 927 | 0.332 | | | | |
| | | 767 | 200 | 720 | 1.51 | 1027 | 0.337 | | | | |
| | | 1034 | 400 | 750 | 1.47 | 1130 | 0.342 | | | | |
| MERCURIO | 69.7 | 126.2 | 1 | -20 | 13.64 | 0 | 0.033 | -20 | 1.85 | 0 | 0.019 |
| | | 184 | 10 | 20 | 13.54 | 100 | 0.032 | 0 | 1.68 | 60 | 0.023 |
| | | 261.7 | 100 | 100 | 13.35 | 200 | 0.032 | 20 | 1.55 | 120 | 0.026 |
| | | 290.7 | 200 | 200 | 13.11 | 300 | 0.032 | 100 | 1.21 | 160 | 0.027 |
| | | 323 | 400 | 300 | 12.88 | 450 | 0.032 | 200 | 1.01 | 220 | 0.030 |
| PLOMO | 204.6 | 987 | 1 | 400 | 10.51 | 327 | 0.039 | 441 | 2.116 | 330 | 0.039 |
| | | 1167 | 10 | 500 | 10.39 | 400 | 0.037 | 456 | 2.059 | 400 | 0.038 |
| | | 1417 | 100 | 600 | 10.27 | 500 | 0.037 | 551 | 1.700 | 500 | 0.037 |
| | | 1508 | 200 | 800 | 10.04 | | | 703 | 1.349 | 600 | 0.036 |
| | | 1611 | 400 | 1000 | 9.81 | | | 844 | 1.185 | 700 | 0.046 |
| Pb 44.5%-Bi 55.5% | | | | 200 | 10.46 | 144- | 0.035 | 332 | 1.7 | 160 | 0.022 |
| | | | | 400 | 10.19 | 358 | | 450 | 1.38 | 200 | 0.023 |
| | | | | 600 | 9.91 | | | 500 | 1.29 | 240 | 0.024 |
| | | | | 800 | 9.64 | | | 650 | 1.23 | 300 | 0.026 |
| | | | | 1000 | 9.30 | | | 600 | 1.17 | 320 | 0.027 |
| POTASIO | 496 | 342 | 1 | 100 | 0.819 | 75 | 0.195 | 69.6 | 0.515 | 200 | 0.107 |
| | | 443 | 10 | 250 | 0.783 | 200 | 0.188 | 167.4 | 0.331 | 300 | 0.101 |
| | | 581 | 100 | 400 | 0.747 | 400 | 0.182 | 250 | 0.258 | 400 | 0.095 |
| | | 635 | 200 | 550 | 0.711 | 600 | 0.182 | 400 | 0.191 | 500 | 0.089 |
| | | 696 | 400 | 700 | 0.676 | 800 | 0.188 | 700 | 0.136 | 600 | 0.084 |
| SODIO | 1005 | 440 | 1 | 100 | 0.928 | 100 | 0.33 | 103 | 0.68 | 100 | 0.205 |
| | | 540 | 10 | 250 | 0.891 | 200 | 0.32 | 107 | 0.50 | 200 | 0.194 |
| | | 696 | 100 | 400 | 0.854 | 400 | 0.305 | 250 | 0.38 | 300 | 0.180 |
| | | 752 | 200 | 550 | 0.817 | 600 | 0.299 | 400 | 0.269 | 400 | 0.170 |
| | | 815 | 400 | 700 | 0.780 | 800 | 0.303 | 700 | 0.182 | 500 | 0.159 |
| 22%Na-78%K | | 355 | 1 | 100 | 0.847 | 0 | 0.238 | 103 | 0.468 | 100 | 0.058 |
| | | 458 | 10 | 250 | 0.811 | 200 | 0.217 | 167 | 0.359 | 200 | 0.063 |
| | | 603 | 100 | 400 | 0.779 | 400 | 0.210 | 250 | 0.279 | | |
| | | 659 | 200 | 550 | 0.739 | 600 | 0.209 | 400 | 0.205 | | |
| | | 721 | 400 | 700 | 0.700 | 800 | 0.213 | 700 | 0.146 | | |
| 56%Na-44%K | | 382 | 1 | 100 | 0.886 | 100 | 0.269 | 103 | 0.546 | 100 | 0.061 |
| | | 490 | 10 | 250 | 0.850 | 300 | 0.255 | 167 | 0.412 | 200 | 0.063 |
| | | 638 | 100 | 400 | 0.814 | 500 | 0.249 | 250 | 0.316 | 300 | 0.064 |
| | | 696 | 200 | 550 | 0.778 | 600 | 0.248 | 400 | 0.230 | 400 | 0.066 |
| | | 760 | 400 | 700 | 0.742 | 800 | 0.253 | 700 | 0.161 | 500 | 0.067 |

TABLA II-13. PROPIEDADES TERMICAS DE ALGUNOS METALES LIQUIDOS.

| | (vaporiz λ) | P_v | | q | | c_p | | μ | | k | |
|-------|-------------------------------------|-------|------------|------|----------------------|-------|---|-------|--------|------|---|
| | $\left(\frac{\text{cal}}{g}\right)$ | (°C) | (mm Hg) | (°C) | (g/km ²) | (°C) | $\left(\frac{\text{cal}}{g \text{ } ^\circ\text{C}}\right)$ | (°C) | poises | (°C) | $\left(\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}\right)$ |
| TALIO | 189.9 | 825 | 1 | 306 | 11.28 | 303- | 0.036 | | | 350 | 0.059 |
| | | 983 | 10 | 326 | 11.25 | 500 | | | | | |
| | | 1196 | 100 | 330 | 11.25 | | | | | | |
| | | 1274 | 200 | 333 | 11.25 | | | | | | |
| | | 1364 | 400 | | | | | | | | |

TABLA II-14. PROPIEDADES DEL MERCURIO

| t | P _v | H _L | H _v | λ _L | C _{pL} | C _{pV} | V _L | V _g |
|-------|-----------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------------|----------------------|
| (°C) | (kg/cm ²) | (kcal/kg) | (kcal/kg) | (kcal/kg) | (kcal/kg °C) | (kcal/kg °C) | (m ³ /kg) | (m ³ /kg) |
| 118.5 | 0.0010 | 3.96 | 76.22 | 72.26 | 0.0119 | 0.1959 | 0.0000752 | 165.9 |
| 128.4 | 0.0016 | 4.23 | 76.44 | 72.21 | 0.0126 | 0.1920 | 753 | 113.0 |
| 134.6 | 0.002 | 4.45 | 76.61 | 72.16 | 0.0132 | 0.1902 | 754 | 86.16 |
| 144.1 | 0.003 | 4.76 | 76.86 | 72.10 | 0.0139 | 0.1867 | 755 | 58.78 |
| 151.2 | 0.004 | 4.98 | 77.03 | 72.05 | 0.0145 | 0.1843 | 756 | 44.84 |
| 161.5 | 0.005 | 5.31 | 77.32 | 71.98 | 0.0152 | 0.1808 | 758 | 30.62 |
| 168.9 | 0.008 | 5.58 | 77.62 | 71.94 | 0.0158 | 0.1785 | 759 | 23.35 |
| 175.0 | 0.010 | 5.79 | 77.69 | 71.90 | 0.0162 | 0.1767 | 0.0000760 | 18.94 |
| 186.6 | 0.015 | 6.16 | 77.98 | 71.82 | 0.0171 | 0.1733 | 761 | 12.95 |
| 195.0 | 0.02 | 6.44 | 78.20 | 71.76 | 0.0178 | 0.1711 | 762 | 9.893 |
| 207.6 | 0.03 | 6.85 | 78.53 | 71.68 | 0.0186 | 0.1677 | 764 | 6.772 |
| 216.9 | 0.04 | 7.16 | 78.78 | 71.62 | 0.0193 | 0.1654 | 765 | 5.178 |
| 221.5 | 0.05 | 7.41 | 78.98 | 71.57 | 0.0198 | 0.1636 | 766 | 4.206 |
| 230.9 | 0.06 | 7.63 | 79.16 | 71.53 | 0.0202 | 0.1621 | 767 | 3.550 |
| 241.0 | 0.08 | 7.98 | 79.44 | 71.46 | 0.0208 | 0.1598 | 769 | 2.716 |
| 249.6 | 0.10 | 8.25 | 79.66 | 71.41 | 0.0213 | 0.1580 | 0.0000770 | 2.209 |
| 256.7 | 0.12 | 8.48 | 79.84 | 71.36 | 0.0218 | 0.1565 | 771 | 1.866 |
| 262.7 | 0.14 | 8.68 | 80.00 | 71.32 | 0.0222 | 0.1553 | 772 | 1.618 |
| 268.0 | 0.16 | 8.86 | 80.14 | 71.28 | 0.0225 | 0.1542 | 772 | 1.430 |
| 272.9 | 0.18 | 9.02 | 80.27 | 71.25 | 0.0228 | 0.1533 | 773 | 1.282 |
| 277.3 | 0.20 | 9.16 | 80.38 | 71.22 | 0.0231 | 0.1525 | 0.0000774 | 1.1632 |
| 286.7 | 0.25 | 9.46 | 80.62 | 71.16 | 0.0236 | 0.1507 | 775 | 0.9464 |
| 294.4 | 0.30 | 9.73 | 80.84 | 71.11 | 0.0241 | 0.1494 | 776 | 0.7995 |
| 301.7 | 0.35 | 9.96 | 81.02 | 71.06 | 0.0245 | 0.1481 | 777 | 0.6941 |
| 308.0 | 0.40 | 10.18 | 81.19 | 71.01 | 0.0249 | 0.1471 | 779 | 0.6140 |
| 318.8 | 0.5 | 10.55 | 81.49 | 70.94 | 0.0255 | 0.1458 | 0.0000780 | 0.5003 |
| 328.0 | 0.6 | 10.86 | 81.74 | 70.88 | 0.0250 | 0.1439 | 781 | 0.4234 |
| 335.9 | 0.7 | 11.12 | 81.94 | 70.82 | 0.0265 | 0.1428 | 783 | 0.3677 |
| 340.7 | 0.8 | 11.34 | 82.01 | 70.77 | 0.0269 | 0.1418 | 783 | 0.3253 |
| 349.2 | 0.9 | 11.56 | 82.29 | 70.73 | 0.0272 | 0.1408 | 784 | 0.2922 |

TABLA II-14. PROPIEDADES FISICAS DEL MERCURIO

| t | P_v | H_L | H_v | λ_L | C_p | C_{pv} | V_L | V_g |
|-------|----------|-----------|-----------|-------------|--------------|--------------|-----------|----------|
| (°C) | (kg/cm²) | (Kcal/kg) | (Kcal/kg) | (Kcal/kg) | (Kcal/kg °C) | (Kcal/kg °C) | (m³/kg) | (m³/kg) |
| 355.9 | 1.0 | 11.76 | 82.45 | 70.68 | 0.0275 | 0.1400 | 0.0000785 | 0.2655 |
| 365.8 | 1.2 | 12.11 | 82.66 | 70.62 | 0.0280 | 0.1386 | 787 | 0.2240 |
| 374.0 | 1.4 | 12.58 | 82.94 | 70.56 | 0.0285 | 0.1375 | 788 | 0.1953 |
| 381.9 | 1.6 | 12.64 | 83.14 | 70.50 | 0.0290 | 0.1366 | 789 | 0.1730 |
| 389.3 | 1.8 | 12.90 | 83.35 | 70.45 | 0.0294 | 0.1357 | 790 | 0.1555 |
| 395.8 | 2.0 | 13.11 | 83.51 | 70.40 | 0.0297 | 0.1349 | 0.0000791 | 0.1414 |
| 401.7 | 2.2 | 13.32 | 83.68 | 70.36 | 0.0300 | 0.1342 | 792 | 0.1296 |
| 407.4 | 2.4 | 13.54 | 83.86 | 70.32 | 0.0303 | 0.1335 | 793 | 0.1198 |
| 412.4 | 2.6 | 13.70 | 83.98 | 70.28 | 0.0305 | 0.1329 | 794 | 0.1114 |
| 417.0 | 2.8 | 13.87 | 84.11 | 70.24 | 0.0307 | 0.1324 | 794 | 0.1043 |
| 422.4 | 3.0 | 14.04 | 84.25 | 70.21 | 0.0309 | 0.1320 | 0.0000795 | 0.09798 |
| 432.8 | 3.5 | 14.40 | 84.58 | 70.13 | 0.0315 | 0.1308 | 797 | 0.08524 |
| 442.4 | 4.0 | 14.74 | 84.80 | 70.06 | 0.0319 | 0.1298 | 798 | 0.07558 |
| 451.0 | 4.5 | 15.03 | 85.02 | 69.99 | 0.0323 | 0.1289 | 799 | 0.06801 |
| 458.0 | 5.0 | 15.30 | 85.28 | 69.93 | 0.0327 | 0.1282 | 0.0000801 | 0.06487 |
| 466.8 | 5.5 | 15.56 | 85.48 | 69.87 | 0.0331 | 0.1276 | 802 | 0.05682 |
| 472.8 | 6.0 | 15.78 | 85.59 | 69.84 | 0.0334 | 0.1270 | 803 | 0.05254 |
| 479.1 | 6.5 | 15.99 | 85.75 | 69.76 | 0.0337 | 0.1264 | 804 | 0.04891 |
| 485.1 | 7.0 | 16.20 | 85.91 | 69.74 | 0.0339 | 0.1258 | 805 | 0.04578 |
| 496.3 | 8.0 | 16.59 | 86.20 | 69.64 | 0.0344 | 0.1249 | 806 | 0.04065 |
| 506.3 | 9.0 | 16.94 | 86.47 | 69.53 | 0.0349 | 0.1241 | 808 | 0.03660 |
| 515.5 | 10.0 | 17.25 | 86.70 | 69.45 | 0.0356 | 0.1234 | 0.0000809 | 0.03383 |
| 532.3 | 12.0 | 17.85 | 87.15 | 69.30 | 0.0360 | 0.1220 | 812 | 0.02837 |
| 546.7 | 14.0 | 18.35 | 87.54 | 69.16 | 0.0366 | 0.1210 | 814 | 0.2476 |
| 559.8 | 16.0 | 18.84 | 87.84 | 69.03 | 0.0372 | 0.1201 | 816 | 0.2200 |
| 571.4 | 18.0 | 19.28 | 88.14 | 68.91 | 0.0377 | 0.1193 | 818 | 0.01933 |
| 582.4 | 20.0 | 19.62 | 88.42 | 68.80 | 0.0384 | 0.1185 | 0.0000819 | 0.01806 |
| 606.5 | 25.0 | 20.46 | 89.00 | 68.54 | 0.0391 | 0.1170 | 823 | 0.01487 |
| 627.1 | 30.0 | 21.18 | 89.48 | 68.30 | 0.0399 | 0.1158 | 827 | 0.01268 |
| 645.0 | 35.0 | 21.83 | 89.91 | 68.08 | 0.0406 | 0.1147 | 830 | 0.01109 |
| 661.9 | 40.0 | 22.41 | 90.28 | 67.87 | 0.0412 | 0.1138 | 832 | 0.009873 |
| 677.0 | 45.0 | 22.90 | 90.62 | 67.67 | 0.0418 | 0.1130 | 835 | 0.008923 |
| 690.9 | 50.0 | 23.44 | 90.91 | 67.47 | 0.0423 | 0.1123 | 837 | 0.008148 |

TABLA II-15. PROPIEDADES FISICAS DE LA MEZCLA NITRITO-NITRATO

| t, (°C) | ρ (Kg/m ³) | k (Kcal/m.hr°C) | $\mu \cdot 10^4$ (Kg.sec/m ²) | H_L (Kcal/kg) | Pr |
|---------|--------------------------------|----------------------|--|--------------------|------|
| 150 | 1976 | 0.379 | 18.12 | 80.7 | 57.4 |
| 160 | 1967 | 0.398 | 14.95 | 84.1 | 47.5 |
| 170 | 1959 | 0.377 | 12.53 | 87.5 | 39.9 |
| 180 | 1951 | 0.376 | 10.68 | 90.9 | 34.1 |
| 190 | 1943 | 0.375 | 9.21 | 94.3 | 29.5 |
| 200 | 1984 | 0.374 | 8.04 | 97.7 | 25.8 |
| 210 | 1926 | 0.373 | 7.09 | 101.1 | 22.8 |
| 220 | 1919 | 0.372 | 6.31 | 104.5 | 20.4 |
| 230 | 1911 | 0.370 | 5.67 | 107.9 | 18.4 |
| 240 | 1903 | 0.368 | 5.12 | 111.3 | 16.7 |
| 250 | 1895 | 0.366 | 4.66 | 114.7 | 15.3 |
| 260 | 1887 | 0.360 | 4.27 | 118.1 | 14.2 |
| 270 | 1879 | 0.355 | 3.93 | 121.5 | 13.3 |
| 280 | 1871 | 0.350 | 3.63 | 124.9 | 12.4 |
| 290 | 1864 | 0.344 | 3.38 | 128.6 | 11.8 |
| 300 | 1856 | 0.338 | 3.15 | 131.7 | 11.2 |
| 310 | 1849 | 0.333 | 2.96 | 135.1 | 10.7 |
| 320 | 1841 | 0.328 | 2.77 | 138.5 | 10.1 |
| 330 | 1834 | 0.322 | 2.62 | 141.9 | 9.76 |
| 340 | 1826 | 0.317 | 2.48 | 145.3 | 9.39 |
| 350 | 1819 | 0.311 | 2.36 | 148.7 | 9.11 |
| 360 | 1812 | 0.306 | 2.23 | 152.1 | 8.74 |
| 370 | 1804 | 0.300 | 2.13 | 155.5 | 8.52 |
| 380 | 1797 | 0.295 | 2.04 | 158.9 | 8.30 |
| 390 | 1790 | 0.289 | 1.95 | 162.3 | 8.10 |
| 400 | 1783 | 0.284 | 1.871 | 165.7 | 7.91 |
| 410 | 1776 | 0.278 | 1.797 | 169.1 | 7.76 |
| 420 | 1769 | 0.273 | 1.730 | 172.5 | 7.60 |
| 430 | 1762 | 0.267 | 1.668 | 175.9 | 7.50 |
| 440 | 1755 | 0.262 | 1.610 | 179.3 | 7.37 |
| 450 | 1748 | 0.256 | 1.556 | 182.7 | 7.29 |
| 460 | 1741 | 0.251 | 1.507 | 186.1 | 7.20 |
| 470 | 1734 | 0.245 | 1.461 | 189.5 | 7.16 |
| 480 | 1728 | 0.240 | 1.418 | 192.9 | 7.09 |
| 490 | 1721 | 0.234 | 1.377 | 196.3 | 7.06 |
| 500 | 1715 | 0.229 | 1.339 | 199.7 | 7.02 |
| 510 | 1708 | 0.223 | 1.303 | 203.1 | 7.01 |
| 520 | 1701 | 0.218 | 1.271 | 206.5 | 7.00 |
| 530 | 1695 | 0.213 | 1.239 | 209.9 | 7.00 |
| 540 | 1688 | 0.207 | 1.210 | 213.2 | 7.00 |
| 550 | 1681 | 0.202 | 1.181 | 216.6 | 7.00 |

INDICE DE MATERIAS

A

aceros tablas 759

adimensionales grupos 72

agua propiedades 773

aire propiedades 769

aislantes térmicos 124

— propiedades 763

aleaciones tablas 759

aletas acopladas 203

— eficacias 175, 183

— óptimos 171, 174

— parabólicas 163

— radiales 177

— rectas 148

— triangulares 160

analogías 4

analógicos métodos 284

apéndice I, 671

— II, 747

aproximados métodos 286

B

Bessel funciones 672

— tablas 680, 683,
720, 726

Bibliografía Cap.1 43

— Cap.2 107

— Cap.3 293

— Cap.4 410

— Cap.5 468

— Cap.6 512

— Cap.7 586

— Cap.8 666

C

cambios de estado 9, 661

cerámicos cuerpos 127

— propiedades 755

coeficiente de convección 7, 78

combustibles nucleares 301

condiciones superficiales 52, 115

conformes transformaciones 223

— polígonos 224

— diversas 226

— ángulos 247

conductividad térmica

— gases 87, 769

— líquidos 88

— sólidos 92

- tablas 748
- eléctrica 304
- contacto resistencias 113
- convección mecanismo 6
 - tablas 78
- coordenadas cilíndricas 51
 - esféricas 51
- criogénicas temperaturas 145
- cuerpo negro 15

D

- dieléctricos 313
- Dirac función 740
- domésticos aislamientos 135

E

- ecuaciones generales 45
 - adimensionales 72
 - analógicas 80
- eléctrica generación
 - calor 303
- eléctricos arcos 314
- elementos fértiles 296
 - fisibles 296
 - fisionables 296

- emisividad 28
 - gases 36
 - sólidos 29
 - tablas 760
- energía de fisión 297
- error función 743
- espectro ondas 13
- estacionario régimen 109
 - cilindros 254
 - esferas 122
 - paralelepípedos 271
 - paredes 110
 - rectángulos 205
 - tubos 117, 260

F

- fisión nuclear 296
- fluidos 58
 - ideales 63
 - reales 64
- forma factor 22
 - cuerpos grises 30
 - cuerpos negros 23
- Fourier ecuaciones 47
 - modificada 56
 - transformadas 684
 - tablas 693

funciones armónicas 221

— Bessel 672

— tablas 680-726

— conjugadas 221

— Dirac 740

— error 743

— Fourier 684

— tablas 693

— gamma 745

— Hankel 704

— tablas 693

— paredes 476

— rectángulos 481

— tubos 502

gráficos métodos 283

gris cuerpos 27

grupos adimensionales 72

H

Hankel funciones 704

tablas 707, 719

G

gamma función 745

gases radiación 34

— propiedades 769

generación de calor

— estacionario 295

— eléctrica 303

— cilindros 366

— esferas 400

— paralelepípedos 352

— paredes 324

— rectángulos 342

generación transitoria

— cilindro 492

— esferas 508

— paralelepípedos 487

I

inducción calentamiento 307

integrales seno 746

coseno 746

exponenciales 746

Fourier 693

L

Laplace transformadas 727

tablas 732

M

materiales propiedades 76

tablas 748

mecanismos de transición

de calor 1

metales, conducción 3

propiedades 748

métodos analógicos 284

aproximados 284

gráficos 283

numéricos 276

movimiento cuerpos 657

— cambios estado 661

— focos 589

— cilindros 645

— paralelepípedos 618

— paredes 605

— rectángulos 611

N

negro cuerpo 15

— radiación 18

— función 19

nuclear fisión 296

— combustibles 301

numéricos métodos 276

P

parabólicas aletas 163

periódicas temperaturas 553

plasmas gaseosos 316

polígonos transformación 224

protuberancias 182

— cilíndricas 188

— eficacias 199

— paralelepipedicas 185

— parabólicas 196

— rectangulares 190

Q

quantos de radiación 11

químicas reacciones 83, 319

R

radiación 11

— cuerpos diversos 23

— — grises 27

— — negros 15

— fotones 12

— función 18

— ondas 13

— térmica 15

reacciones químicas 83, 319

régimen estacionario 109

resistencias térmicas 4

- serie 38
- de contacto 111
- eléctricas 304
- tablas 306
- rectangulares aletas 152
- reflectores aislantes
115, 146
- S
- sectores circulares 226
- semejanza térmica 72
- solar radiación 20
- solidificación 661
- T
- temperaturas transitorias 514
 - cilindros 557
 - esferas 582
 - paralelepípedos 552
 - paredes 529
 - tubos 575
- tensiones térmicas 66
 - deformaciones 69
- transformaciones conformes 220
- transformadas
 - Fourier 693
 - Hankel 704
 - Laplace 727
- transitorio régimen
 - sin generación calor 413
 - cilindros 446
 - esferas 508
 - paralelepípedos 442
 - paredes 426
 - rectángulos 430
 - en movimiento 590, 657
- Triangulares aletas 160

